Вежбе, Анализа 2

Ц смер

1.4.2020. године

1. Нека је X произвољан скуп и $d : X \times X \to \mathbb{R}$ функција која сваком пару елемената скупа X додељује реалан број. Ако та функција има особине:

1. $d(x, y) \geq 0$

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3. $d(x, y) = d(y, x)$

4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

онда кажемо да је d растојање на X, а пар (X, d) називамо метричким простором.

1. Доказати да је са $d(x, y) = arctan|x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ дефинисана метрика на $\mathbb{R}$ у односу на коју је тај простор ограничен.

Позитивна дефинитност и симетричност се лако проверава. Проверимо неједнакост троугла, примећујући да важи:

$$\arctan(x + y) \leq \arctan x + \arctan y.$$

Ово важи јер је $f(x) = \arctan(x + y) - \arctan x - \arctan y$ монотоно опадајућа за свако $x \geq 0$, а $f(0) = 0$. Следи,

$$\arctan|x - y| \leq \arctan|x - z| + |z - y| \leq \arctan|x - z| + \arctan|z - y|.$$

Ограниченост простора следи из чињенице да је $diam(\mathbb{R}) = 0$.

2. Нека је s скуп свих бројних низова. Доказати да је (s, d) метрички простор у коме је функција растојања дефинисана са $d(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$.

Како је $\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq 1$, то је функција растојања добро дефинисана. Позитивна дефинитност и симетричност су очигледне. Неједнакост троугла следи из

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a + c|}{1 + |a + c|} + \frac{|b + c|}{1 + |b + c|},$$

што је последица чињенице да је функција $\frac{t}{t+1}$ монотоно растућа за свако $t \leq 0$.

3. Доказати да функција $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ нема граничну вредност у тачки $(0, 0)$.

Уочимо низове $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(x''_n, y''_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$. Како је $f(x'_n, y'_n) = 0$, $f(x''_n, y''_n) = \frac{3}{5}$ то гранична вредност у посматраној тачки не постоји.

4. Испитати непрекидност функције $f(x, y) = \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{1 + \sin^2(x^2 - y^2)}$.

Функције $1+x^2+y^2$, x^2-y^2 су непрекидне за свако $x,y\in\mathbb{R}$. Функција $\ln(1+x^2+y^2)$ је непрекидна на $\mathbb{R}^2$ јер је $1+x^2+y^2>0$. Такође је функција $\sin^2(x^2-y^2)$ непрекидна на $\mathbb{R}^2$. Осим тога је $1+\sin(x^2-y^2)>0$, па је задата функција непрекидна.

5. Додефинисати функцију $f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ до непрекидности у тачки $(0,0)$.

Функција ће бити непрекидна у тачки $(0,0)$ ако је $f(0,0)=\lim\limits_{x\to0,y\to0}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$.

6. Доказати да систем једначина

$$x^2+y^2=25,$$

$$x^3+y^3+x^2y-6=0,$$

има бар два реална решења.

Функција $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y-6$ је непрекидна на целој реалној равни. У тачки $A(5,0)$ кружнице $x^2+y^2=25$ вредност функције је 119, а у тачки $B(-5,0)$ исте кружнице вредност функције једнака је -131. Дуж сваке непрекидне криве у равни која спаја тачке $A(5,0)$ и $B(-5,0)$ функција f има бар једну нулу. Стога на кружници $x^2+y^2=25$ постоје бар две тачке M и N у којима је функција једнака нули.

7. Доказати да функција $f(x,y)=x^4+y^4$ достиже најмању и највећу вредност у области одређеној неједнакостима $x+y\geq 3$, $x^2+y^2\leq 16$.

Област одређена задатим неједнакостима је затворен и ограничен скуп. Како је функција непрекидна на њему, она на истом достиже најмању и највећу вредност.

8. Нека је f непрекидно пресликавање компактног метричком простора (X,d_X) на метрички простор (Y,d_Y). Доказати да је Y компактан простор.

9. Да ли је функција $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ равномерно непрекидна у области дефинисаности?

10. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ у области $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}:x^2+y^2<1\}$.

Функција f је непрекидна на E, али није равномерно непрекидна. Уочимо два низа тачака $A_n=(\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\cos\alpha,\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\sin\alpha)$, $B_n=(\sqrt{1-\frac{2}{4n+1}}\cos\alpha,\sqrt{1-\frac{2}{4n+1}}\sin\alpha)$, $n\in\mathbb{N}$. Како је $d(A_n,B_n)=0$, а $|f(A_n)-f(B_n)|=1$, функција није равномерно непрекидна.

11. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ у области

а) $r^2\leq x^2+y^2\leq R^2$

б) $0<x^2+y^2\leq R^2$

12. Наћи тачке у којима функција $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ нема парцијалне изводе.

У тачки $(0,0)$ функција нема парцијалне изводе, што се лако проверава дефиницијом $f'_x=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$.

13. Доказати да је функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^6+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

прекидна у тачки $(0,0)$, али да има парцијалне изводе у тој тачки.

Како је $f(x,0)=f(0,y)=0$, то је $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. Функција има прекид у тачки $(0,0)$, јер је $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3})=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{n},-\frac{1}{n^3})=-\frac{1}{2}$.

14. Одредити извод функције $f(x,y)=x^2+y^2$ у тачки $(2,1)$ у правцу вектора $\overrightarrow{a}(1,1)$.
$f'_{\overrightarrow{a}}(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\overrightarrow{a})-f(x_0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(2+t,1+t)-f(2,1)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(2+t)^2+(1+t)^2-4-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{6t+2t^2}{t}=6$

15. Доказати да функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Како је $f(x,0)=f(0,y)=0$, то је $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. Ако би функција била диференцијабилна у тачки $(0,0)$, онда би се прираштај функције у тачки $(0,0)$ могао приказати у облику $\triangle f(0,0)=f(\triangle x,\triangle y)-f(0,0)=f'_x(0,0)\triangle x+f'_y(0,0)\triangle y+\varepsilon(\triangle x,\triangle y)r$, када $r\to 0$, где је $r=\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}$, при чему је $\lim\limits_{r\to 0}\varepsilon(\triangle x,\triangle y)=0$. Из последње једнакости имамо да је $\varepsilon(\triangle x,\triangle y)=\frac{\triangle x|\triangle y|}{\triangle x^2+\triangle y^2}$, а функција није диференцијабилна у $(0,0)$ јер је $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=-\frac{1}{2}$.