Задаци

Зора Голубовић

Септембар, 2018

1 час

1. Решити једначину $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = x$.

Разликујемо 4 случаја.

За $\{x\} = \alpha \in [0, \frac{1}{3})$ добија се $6\alpha = k + \alpha = x$, односно $0 \leq 5\alpha = k < \frac{1}{3}$, одакле је $k \in \{0, 1\}$ и $x \in \{0, \frac{6}{5}\}$.

За $\{x\} = \alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ добија се $\alpha + 2\alpha + 3\alpha - 1 = 6\alpha - 1 = k + \alpha = x$, односно $5\alpha = k + 1$ одакле је $k \in \{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\} \cap \mathbb{Z}$ и $x = \frac{7}{5}$.

За $\{x\} = \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ добија се $x = \frac{8}{5}$.

За $\{x\} = \alpha \in [\frac{2}{3}, 1)$ добија се $x = \frac{9}{5}$.

2. Решити једначину $[\frac{5+6x}{8}] = \frac{15x-7}{5}$.

Сменом $m = [\frac{5+6x}{8}]$ добија се еквивалентна једначина $[\frac{m}{4} + \frac{39}{40}] = m$. Како је $m \leq \frac{m}{4} + \frac{39}{40} < m + 1$, следи $m \in (-\frac{1}{30}, \frac{13}{10}]$. Коначно, $x \in \{\frac{7}{15}, \frac{4}{5}\}$.

3. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + [y] + \{z\} &= 1,1, \\ y + [z] + \{x\} &= 2,2, \\ z + [x] + \{y\} &= 3,3. \end{aligned}$$

Приметимо да је $x + y + z = 3,3 = z + [x] + \{y\}$ $x = [x] - [y] \in \mathbb{Z}$. Лако се добија $x = 1$, $y = 0,2$, $z = 2,1$.

4. Решити систем једначина:

$$x - y = 2001,$$
$$[x] + [y] = 2003.$$

Приметимо да је $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, одакле се сменом у прву једначину добија $x = 2001 + y$. Коначно, $[x] = 2002$, $[y] = 2$ и $\mathscr{R} = \{(2002 + w, 1 + w) : w \in [0, 1)\}$.

2 час

Принцип математичке индукције се може записати: $P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(n+1)) \implies (\forall n \in \mathbb{N})P(n)$.

1. Наћи цео део броја $a_n = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \ldots \sqrt[3]{24}}}$. Приметимо да је $2 \leq \sqrt[3]{24} < 3$. Доказ индукцијом. 2. Доказати да је $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Посматрањем моничног полинома 4. степена или индукцијом. 3. Доказати Бернулијеву неједнакост: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Индукцијом.

4. Доказати биномну формулу: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Индукцијом.

3 час

1. Одредити број бинарних релација на n-елементном скупу.

2^{n^2}

2. Одредити број рефлексивних релација на n-елементном скупу (и број релација које нису рефлексивне).

2^{n^2-n} $(2^{n^2} - 2^{n^2-n})$

3. Одредити број симетричних релација на n-елементном скупу (и број релација које нису симетричне).

$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ $(2^{n^2} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}})$

4. Одредити број антисиметричних релација на n-елементном скупу.

$2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

5. Одредити број елемената партитивног скупа n-елементног скупа.

2^n

4 4

. Доказати да је пресликавање $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $f(n) = \{\alpha n\}$ инјективно за свако $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Нека је график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ симетричан у односу на праве $x = a$, $x = b$, $a \neq b$. Доказати да је функција f периодична.

5 час

1. Нацртати график функције $y = \sqrt[3]{3x^2} - x$.

2. Нацртати график функције $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-9}}$.

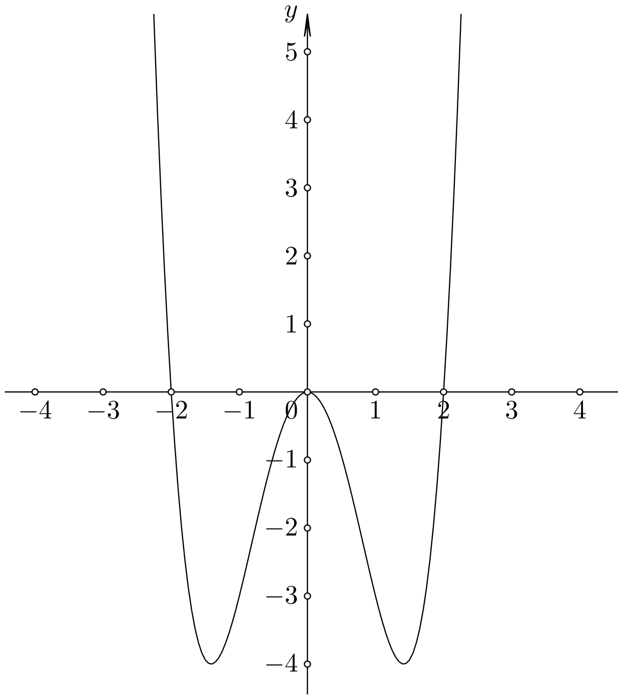
3. Нацртати график функције $y = \frac{x^2-2x-8}{x-1}$.

4. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата је са

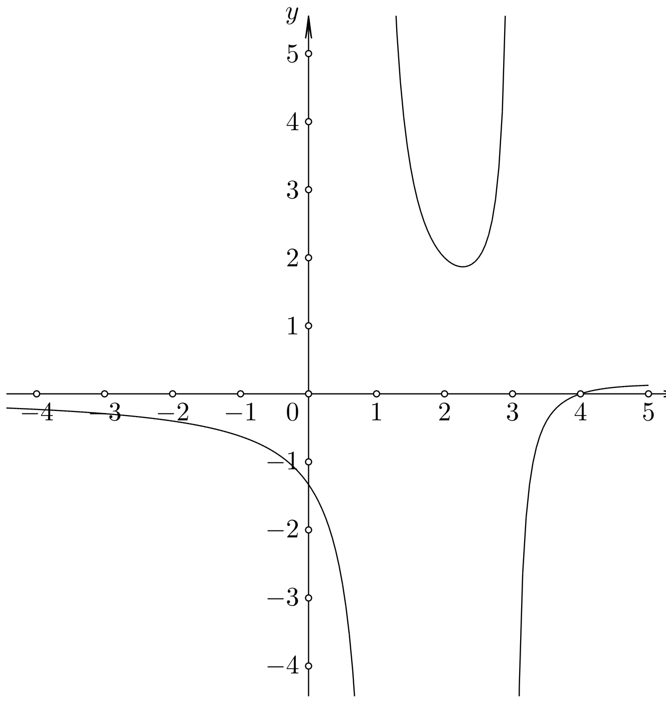
$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ -x-2, & -1 \le x < 0, \\ 2x-2, & 0 \le x < 1, \\ 2x-4, & x \ge 1. \end{cases}$$

Нацртати графике функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задате са $g(x) = |f(|x-2|)| + 1$ и $h(x) = |f(|x|-2)| + 1$.

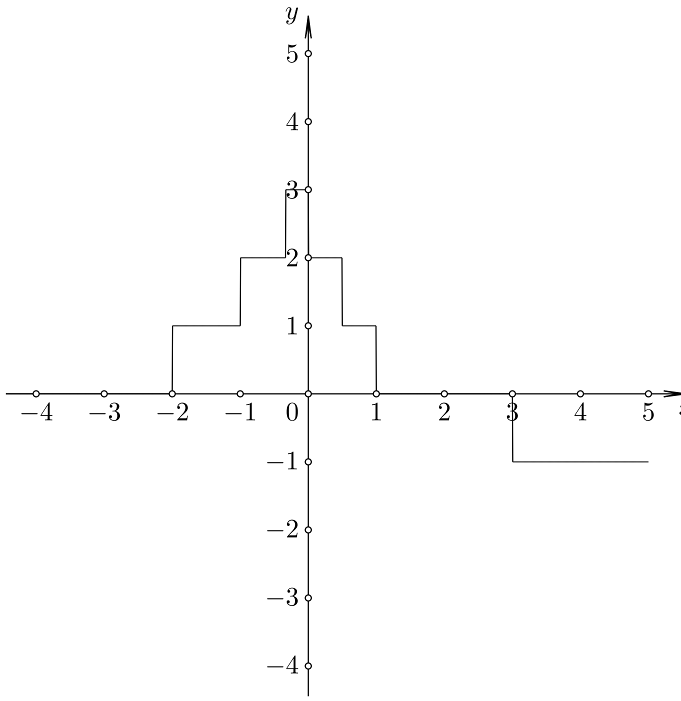
6 час



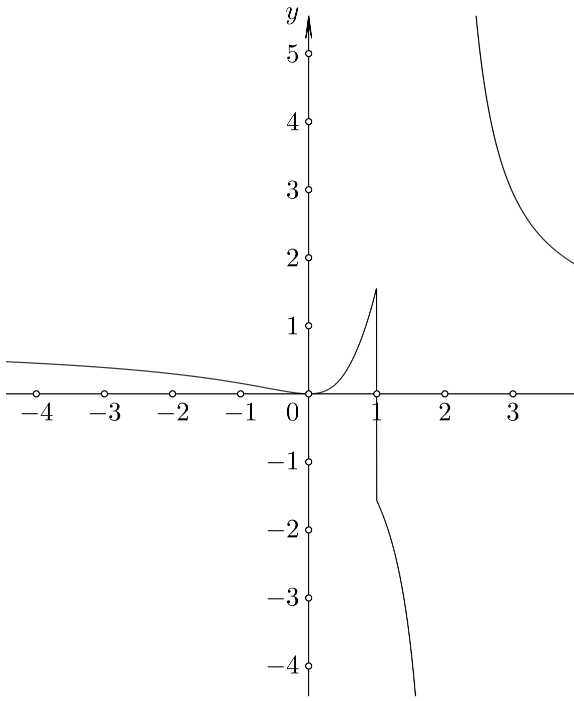
1. Нацртати график функције $y = x^4 - 4x^2$.
$D = \mathbb{R}$. Функција је парна. Пресеци са x-осом су $(0,0)$, $(-2,0)$, $(2,0)$. Функција је позитивна на $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, а негативна на $(-2,2)$. Испитивањем првог извода се добија да је функција растућа на $(-\sqrt{2},0) \cup (\sqrt{2},\infty)$, а опадајућа на $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (0,\sqrt{2})$. Испитивањем другог извода се добија да је функција конвексна на $(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}},\infty)$, а конкавна на $(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})$, па су превојне тачке $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Функција нема асимптота.



2. Нацртати график функције $y = \frac{x-4}{x^2-4x+3}$.
$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Функција није ни парна ни непарна. Пресек са x-осом је $(4, 0)$. Функција је позитивна на $(1, 3)$, а негативна на $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Функција има 2 вертикалне асимптоте и 1 хоризонталну.



3. Нацртати график функције $y = \left[\frac{3-x}{x^2+1}\right]$.
$D = \mathbb{R}$. На помоћну функцију $y = \frac{3-x}{x^2+1}$, чији график се лако црта, применити функцију цео део.



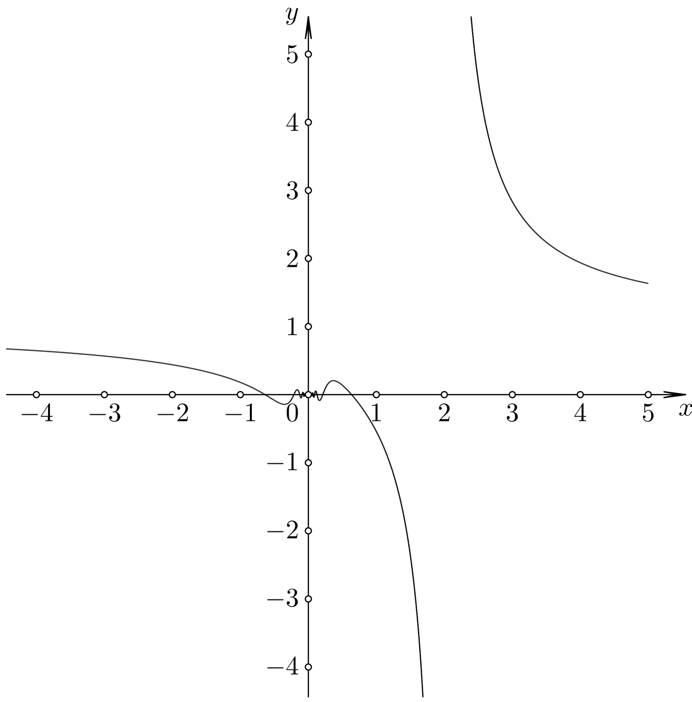
4. Нацртати график функције $y = \frac{x}{x-2} \arctan \frac{x}{x-1}$.
$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Функција није ни парна ни непарна. Пресеци са x-осом су $(0,0)$, $(1,0)$. Функција је позитивна на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, а негативна на $(-2, 2)$. Испитивањем првог извода се добија да је функција растућа на

$$, j$$

. Испитивањем другог извода се добија да је функција конвексна на

$$, , j$$

.



5. Нацртати график функције $y = \frac{x \cos \frac{1}{x}}{x-2}$.
$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Функција није ни парна ни непарна. Пресеци са x-осом су $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$. Функција је позитивна на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, а негативна на $(-2, 2)$. Испитивањем првог извода се добија да је функција растућа на

$$, j$$

. Испитивањем другог извода се добија да је функција конвексна на

$$, , j$$

.

7 час

1. Наћи супремуме и инфимуме следећих скупова:

$X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
$Y = \{\frac{(-1)^n (n-1)}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
$Z = \{\frac{(3+(-1)^n)}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Доказати Коши-Шварцову неједнакост $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$, за $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Посматрањем дискриминанте једначине $(At+B)^2$ за одговарајуће A, B.

3. Доказати да низови $(-1)^n$, $sinn$ дивергирају.

4. Наћи $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Применом теореме о три низа.

5. Нека је $a > 0$, $x_1 > 0$ $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да низ конвергира и наћи му граничну вредност.

Доказати да је низ монотон и ограничен, па конвергира.

6. Нека је $c > 0$, $x_1 = \sqrt{c}$, $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да низ конвергира и наћи му граничну вредност.

Доказати да је низ монотон и ограничен, па конвергира.

8 час

1. Нека је $a_1^2 > a_2^2 + \cdots + a_n^2$ или $b_1^2 > b_2^2 + \cdots + b_n^2$. Доказати да тада важи $(a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2)$.

Посматрањем дискриминанте одговарајуће квадратне једначине.

2. Наћи граничну вредност низа $(a_n)_{n\geq 2}$ дефинисаног са $a_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$.

3. Низ реалних бројева задовољава $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} + x_{2n+1} = 315$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} + x_{2n-1} = 2003$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}$.

4. Ако за низ реалних бројева $(a_n)_{n\geq 1}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}) = 0$, доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

9 час

1. Одредити константе a, b и c тако да важи $\frac{x^3+4x}{x^2+2x} = a+bx+cx^2+o(x^2)$ за $x \to 0$.

$a = 1$, $b = -1$, $c = 1$.

2. Одредити константе a, b и c тако да важи $\sqrt[3]{x^3+x} = ax+b+\frac{c}{x}+o(\frac{1}{x})$ за $x \to -\infty$.

$a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$.

3. Одредити константе a и b тако да важи $\sqrt{e^x+x} = a+bx+o(x)$ за $x \to 0$.

$a = 1$, $b = 1$.

4. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - \cos x}{x^2}$.

Добија се $\frac{3}{2}$ као резултат.

5. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt{1-x^2}}}{x^4}$.

Добија се $\frac{e}{6}$ као резултат.

10 Литература

1. T-L. Radulescu, V. Radulescu, T. Andreescu, Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axes, Springer, 2009.
2. ДМС, Тангента 10
3. $http://gen.lib.rus.ec/$
4. $http://www.wolframalpha.com/$
5. $http://poincare.matf.bg.ac.rs/ janicic/gclc/$
6. $http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/43 - teor_brojeva3_online.pdf$
7. $http://www.mi.sanu.ac.rs/ gvm/Teze/MatematickaAnalizaI.pdf$
8.