Зимски семестар 2024/2025 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Обнављање

1. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Решење. Приметимо да је $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ за $n \geqslant 1$. На основу АГ неједнакости је

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1\cdot 1\cdots\sqrt{n}\sqrt{n}} \leqslant \frac{1+1+\cdots\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} \to 0+1 = 1, n\to\infty.$$

2. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Решење. Приметимо да је највећи сабирак посматране суме први, а најмањи последњи сабирак. Применом теореме о три лимеса на $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, налази се да је лимес једнак 1.

3. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{10}}$.

Решење. У посматраној суми највећи је последњи, а најмањи први сабирак. Дакле,

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n\cdot 1^{10}} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^{10}} \leqslant \sqrt[n]{n\cdot n^{10}} = \sqrt[n]{n^{11}}.$$

Применом теореме о три лимеса као у претходном задатку, закључујемо да је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^{10}} = 1.$$

4. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n} = \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}$

Решење. Како је $a_i \leqslant \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ за $i = 1, \dots k$, а максимум коначног скупа се достиже, то је

$$\max\{a_1, a_2, \dots a_k\} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} \leqslant k^{\frac{1}{n}} \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}.$$

Закључак следи применом теореме о 3 лимеса.

5. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^b}$, где су $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Решење. Размотримо следеће случајеве:
1) $a > 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + n^b} = a\sqrt[n]{1 + \frac{n^b}{a^n}} \to a, n \to \infty.$$

2) $0 < a < 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{n}^b \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^b} + 1} \to 1, n \to \infty.$$

3) $a = 1$:

$$\sqrt[n]{1 + n^b} \to 1, n \to \infty.$$

6. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n} (k-1) \prod\limits_{k=2}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n} k^2},$$

померањем индекса у производима у бројиоцу, добија се

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k \prod\limits_{k=3}^{n+1} k}{\prod\limits_{k=2}^{n} k^2},$$

и скраћивањем одговарајућих разломака,

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n-1}{2n},$$

одакле пуштањем лимеса имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}.$$

7. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)},$$

померањем индекса и скраћивањем разломака се добија

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

8. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Решење.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)},$$

а важи идентитет $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$, то након померања индекса у производу и канцелације, имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}.$$

Теорема (Штолц)**.** Нека је:

1) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго растући низ,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

3) постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

9. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n}$.

Решење. Овде је $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$ и $y_n = n$. Како је $y_n = n$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \sqrt[k]{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, то је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n} = 1.$$

10. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5}$.

Решење. Овде је $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^4$, а $y_n = n^5$ је строго растући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, при чему је и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5} = \frac{1}{5}$. Применом Штолцове теореме, закључујемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5} = \frac{1}{5}.$$

11. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$.

Решење. Овде је $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$, а $y_n = n^{p+1}$ је строго растући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Додатно, применом биномне формуле $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$. Задовољени су сви услови за примену Штолцове теореме и коначно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

1.2 Линеарне хомогене диференцне једначине са кораком 2 и 3

Нека је x_1, x_2 дато и

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Нека су λ_1, λ_2 решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n,$$

при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

12. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n,$$

ако је $x_1 = 5$ и $x_2 = 13$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$ су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n + 3^n$.

13. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n,$$

ако је $x_0 = 3$ и $x_1 = 1$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 2x - 3 = 0$ су $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Дакле, опште решење је $x_n = 2(-1)^n + 2^n$.

14. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n,$$

ако је $x_1 = 4$ и $x_2 = 12$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 4x + 4 = 0$ су $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n(1 + n)$.

Нека су x_1, x_2, x_3 дати и

$$x_{n+3} = \alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, то је

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n + C_3 \lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n + C_3 n^2 \lambda_1^n.$$

15. Решити диференцну једначину

$$x_{n+3} = -x_{n+2} + 17x_{n+1} - 15x_n,$$

ако је $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$. Опште решење је облика $C_1 + C_2 3^n + C_3(-5)^n$. Из почетних услова се одређују константе $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$ као решења одговарајуег система (3 једначине са 3 непознате). Дакле, опште решење је $x_n = 3^n$.

16. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 4y_n,$$

ако је $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Решење. Из прве једначине је $y_n = 2x_n - x_{n+1}$, односно $y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_{n+2}$. Сменом у другу једначину, добија се $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$, одакле следи $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Из почетних услова се одређују C_1, C_2, односно $x_n = 3^n(2 - n)$,а добија се и $y_n = 3^n(n + 1)$.

17. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n,$$

ако је $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

Решење. Решавањем система се добија карактеристична једначина за x_n: $x^2 - 4x + 1 = 0$, чији су корени $2 \pm \sqrt{3}$. Лако се налази $x_n = \frac{(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n}{2}$, $y_n = \frac{\sqrt{2}}{6}((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)$.

18. Нека је

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}, \; p, q, r, s \in \mathbb{R},$$

$$x_{n+1} = px_n + qy_n,$$

$$y_{n+1} = rx_n + sy_n,$$

при чему је $x_1 = a_1 = a$, $y_1 = 1$. Доказати да је

$$a_n = \frac{x_n}{y_n},$$

ако је $y_n \neq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Лако се проверава индукцијом.

19. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{1 - 4a_n}{1 - 6a_n},$$

ако је $a_1 = 1$.

Решење. Користи се претходни задатак. Треба решити систем диференцних једначина,

$$x_{n+1} = 4x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = 6x_n - y_n.$$

Добија се $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, одакле се налази $x_n = C_1 + C_2 2^n$, а уврштавањем почетних услова, $x_n = 2^n - 1$, $y_n = 2^{n+1} - 3$. Овде је $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.

20. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},$$

ако је $a_0 = 1$.

Решење. Треба решити систем

$$x_{n+1} = x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 3y_n,$$

уз почетне услове $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Лако се налази $x_n = 2^n(1-n)$, $y_n = 2^n(1+n)$ и $a_n = \frac{1-n}{1+n}$.

1.3 Бројни редови

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је бесконачни ред са општим чланом a_n, а $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ је n-та парцијална сума реда. Ред конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума. Неопходан услов за конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема (I поредбени критеријум)**.** Нека су $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ позитивни редови. Ако почев од неког индекса важи $a_n \leqslant b_n$, тада из конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следи конвергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из дивергенције реда $\sum\limits_{n=1} a_n$ следи дивергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (II поредбени критеријум)**.** Нека су $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ позитивни редови. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in (0,\infty)$, тада су ови редови еквиконвергентни.

21. $a_0 \in [0,1]$ и $a_{n+1} = cos a_n$, $n \geqslant 0$. Да ли ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира?

Решење. Приметимо да је $a_n \in [cos(1), 1]$ за $n \geqslant 1$. Према томе, општи члан реда не задовољава неопходан услов конвергенције (није $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), па ред дивергира.

22. Хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Решење. Низ парцијалних сума посматраног реда није Кошијев, па не конвергира: Нека је $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и $m = 2n$, тада $|S_m - S_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$.

23. Сумирати ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$.

Решење. За суму реда је потребно одредити лимес низа парцијалних сума. Приметимо, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \lim\limits_{n\to\infty} [\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k}]$, одакле померањем индекса и поништавањем истих сабирака налазимо $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \lim\limits_{n\to\infty} [1 - \frac{1}{n}] = 1$.

24. Испитати конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$

Решење. Први ред је еквиконвергентан хармонијском реду по поредбеном критеријуму, па дивергира. Takoђе, дивергенција се може закључити и Кошијевим критеријумом (низ парцијалних сума није Кошијев, па дивергира).
Други ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

25. Доказати да геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира и сумирати га.

Решење. Израчунајмо најпре n-ту парцијалну суму реда. Множењем $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n, поништавају се сви чланови у суми, изузев првог и последњег, што даје резултат $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

26. Нека је низ x_n задат са

$$6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n$$
$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n.$$

Решење. Лако се проверава да је $x_n = 20(\frac{1}{2})^n - 27(\frac{1}{3})^n$. Стога, посматрани ред можемо видети као линеарну комбинацију два конвергентна геометријска реда (за $q = -\frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{3}$), чије суме лако можемо лако израчунати ако искористимо претходни задатак (напомена: потребна је мала модификација јер сума креће од $n = 1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, за $|q| < 1$). Коначно, тражена сума реда је $\frac{1}{12}$.

27. Нека је низ x_n задат са

$$4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n,$$
$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

и сумирати га ако конвергира.

Решење. Опште решење диференцне једначине је $x_n = C_1(\frac{1}{2})^n + C_2 n(\frac{1}{2})^n$, при чему се константе C_1, C_2 одређују из почетних услова. Међутим, већ одавде је јасно да је $\frac{x_n}{n} \in O(\frac{1}{2^n})$ кад $n \to \infty$, па закључујемо на основу поредбеног критеријума да посматрани ред конвергира. Додатним израчунавањем налазимо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, па је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

28. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$, за $|q| < 1$.

Решење. Израчунајмо најпре n-ту парцијалну суму реда. Множењем $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kq^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n, поништавају се одређени чланови у суми и као резултат имамо $S_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} q^k) - nq^{n+1} = \frac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

29. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]$.

Решење. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}] = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})] = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$. Сума реда је лимес низа парцијалних телескопских сума и једнака је: $S = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1) = 1-\sqrt{2}$.

30. Сумирати ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Решење. Посматрајмо суме $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ и $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$: $S_1+iS_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{cis(\frac{2n\pi}{3})}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2})^n = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1-\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}} = \frac{5}{7}+i\frac{\sqrt{3}}{7}$.

31. Наћи вредност бесконачног производа $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$.

Решење. Како је по дефиницији $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$, то на основу задатка са часа у првој недељи наставе знамо да је тражена вредност заправо $\frac{1}{2}$. Поновимо ипак тај рачун, раније изведен: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=2}^{k}(1-\frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=2}^{k}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\dots\cdot\frac{(k-2)\cdot k}{(k-1)\cdot(k-1)}\cdot\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$.

32. Наћи вредност бесконачног производа $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

Решење. Како је по дефиницији $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)}$, довољно је резултат са часа одржаног прве недеље интерпретирати у терминима бесконачних производа и доћи до закључка да је тражена вредност $\frac{2}{3}$. Рачун се може проверити и следећим начином: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1} = \prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n+\omega)(n+\omega^2)}{(n-1)(n-\omega)(n-\omega^2)} = \prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1-\omega)(n-1-\omega^2)}{(n-1)(n-\omega)(n-\omega^2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(1-\omega)(1-\omega^2)}{1\cdot2(n-\omega)(n-\omega^2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(1+\frac{1}{n})}{2(1-\frac{\omega}{n})(1-\frac{\omega^2}{n})} = \frac{3}{2}$.

33. Сумирати ред
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Решење. Нека је $a_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$. Очигледно, неопходан услов конвергенције реда је задовољен, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ред конвергира по поредбеном критеријуму, поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}$. Разлагањем полинома n^4+n^2+1 се добија да је $a_n = \frac{1}{2(n^2-n+1)} - \frac{1}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2}(b_n - b_{n+1})$, за $b_n = \frac{1}{n^2-n+1}$, то је $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_N = \lim\limits_{n\to\infty}(b_1 - b_{N+1}) = \frac{1}{2}$.

34. Сумирати ред
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}.$$

Решење. Најпре, ово је ред са позитивним члановима и он је еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n^2}$. Ово важи јер је $\operatorname{arctg} \sim x$, $x \to 0$. Уведимо ознаку $a_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Приметимо да важи

$$\operatorname{tg}(a_{n+1}-a_{n-1}) = \frac{\operatorname{tg} a_{n+1} - \operatorname{tg} a_{n-1}}{1 + \operatorname{tg} a_{n+1} \cdot \operatorname{tg} a_{n-1}} = \frac{2}{n^2} \implies \overbrace{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(a_{n+1}-a_{n-1})\right)}^{=\, a_{n+1}-a_{n-1}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Дакле, имамо да је
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}).$$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ произвољно. Тада је

$$\sum_{n=1}^{m} (a_{n+1}-a_{n-1}) = a_{m+1}+a_{m-1}-a_1-a_0 \implies \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_{n+1}-a_{n-1}) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-0 = \frac{3\pi}{4}.$$

Теорема (Кошијев став)**.** Нека је a_n опадајући низ позитивних чланова. Тада су редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквиконвергентни.

35. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$.

Решење. Применом Кошијевог става налазимо да је посматрани ред еквиконвергентан геометријском реду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ који конвергира за $\alpha > 1$.

36. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ако је

- $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
- $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Решење. Како је $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $n \to \infty$, то први ред дивергира ($\frac{1}{2} < 1$), а други ред, чији општи члан је $\sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, $n \to \infty$, конвергира јер је $\frac{3}{2} > 1$.

Теорема (Даламберов тест)**.** Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. За $l < 1$ ред конвергра, а за $l > 1$ дивергира.

37. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Решење. Конвергира по Даламберу: $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$.

38. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Решење. Конвергира по Даламберу: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$.

39. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Решење. Дивергира по Даламберу: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$.

Теорема (Кошијев тест)**.** Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

40. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$.

Решење. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n+1})^{(\frac{-(n+1)}{2})(\frac{n-1}{-2(n+1)})} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$, ред конвергира по Коширу.

41. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

Решење. Конвергира по Коширу: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n+3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{n^5}{1+(\frac{2}{3})^n}} = \frac{1}{3} < 1$.

42. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ако је

- $a_n = \frac{e^n+n^5}{3^n+\ln(n^{10}+1)} \sin(\frac{1}{n})$,
- $a_n = \frac{\arctan n}{n^a}$, за $a \geqslant 1$.

Решење. Како је $a_n \sim \frac{1}{n}(\frac{e}{3})^n$, $n \to \infty$, то први ред конвергира, а други ред, чији општи члан је заправо једнак $\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{1}{n})}{n^2}$, конвергира за $a > 1$ као сума два конвергентна реда, а дивергира за $a = 1$ као сума конвергентног и дивергентног реда.

43. Чланови низа (a_n) задовољавају рекурентну формулу

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}, \text{за } n \geqslant 3.$$

Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{a_n^2}{2} = \frac{\pi}{12},$$

ако је $a_1 = 2$, $a_2 = 8$.

Решење. Решење посматране рекурентне једначине је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(a^n - \frac{1}{a^n}), \text{ za } a = 2 + \sqrt{3}.$$

Лако се провери да онда важи идентитет

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2}{1 + a_n a_{n+1}} = 4,$$

што је са друге стране једнако $\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}$, одакле се добија релација

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2-a_n}{1+a_na_{n+1}}.$$

Индукцијом (уз кори71ење добијене релације) се показује да је

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^{-1}a_k^2=\cot^{-1}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\cot^{-1}a=\frac{\pi}{12}.$$

44. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1})$.

Решење.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Како је

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{k},$$

то је

$$S=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2n-1}}{n}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}+2\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{2}+2\ln 2.$$

45. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^3}$.

Решење. Представљањем општег члана реда у експоненцијалном облику, кад $n\to\infty$, је $a_n=e^{n^3\ln(n\sin\frac{1}{n})}=e^{n^3\ln(n(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})))}=e^{n^3\ln(1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}=e^{n^3(-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}=e^{-\frac{n}{6}}$. Како геометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n}{6}}$ конвергира, то конвергира и полазни ред.

Теорема (Кошијев интегрални критеријум)**.** Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x\geqslant 1$ и $a_n=f(n)$. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира акко конвергира несвојствени интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}f(x)dx$.

46. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

Решење. $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = 1 + \frac{\ln n}{n^2+1} + o(\frac{\ln n}{n^2+1}) - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1}(1+o(1))$, $n \to \infty$. Дакле, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$, $n \to \infty$. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ конвергира на основу интегралног критеријума: $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\infty} + \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$, па и полазни ред конвергира.

47. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^{\alpha}}$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решење. Ред очигледно дивергира за $\alpha \leqslant 0$. Нека је зато $\alpha > 0$. Дати ред је еквиконвергентан реду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, који је према Кошијевом интегралном критеријуму еквиконвергентан са несвојственим интегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx$. За $\alpha = 1$, применом парцијалне интеграције се добија да интеграл дивергира. За $\alpha < 1$ интеграл дивергира по поредбеном критеријуму. Нека је $\alpha > 1$. Тада имамо $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{\ln x}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^b - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}}dx) = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{\ln b}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}$. Дакле, полазни ред конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leqslant 1$.

48. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^{\alpha}}$.

Решење. Полазни ред је еквиконвергентан са интегралом $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln\ln(x))^{\alpha}}$, који је, након смене $t = \ln(\ln x)$, једнак са $\int\limits_{\ln(\ln 3)}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$. Овај интеграл конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leqslant 1$, па по Кошијевом интегрално критеријуму исто важи и за посматрани ред.

Теорема (Рабеов тест)**.** Нека за ред са позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$. За $l > 1$ ред конвергира, а за $l < 1$ ред дивергира.

49. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

Решење. Како је $\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1} e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1} e^{(n+p)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n}))} = 1 + \frac{p-\frac{1}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, кад $n \to \infty$, то ред конвергира по Рабеу за $p > \frac{3}{2}$.

50. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$.

Решење. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+\frac{p}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{q+1} = (1-\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n}))(1+\frac{q+1}{n}+o(\frac{1}{n})) = 1 + \frac{q+1-p}{n} + o(\frac{1}{n})$, кад $n \to \infty$, па ред конвергира по Рабеу за $q > p$.

51. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\big]^p \frac{1}{n^q}$.

Решење. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q+\frac{p}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Рабеу за $q + \frac{p}{2} > 1$.

Теорема (Гаусов тест)**.** Нека за ред са позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$. За $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$ ред конвергира, а за $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \leqslant 1$ ред дивергира.

52. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$, где су $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$.

Решење. Имамо да важи $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\gamma}{n})}{(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\beta}{n})}$. Како је $(1+\frac{\alpha}{n})^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{n^2}$ и $(1+\frac{\beta}{n})^{-1} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{n^2}$, то за $\gamma > \alpha + \beta$ ред конвергира, а дивергира за $\gamma \leqslant \alpha + \beta$ по Гаусу.

Теорема (Лајбницов тест)**.** Ако је $a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, онда алтернативни ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира.

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Сваки апсолутно конвергентан ред је и конвергентан, а обратно не важи.

53. Испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n}$.

Решење. Конвергира по Лајбницу будући да је $\frac{\ln^2(n)}{n}$ опадајући низ који тежи 0 кад $n \to \infty$, а дивергира апсолутно (јер се у том случају добија хармонијски дивергентан ред).

54. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

Решење. $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n) = (-1)^n \sin(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}) = (-1)^n a_n$, при чему је a_n опадајући низ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема (Абелов тест)**.** Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако конвергира $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и низ b_n је монотоно ограничен.

Теорема (Дирихлеов тест)**.** Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако низ b_n монотоно тежи нули почев од неког члана и низ парцијалних сума реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ је ограничен.

55. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Решење. Конвергира као сума конвергентних редова: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1-\cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}$. Први ред је Лајбниц-конвергентан јер $\frac{1}{2n}$ опадајуће тежи нули, а други ред конвергира поређењем са конвергентним редом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\cos(2n)}{2n},$$

$$S_N = \frac{(-1)^N}{2N}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin(2N+1)}{2\sin 1}\right) - \sum_{n=1}^{N-1}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin(2n+1)}{2\sin 1}\right)\left(-\frac{(-1)^n}{2n+2}-\frac{(-1)^n}{2n}\right)\right],$$

$$S_N = \frac{(-1)^N}{2N}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin(2N+1)}{2\sin 1}\right) + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)} - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)}{4n(n+1)\sin 1}$$

56. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Решење. Приметимо да је $\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ конвергира по Лајбницовом критеријуму, а низ $\cos\frac{\pi}{n+1}$ је монотон и ограничен, па полазни ред конвергира по Абеловом критеријуму.

57. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$.

Решење. Како је $a_n = \frac{1}{n}$ опадајући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ је ограничен: $|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\sin k^2| = \frac{1}{2}|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(k-1)-\cos k(k+1)| = \frac{|1-\cos(n+1)n|}{2} \leqslant 1$, то ред конвергира по Дирихлеовом критеријуму.

58. Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира ($a_n \geqslant 0$), онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha}$ за $\alpha \geqslant 1$.

Решење. Општи члан реда тежи нули, па је ограничен са 1. Ред конвергира по поредбеном критеријуму.

59. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

Решење. Применом Кошијеве неједнакости и претходног задатка, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

60. Доказати да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$

Решење. Производ редова $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ (на основу формуле за Кошијево множење) је ред са општим чланом $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, односно $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}1^k=(1+(-1))^n$, што је 0 за $n>0$, а 1 за $n=0$.

61. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Решење. Неједнакост $|\sin x|>\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ важи акко $\frac{1}{8}<\{\frac{x}{\pi}\}<\frac{7}{8}$. Како је $\frac{1}{4}<\frac{1}{\pi}$, следи да је за свако n, или $|\sin n|$ или $|\sin(n+1)|$ веће од $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Стога,

$$\frac{|\sin(n)|}{n}+\frac{|\sin(n+1)|}{n+1}\geqslant\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\frac{1}{n+1}.$$

На основу поредбеног критеријума следи да ред апсолутно дивергира. Испитајмо обичну конвергенцију. Низ са општим чланом $\frac{1}{n}$ опадајуће тежи 0 кад $n\to\infty$, а на основу адиционе формуле важи процена

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin k|=\frac{|\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{1}{2}\sin k|}{|2\sin\frac{1}{2}|}=\frac{|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(k-\frac{1}{2})-\cos(k+\frac{1}{2})|}{|2\sin\frac{1}{2}|}=\frac{|1-\cos(n+\frac{1}{2})|}{|2\sin\frac{1}{2}|},$$

одакле се применом неједнакости троугла добија

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin k|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

те ред условно конвергира по Дирихлеу.

62. У зависности од параметра $a\in\mathbb{R}$ испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^a}.$$

Напомена 1. Октобарски испитни рок, Математика 3 Ц, 2018/2019.

Решење. Уколико је $a=0$ ред није добро дефинисан. Уколико је $a<0$ тада општи члан овог реда тежи ка броју 1 када $n\to+\infty$, што значи да ред не конвергира. Нека је $a>0$. Апсолутна вредност општег члана нашег реда се асимптотски понаша као $\frac{1}{n^a}$, те имамо да ред апсолутно конвергира ако и само ако је $a > 1$ те у том случају имамо и обичну конвергенцију. Испитајмо шта се дешава када $a \in (0,1)$. Имамо да је

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^a} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^a}\cdot\frac{(-1)^n-n^a}{(-1)^n-n^a} = \frac{1-(-1)^n n^a}{1-n^{2a}} = \frac{1}{1-n^{2a}} - (-1)^n\frac{n^a}{1-n^{2a}}.$$

Ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^a}{1-n^{2a}}$ конвергира за свако $a \in (0,1)$ на основу Лајбницовог критеријума. То значи да је конвергенција полазног реда еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{1-n^{2a}}$ а конвергенција овог реда је еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{2a}}$. Овај ред је конвергентан ако и само ако је $2a > 1$ тј. ако и само ако је $a > \frac{1}{2}$. Дакле, ако је $a \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ полазни ред конвергира, а ако је $a \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ полазни ред дивергира.

63. Нека је

$$\begin{aligned} x_1 &= a > 0, \\ x_{n+1} &= \frac{x_n}{1+x_n+x_n^2}, n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $x_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такође, очигледно важи $x_{n+1} < x_n$. Дакле, низ је опадајући и ограничен одоздо, па конвергира. Преласком на лимес се добија да тежи 0, па посматрани ред условно конвергира по Лајбницовом критеријуму. Ред апсолутно дивергира, јер се применом Штолцовог става добија:

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\tfrac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{1+x_n} = 1,$$

односно $x_n \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$.

64. Нека за $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $p > 0$ важи

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty.$$

Доказати да тада a_n монотоно тежи нули и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ конвергира.

Решење. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = p$, то из дефиниције лимеса следи

$$\frac{p-\varepsilon}{n} + 1 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{p+\varepsilon}{n} + 1, \text{за свако } \varepsilon > 0 \text{и све } n \geqslant n_0.$$

Множењем одговарајућих неједнакости за индексе $n_0, n_0+1, \dots n$, добија се

$$\frac{a_{n_0}}{a_{n+1}} \geqslant 1 + (p-\varepsilon)\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Како је одатле

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{1 + (p-\varepsilon)\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)},$$

а хармонијски ред дивергира, то следи

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0,$$

па конвергенција полазног реда следи по Лајбницовом критеријуму.

65. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$.

Решење. Како је

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha - n},$$

то су a_n и a_{n+1} супритног знака за $n \geqslant \alpha$. Имамо

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\alpha+1}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) = 1 + \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty.$$

За $\alpha > -1$ ред конвергира по Лајбницу, а иначе дивергира јер не задовољава неопходан услов конвергенције.

66. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$.

Решење. Ред је сталног знака, па је апсолутна конвергенција еквивалентна обичној. Како је

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty.$$

По Гаусу, ред конвергира за $\alpha > 0$, а иначе дивергира.

1.4 Степени редови

Степени ред

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

се унутар своје области конвергенције (скупа свих x за које $f(x)$ конвергира) може диференцирати и интегралити члан по члан, при чему се радијус конвергенције

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

односно
$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$
не мења.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R},$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R},$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1,1],$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{за} \begin{cases} x \in [-1,1], \alpha > 0, \\ x \in (-1,1], \alpha \in (-1,0], \\ x \in (-1,1), \alpha \leqslant -1. \end{cases}$$

67. Одредити полупречнике конвергенције редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{n2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n z^{3n}$.

Решење. Полупречници конвергенције посматраних степених редова су редом $R = 1$, $R = \sqrt{2}$, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

68. Одредити области конвергенције редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+1}(x-1)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Решење. Полупречници конвергенције посматраних степених редова су редом $R = 1$, $R = \frac{1}{3}$.
Треба још испитати конвергенцију у крајњим тачкама.
Први ред конвергира за $x = 0$ по Лајбницу, а дивергира за $x = 2$, па је његова област конвергенције $[0, 2)$.
Други ред конвергира за $x = -\frac{4}{3}$ као сума два конвергентна реда, а за $x = -\frac{2}{3}$ дивергира као сума дивергентног и конвергентног реда, па је његова област конвергенције $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

69. Развити $\sin^3 x$ у степени ред.

Решење. Искористити идентитет $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ и развој $\sin x$ у степени ред.

70. Развити $\sinh x$ и $\cosh x$ у степени ред.

Решење. Искористити $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, као и $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и развој e^x у степени ред.

71. Доказати да је $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$.

Решење. Користеци представљање функције $\frac{1}{1-x}$ преко степеног реда и диференцирањем члан по члан у области конвергенције, следи тражено.

72. Развити $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ у степени ред.

Решење. Како је $f(x) = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$, то је $f(x) = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^n)x^n$.

73. Функцију $\arctan x$ развити у степени ред, па користећи добијени развој наћи суму бројног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

Решење. Како се степени ред може интегралити у области конвергенције, а важи

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x t^{2n}dt,$$

то следи $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, што важи за $x \in [-1, 1]$. Специјално, за $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ добија се сума бројног реда.

74. Наћи суме редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решење. Степени ред се може диференцирати члан по члан у области конвергенције:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Интеграцијом последење једнакости се добија

$$\int\limits_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Како је $g'(x) = -\ln(1-x)$, применом парцијалне интеграције на

$$\int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = -\int_0^x \ln(1-t)dt,$$

добија се да је сума другог реда једнака $x + (1-x)\ln(1-x)$.

75. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

Решење. Развијањем функције $\ln(1+x)$ у степени ред и интеграљењем члан по члан у области конвергенције, добија се вредност интеграла.

76. Нека је x реалан број. Дефинишимо низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ рекурзивно са

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= x^n + nx_n, \text{за } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Доказати да је

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}) = e^{-x}.$$

Решење. Одредимо n-ту парцијални производ користећи рекурентну формулу

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{x^k}{x_{k+1}}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1} - x^k}{x_{k+1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{kx_k}{x_{k+1}} = \frac{n!}{x_{n+1}}.$$

Како је

$$\frac{1}{P_{n+1}} - \frac{1}{P_n} = \frac{x_{n+2}}{(n+1)!} - \frac{x_{n+1}}{n!} = \frac{x_{n+2} - (n+1)x_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{за } n \geqslant 1,$$

имамо

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!},$$

при чему последњи израз конвергира ка e^x кад $n \to \infty$. Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-x}.$$

Нека ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира. Тада се његова сума може наћи по формули

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

77. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

Решење. Сума реда $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ је xe^{2x}. Диференцирањем члан по члан (што је дозвољено у области конвергенције) и пуштањем лимеса кад $x \to 1-0$, добија се $S = 3e^2$.

78. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

Решење. Посматрајмо степени ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2}$. Област конвергенције овог реда је $[-1, 1]$, што се лако провери. Након краћег рачуна, добија се

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+2} = x \ln(1+x) + \frac{\ln(1+x)}{3x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} - \frac{x}{9}.$$

Узимајући $x = 1$, следи $S = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}$.

1.5 Примена степених редова у теорији диференцијалних једначина

Функција је аналитичка у некој тачки ако се може представити у облику конвергентног степеног реда у околини те тачке.
Нека је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ аналитичка функција у некој околини тачке (x_0, y_0, y_0'). Тада постоји јединствено решење Кошијевог задатка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, дефинисано у некој околини тачке x_0 и оно је аналитичка функција у тој околини.
Посматрајмо диференцијалну једначину $y''(x) + p_1(x)y + p_2(x)y = 0$. Тачка x_0 је регуларна тачка диференцијалне једначине ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки. Тачка x_0 је сингуларна тачка диференцијалне једначине ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тачки x_0.
Ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке функције у области $|x - x_0| < R$, тада је свако решење диференцијалне једначине јединствена аналитицка функција у овој области.

79. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.

Решење. Тривијално се провери диференцирањем степеног реда члан по члан.

80. Методом неодређених коефицијената одредити у облику степеног реда решење Кошијевог задатка $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$.

Решење. Означимо решење $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y'(x) - x^2 - e^{y(x)} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} - x^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k).$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$0 \equiv a_1 - 1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - 1 - a_2 - \frac{a_1^2}{2})x^2 + \dots$$

одакле је

$$y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \dots .$$

81. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y'' - xy = 0$ које се може приказати у облику степпеног реда по степенима x и које задовољава почетне услове $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Како је $y(0) = 1$, то је $a_0 = 1$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) - xy(x) = a_2 + (3 \cdot 2a_3 - 1)x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1})x^k.$$

Изједначавањем коефицијенат уз x^k, добија се

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots ((3n-1) \cdot 3n)}.$$

82. Решити диференцијалну једначину $y'' - x^2 y = 0$.

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диеференцирањем степеног реда члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) - x^2 y(x) = 2a_2 + (3 \cdot 2a_3)x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-2})x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 4k(4k-1)} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdots (4k+1)4k},$$

где су $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

83. Методом степених редова одредити Кошијево решење у коначном облику једначине $y'' - xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем степеног реда члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = (2a_2 - 2a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+2)((k+1)a_{k+2} - a_k)x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

84. У области $|x| < 1$ одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0.$$

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференци

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv (1-x^2)y''(x)-6xy'(x)-4y(x) = (a_2-4a_0)+(6a_3-10a_1)+\sum_{k=2}^{\infty}((k+2)(k+1)a_{k+2}-(k+1)(k+4)a_k)x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k} + \frac{a_1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+3)x^{2k+1}.$$

85. Представити степеним редом опште решење нехомогене диференцијалне једначине

$$y'' + x^2 y = 1 + x + x^2.$$

Решење. Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у диференцијалну једначину имамо

$$0 \equiv y''(x) + x^2 y(x) - 1 - x - x^2.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1-a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^{+} \ldots,$$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

Сингуларну тачку x_0 зовемо регуларно-сингуларно тачком ако су функције $(x-x_0)p_1(x)$ и $(x-x_0)^2 p_2(x)$ аналитичке у тој тачки.

86. Испитати регуларност тачке $x = 0$ за $2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$.

Решење. $x = 0$ је регуларно-сингуларна тачка.

87. Развити функцију $f(x) = \arcsin x$ у степени ред.

Решење. Како је $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$ (при чему је $R = 1$), то интеграљењем степеног реда у области конвергенције добијамо развој посматране функције у степени ред $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$, при чему се радијус конвергенције није променио интеграцијом. Додатно се испита, да за $x = \pm 1$ ред такође конвергира, па развој важи на $[-1, 1]$.

1.6 Функционални редови

88. Испитати равномерну конвергенцију следећих низова на указаним скуповима

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2} \text{на [-1,1]}$$

$$f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n+x}} \text{на} [0, \infty).$$

Решење. Гранична функција за први низ је $f(x) = 1$, а како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{n^2}{n^2 + x^2} - 1|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{x^2}{x^2 + n^2}|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + n^2} = 0,$$

задати низ је равномерно конвергентан на $[-1, 1]$. Грнична функција за други низ је 0, а како је $0 \leqslant \frac{\arctan nx}{\sqrt{n+x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty$, то је и овај низа равномерно конвергентан за $x > 0$.

89. Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0, 1]$, а да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Решење.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} nx(1-x)^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1} = e^{-1} \neq 0.$$

90. Доказати да је низ функција

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$$

равномерно конвергентан ка $f(x) = 1$ на сегменту $[0, 1]$. Да ли је низ равномерно конвергентан функцији f на целој реалној правој?

Решење. Низ је равномерно конвергентан посматраној функцији на сегменту $[0, 1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |\frac{nx + x^2 + n^2}{n^2 + x^2} - 1|,$$

а како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{nx}{x^2 + n^2}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

низ је неравномерно конвергентан истој функцији на реалној правој.

91. Испитати равномерну конвергенцију функционалног низа $f_n(x) = e^{n\frac{1-x}{x}}$ на скуповима $E_1 = (1, \infty)$, $E_2 = (\delta, \infty), \delta > 1$.

Решење. Како је $\sup_{x\in E_1} |f_n(x)| = f_n(1) = 1 \neq 0$, то је низ неравномерно конвергентан нули на првом скупу, а како $\sup_{x\in E_2} |f_n(x)| = f_n(\delta) \to 0$, кад $n \to \infty$, то је равномерно конвергентан на другом скупу.

92. Одредити област конвергенције функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n 2^{nx}.$$

Решење. Применимо Кошијев критеријум. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) 2^x = 2^x,$$

добијамо да је ред конвергентан за свако $x < 0$, а дивергентан за свако $x > 0$. Испитајмо посебно конвергенцију реда у случају $x = 0$. Тада је ред облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, па дивергира јер није задовољен неопходан услов конвергенције ($\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \neq 0$).

93. Испитати апсолутну и условну конвергенију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n}.$$

Решење. Претпоставимо најпре да је $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тада је (на основу Кошијевог критеријума) ред конвергентан за свако $|x| < 1$, што следи из

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+y^n}} = |x| < 1.$$

Нека је $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$. Тада је

$$\frac{x^n}{n+y^n} \geqslant \frac{x^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1},$$

па ред дивергира на основу првог поредбеног критеријума (поређењем са дивергентним хармонијским редом). Ако је $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x = -1$, добија се ред који условно конвергира по Лајбницу (а апсолутно дивергира). Испитајмо сада ред за $y > 1$. Напишимо ред у облику

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{y})^n \frac{1}{1+ny^{-n}}.$$

Ако је $|x| < y$, ред је конвергентан на основу Кошијевог критеријума, јер је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{x}{y})^n \frac{1}{1+ny^{-n}}} = \frac{|x|}{y} < 1.$$

Ако је $x = \pm y$, тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{1+y^n} = 1,$$

па ред дивергира јер општи члан не тежи нули. На основу свега претходног, може се закључити следеће: ред је апсолутно конвергентан ако је ($0 \leqslant y \leqslant 1$ и $|x| < 1$) или ($|x| < y$ и $y > 1$.) Ако је $x = -1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, ред је условно конвергентан.

94. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$$

на скупу

- $(0, \infty)$
- (δ, ∞), $\delta > 0$.

Решење. Лако се проверава да је парцијална сума реда $S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$, а сума задатог реда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |\frac{1}{1+nx}| = 1,$$

ред је неравномерно конвергентан суми $S(x)$ на скупу $(0, \infty)$. Како важи неједнакост $nx > n\delta$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(\delta,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n\delta} = 0,$$

то је ред рвномерно конвергентан сум $S(x)$ на скупу (δ, ∞).

95. Испитати конвергенцију и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на скупу E, где је

$$f_n(x) = e^{-n^2x^2}\sin nx,\ \ E = \mathbb{R},$$

$$f_n(x) = \arctan\frac{x^3}{n\sqrt{n}},\ \ E = [0,\infty)$$

.

Решење. Испитајмо први ред. Приметимо најпре да је $f_n(0) = 0$. Ако је $x \neq 0$, тада је

$$|f_n(x)| \leqslant e^{-n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2x^2}.$$

Дакле, ред је конвергентан на реалној правој. Међутим, ред не конвергира равномерно на $\mathbb{R}$, што се види на примеру $x = x_n = \frac{1}{n}$, јер је тада $f_n(x_n) = e^{-1}\sin 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Други ред је конвергентан на скупу E ка граничној функцији $f(x) = 0$, што је последица неједнакости $\arctan x \leqslant x$, $x \geqslant 0$. Узимајући $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ имамо да је $f_n(x_n) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, одакле на основу Кошијеве теореме закључујемо да општи члан није равномерно конвергентан, па ни сам ред.

Теорема (Вајерштрасов критеријум)**.** Ако постоји низ ненегативних реалних бројева $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да
1. постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leqslant c_n$,
2. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,

тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.

96. Доказати да је сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Вајерштрасовим критеријумом (поређењем са конвергентним бројним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) се показује да ред равномерно конвергира, па је и сума реда непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

97. Одредити област дефинисаности и испитати непрекидност функције

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x^2 + \frac{1}{n})^n.$$

Решење. Област дефинисаности одредићемо помоћу Кошијевог критеријума. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(x^2+\frac{1}{n})^n} = x^2,$$

ред ће конвергирати за $x^2 < 1$, а дивергирати за $x^2 > 1$. За $x = \pm 1$ ред је дивергентан јер није задовољен неопходан услов конвергенције. Дакле, област дефинисаности је $(-1,1)$. Да бисмо испитали непрекидност функције, неопходно је одредити област равномерне конвергенције реда. Докажимо да је ред равномерно конвергентан на сваком сегменту $[-a,a]$, $a \in (0,1)$. Нека је b произвољан број такав да $0 < a < b < 1$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geqslant n_0$ важи $a + \frac{1}{\sqrt{n}} < b$. Тада за све $n \geqslant n_0$ и свако $|x| \leqslant a$, важи

$$(x^2+\frac{1}{n}) \leqslant (|x| + \frac{1}{\sqrt{n}})^{2n} \leqslant b^{2n}.$$

Како је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^{2n}$ конвергентан јер $b^2 < 1$, то је по Вајерштрасовом критеријуму ред којим је дефинисана функција $f(x)$ равномерно конвергентан. Стога је $f(x)$ непрекидна на $[-a,a]$, а због произвољности броја a, то је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $(-1,1)$.

98. Користећи Вајерштрасов критеријум, доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^2x)\cos(n\pi x)}{n\sqrt{n}}$$

равномерно конвергентан на $\mathbb{R}$ и да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x}{n\ln^2(n+1)})$$

равномерно конвергентан на $[0,2]$.

Решење. Да је први ред равномерно конвергентан на реалној правој добија се поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ уз кори71ење чињенице да су $\arctan$ и $\cos$ ограничене функције. За други ред, добија се да је ред равномерно конвергентан за $x \in [0,2]$ на основу неједнакости $\ln(1+t) \leqslant t$ за $t \geqslant 0$ и због конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ (по Кошијевом интегралном критеријуму).

99. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2x}{x+n^3}\ln(1+\frac{x^2}{n})$$

на скуповима

$$E_1 = (0,1),$$
$$E_2 = (1,\infty).$$

Решење. Равномерно конвергира на E_1 по Вајерштасовом критеријуму (поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^3}\frac{1}{n}$) и неравномерно на E_2, што се види за $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ јер тада није задовољена Кошијева теорема.

100. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-x^2n^6} \sin(n^3x)$ на скуповима $(0,\infty)$,(δ,∞), $\delta > 0$.

Решење. Како је $f_n(\frac{1}{n^3}) = \frac{\sin 1}{e} > 0$, ред не конвергира равномерно на скупу E_1. Због $|f_n(x)| < \frac{1}{\delta^2 n^6}$, ред равномерно конвергира на другом скупу по Вајерштрасовом критеријуму.

101. Дат је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^\alpha}{n(n+1)(n+2)} x^n$.
1. Испитати условну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда.
2. За $x = 1$, $\alpha = 1$ сумирати ред.

Решење. Полупречник конвергенције задатог степеног реда је

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1,$$

па је ред апсолутно конвергентан на $(-1, 1)$. Испитајмо понашање реда на крајевима интервала конвергенције. Ако је $x = 1$, применом Рабеовог критеријума се добија да ред конвергира за $\alpha < 2$, док дивергира за $\alpha > 2$:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = 3 - \alpha.$$

За $\alpha = 2$, ред је дивергентан јер се понаша као хармонијски ред. Ако је $x = -1$, тад имамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Низ b_n тежи нули за $\alpha < 3$ и тад је монотоно опадајући, па конвергира по Лајбницовом критеријуму. Дакле, за $\alpha < 2$ ред је апсолутно и равномерно конвергентан на $[-1, 1]$, док је за $x = -1$ и $2 \leqslant \alpha < 3$ ред условно конвергентан.
2. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4}$. Тражена сума је 2.

Теорема (Дирихлеов критеријум)**.** Нека
1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K, таква да је за све $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leqslant K$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који равномерно конвергира нули.
Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

102. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ на $\mathbb{R}$.

Решење. Дирихлеовим критеријумом се показује да ред равномерно конвергира. Низ $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$ равномерно конвергира ка 0 на реалној правој и

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx| = |\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x(\cos\frac{(k+1)x}{2} - \cos\frac{(k-1)x}{2})}{2sin\frac{x}{2}}| = |\cos\frac{x}{2}||\cos\frac{(n+1)x}{2} - 1| \leqslant 2.$$

Теорема (Абелов критеријум)**.** Нека:

1. Функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbb{R}$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbb{R}$ важи $|a_n(x)| \leqslant K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

103. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}(1+\frac{x}{n})^n$ на $[0,1]$.

Решење. Абеловим критеријумом се показује да ред равномерно конвергира. Низ $(1+\frac{x}{n})^n$ је монотон за свако фиксирано $x \in [0,1]$. Како је

$$(1+\frac{x}{n})^n \leqslant (1+\frac{1}{n})^n < e,$$

за свако $x \in [0,1]$, низ је равномерно ограничен на $[0,1]$. Осим тога, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ је равномерно конвергентан на $[0,1]$ према Дирихлеовом критеријуму, јер је низ $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ опадајући и равномерно конвергентан на скупу $[0,1]$, а парцијалне суме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ су равномерно ограничене на скупу E.

104. Наћи $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$.

Решење. Задати ред је равномерно конвергентан за свако $x \geqslant 0$ по Абеловом критеријуму. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ је равномерно конвергентан по Лајбницу , а низ $\frac{x^n}{1+x^n}$ је монотоно растући и ограничен одозго са 1 за свако $x \geqslant 1$. Притом, постоји гранична вредност $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, па лимес и сума могу заменити места

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Резултат: $\frac{\ln 2}{2}$.

Теорема. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интеграбилних на сегменту $[a,b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интеграбилна функција и важи

$$\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

Теорема. Ако је свака од функција $a_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ диференцијабилна и ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно конвергира на $[a,b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира у бар једној тачки $x_0 \in [a,b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a,b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ за $x \in [a,b]$.

105. Дат је функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{n^2}x}{a^{n^2}}$. Одредити за које вредности параметра a:

- функционални ред конвергира
- сума реда представља непрекидну функцију
- ред може да се диференцира члан по члан

Решење.

- Како је$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{a^{n^2}}$, а бројни ред ковергира за $a > 1$ према Даламберу, то на основу Вајерштрасовог критеријума ред равномерно конвергира за $a > 1$. За $a \leqslant 1$ општи члан не тежи нули, па у том случају ред конвергира.
- За $a > 1$ ред је равномено конвергентан и чува непрекидност.
- Како је $|f_n'(x)| \leqslant (\frac{2}{a})^{n^2}$, абројни поредбени ред конвергира по Даламберу за $a > 2$, то се ред може диференцирати члан по члан за такве a.

106. Израчунати $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}xe^{-nx})dx$.

Решење. Како је $|f_n(x)| \leqslant f_n(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e(n-1)!}$, а бројни ред конвергира, то је посматрани функционални ред равномерно конвергентан на $[0, \infty)$ и интеграл и ред могу заменити места: $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \int\limits_0^1 x e^{-nx} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}(1+n)}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n!}$.
Коначно, сума реда је $e - e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e}$.

107. Представити интеграл $\int\limits_0^1 x^{-x} dx$ у облику реда.

Решење. Како је $x^{-x} = e^{-x \ln x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!}$, а функција $|x \ln x|$ достиже максимум e^{-1}, то је ред равномерно конвергентан по Вајерштрасовом критеријуму. Дакле, може се интегралити члан по члан на $(0, 1]$. Како је

$$\int\limits_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

то је

$$\int\limits_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

108. Разложити Лапласов интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$ у степени ред по степенима $b > 0$, користећи чињеницу да је $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Решење. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2bx)^n}{(2n)!} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2b)^{2n}}{(2n)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2b)^{2n}}{(2n)!} I_n$.
Парцијалном интеграцијом се налази $I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$ уз почетни услов $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, одакле је $I_n = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. Следи $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$. Оправданост интеграције следи из равномерне конвергенције реда на произвољном сегменту $[0, A]$.

109. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{1+e^x} dx$.

Решење. $I = \int\limits_0^{\infty} x \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\frac{1}{n^2} - \frac{(nx+1)e^{-nx}}{n^2} |_0^{\infty}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
Редови и интеграл могу заменити места јер се ради о равномерно конвергентним редовима за $x > 0$.

1.7 Фуријеови редови

Систем функција $\frac{1}{2}, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, k \in \mathbb{N}, x \in [-l, l]$, се назива основним тригонометријским системом. Он је ортогоналан на $[-l, l]$. Нека је $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ интеграбилна функција на $[-l, l]$. Бројеви

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

се зову Фуријеови коефицијенти функције f у односу на основни тригонометријски систем. Тригонометријски ред $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l})$ је Фуријеов ред функције f.
Нека је део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ са периодом $2l$ продужена на целу бројну праву. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ ка вредности $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.
Ако део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ још задовољава и једнакост $f(-l) = f(l)$, онда њен тригонометријски Фуријеов ред конвергира равномерно на том сегменту и његова сума је једнака $f(x)$ за свако $x \in [-l, l]$.
Фуријеов ред Риман-интерграбилне функције на сегменту $[-l, l]$ се може на том сегменту интегралити члан по члан.
Нека $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l), f'(-l) = f'(l), \dots\ f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$. Нека поред тога функција f има на сегменту $[-l, l]$ део по део непрекидан извод реда $m + 1$. Тада:
1. конвергира бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{k\pi}{l})^m(|a_k| + |b_k|)$,
2.Фуријеов ред такве функције можемо на датом сегменту диференцирати члан по члан m пута.

110. Нека је $c \in \mathbb{R}$, $l > 0$ и $0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \dots$ низ решења једначине $\tan l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin\xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ортогоналан у $C[0, l]$.

Решење. Треба показати да је $\int\limits_0^l \sin\xi_n x\sin\xi_m x dx = 0$ за $n \neq m$ и да је $\int\limits_0^n \sin^2\xi_n dx \neq 0$. Применом адиционих формула $\sin\xi_n x\sin\xi_m x = \frac{1}{2}(\cos(\xi_n - \xi_m)x - \cos(\xi_n + \xi_m)x)$, добија се $\int\limits_0^l \sin\xi_n x\sin\xi_m x dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)l}{\xi_n-\xi_m} - \frac{1}{2}\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)l}{\xi_n+\xi_m} = \frac{c}{2}\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)l}{\tan\xi_n-\tan\xi_m} - \frac{c}{2}\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)l}{\tan\xi_n+\tan\xi_m} = \frac{c}{2}(\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m-\sin l\xi_m\cos l\xi_n} - \frac{\sin(\xi_n+\xi_m)l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m+\sin l\xi_m\cos l\xi_n}) = \frac{c}{2}(\cos l\xi_n\cos l\xi_m - \cos l\xi_n\cos l\xi_m) = 0$, за $m \neq n$. Ако је $m = n$, добија се $\int\limits_0^l \sin^2\xi_n dx > 0$.

111. Разложити у Фуријеов ред функцију $\cos^4 x$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Решење. Ненула су само коефицијенти a_1, a_2, a_3.

112. Доказати да тригонометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ не може бити Фуријеов ред ниједне део по део непрекидне функције на $[-\pi, \pi]$.

Решење. Претпоставимо супротно. Тада важи Парсеваловала једнакост $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Међутим, лева странаје коначна, а десна није. Контрадикција.

113. Разложити у Фуријеов ред периодичну функцију основне периоде 2π која је на сегменту $[-\pi, \pi]$ одређена формулом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -1, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Решење. Фуријеов ред задате функције у свим тачкама у којима је непрекидна конвергира ка вредности саме функције , док у нули и на крајевима сегмента $[-\pi, \pi]$ конвергира ка $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, где је $x = 0, \pm\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{o} dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (-1)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = 0, n \geqslant 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1), n \geqslant 1.$$

114. Разложити у Фуријеов ред функцију на интервалу $(0, 2l)$

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant x < l, \\ 0, & l \leqslant x < 2l. \end{cases}$$

Решење. Слично претходном задатку, рачунају се коефицијенти:

$$a_0 = A,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, n \geqslant 1,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1}+1), n \geqslant 1.$$

115. Функцију $f(x) = x - [x]$ разложити у Фуријеов ред.

Решење. Функција је 1-периодична, непрекидно-диференцијабилна изузев у целобројним тачкама где има прекиде прве врсте. Дакле, може се развити у Фуријеов ред $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$. Овај ред конвергира ка $f(x)$ за $x \neq k$, односно ка $\frac{1}{2}$ у целобројним тачкама.

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2\int\limits_0^1 (x-[x])dx = 2\frac{x^2}{2}|_0^1 = 1,$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 (x-[x])\cos 2n\pi x dx = 2\int\limits_0^1 x\cos 2n\pi x dx = \frac{1}{2n^2\pi}\cos(2n\pi x)|_0^1 = 0,$$

$$b_n = 2\int\limits_0^1 (x-[x])\sin 2n\pi x dx = 2\int\limits_0^1 x\sin 2n\pi x = -\frac{1}{n\pi} + \frac{\sin 2n\pi x}{2n^2\pi^2}|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.$$

116. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

Решење. Функција је непрекидна на $(-\pi, \pi)$ и има део по део непрекидан извод свуда са и има део по део непрекидан извод свуда, са изузетком тачке $x = 0$. Са периодом 2π продужава се на целу реалну осу и може се развити у Фуријеов ред.

$$a_0 = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geqslant 1$$

$$b_n = 0, n \geqslant 1$$

јер је функција парна.

117. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sin ax$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

Решење. Због непарности функције је

$$a_n = 0, n \geqslant 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2}\sin a\pi, |a| \neq n, n \geqslant 1.$$

118. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$ и написати како гласи Парсевалова неједнакост.

Решење. $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n n-1}{n^2-1}$, $n \neq 1$, $a_1 =$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$, $n \geqslant 2$.

119. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi, \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Испитати његову конвергенцију и наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решење. $a_n = 0$, $n \geqslant 0$, $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geqslant 1$. Тражена сума је $\frac{\pi}{4}$.

120. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и испитати његову конвергенцију.

Решење. $a_n = 0$, $n \geqslant 0$, $b_n = \frac{2\sinh a\pi}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}$.

121. Разложити у Фуријеов ред по косинусима функцију

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < h, \\ 0, & h < x < \pi, \end{cases}$$

где је $h \in (0, \pi)$. Израчунати $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Решење. Функција се продужава парно, а коефицијенти су: $a_0 = \frac{2h}{\pi}$, $a_n = \frac{2\sin h}{n}$, $n \geqslant 0$, $b_n = 0$, $n \geqslant 1$.

122. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интеграбилне функције f са основним периодом 2π, одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$.

Решење. $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n \sinh nh}{nh}$, $B_n = \frac{b_n \sinh nh}{nh}$.

123. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x^2$:
1. по косинусима,
2. по синусима,
3. на интервалу $(0, 2\pi)$.

Користећи добијено разлагање доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решење. Функцију разматрану на $[-\pi, \pi]$ 2π-периодично продужимо на целу бројну праву. Тада добијамо непрекидну и део по део глатку функцију која се са датом функцијом поклапа на сегменту $[-\pi, \pi]$ и која се може разложити у Фуријеов ред по косинусима.

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, n \geqslant 1$$

$$b_n = 0, n \geqslant 1.$$

2. Функцију разматрану на $[0, \pi]$ по непарности продужимо на $[-\pi, \pi]$ и 2π-периодично продужимо на целу бројну праву.

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0, n \geqslant 1,$$

$$b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geqslant 1.$$

3.Функцију разматрану на $[0, 2\pi]$ 2π-периодично продузимо на целу бројну праву.

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}, n \geqslant 1,$$

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}, n \geqslant 1.$$

124. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Решење. $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1)$, $b_n = 0$, $n \geqslant 1$.

125. Функцију $f(x) = x$, $0 < x < 2$ развити:
1. у Фуријеов синусни ред,
2. у Фуријеов косинусни ред,
3. Применити Парсевалову једнакост на Фуријеов ред добијен под 2. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
4. Наћи Фуријеов ред функције $x \to x^2$, $0 < x < 2$ интеграљењем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решење. 1. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$, $n \geqslant 1$,
2. $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \geqslant 1$,
3. $S = \frac{\pi^4}{90}$,
4. $S = \frac{\pi^2}{12}$.

126. Функцију задату са

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

и 2π-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 2k}{(2k-1)2k(2k+1)}$, $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

127. Функцију задату са

$$f_h(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{4h}, & |x| \leqslant 2h; \\ 0, & 2h < |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

за $0 < h \leqslant \frac{\pi}{2}$ и 2π-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 2k}{\pi^2 - 4k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

128. Функцију задату са

$$f_h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4h^2}, & |x| \leqslant 2h; \\ 0, & 2h < |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

за $0 < h \leqslant \frac{\pi}{2}$ и 2π-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\sin(2k) - 2k\cos(2k))}{k^3}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k) - 2k\cos(2k)}{k^3}$,

129. Функцију задату са

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant \frac{\pi}{2};\\ 0, & \frac{\pi}{2}<|x|\leqslant \pi.\end{cases}$$

и 2π-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin 2k}{(2k-1)2k(2k+1)}$, $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

130. Функцију задату са

$$f_h(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{4h}, & |x|\leqslant 2h;\\ 0, & 2h<|x|\leqslant \pi.\end{cases}$$

за $0<h\leqslant\frac{\pi}{2}$ и 2π-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2k}{\pi^2-4k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

131. Функцију задату са

$$f_h(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{4h^2}, & |x|\leqslant 2h;\\ 0, & 2h<|x|\leqslant \pi.\end{cases}$$

за $0<h\leqslant\frac{\pi}{2}$ и 2π-периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sin(2k)-2k\cos(2k))}{k^3}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k)-2k\cos(2k)}{k^3}$,

1.8 Диференцијалне једначине

1.8.1 Дарбуова диференцијална једначина

Дарбуова ДЈ је ДЈ $M(x,y)dx+N(x,y)dy+P(x,y)(xdy-ydx)=0$, где су M и N хомогенитета α, а P хомогенитета β. Ако је $\beta-\alpha+2\neq 0$ или $\beta-\alpha+1\neq 0$, једначина се сменом $y=xz$ своди на Бернулијеву ДЈ и добија се ДЈ $(M(1,z)+zN(1,z))dx+N(1,z)xdz+P(1,z)x^{\beta-\alpha+2}dz=0$. Посебно треба испитати да ли су $y=z_0x$, $x<0$ и $y=z_0x$, $x>0$ решења (овде је $M(1,z_0)+z_0N(1,z_0)=0$). Ако је $\beta-\alpha+2=0$ једначина је линеарна, а ако је $\beta-\alpha+1=0$ хомогена.

132. Одредити опште решење $(x^2-y^2)dx+xydy+kyx^{m+1}(xdy-ydx)=0$.

Решење. Једначина је Дарбуова, при чему су M и N хомогенитета 2, а P хомогенитета $m+2$. Сменом $xy=z$ се добија $(1-z^2+z^2)dx+zxdz+kzx^{m+2}dz=0$, односно $x'+zx=-kzx^{m+2}$. Ако је $m+2\neq 2$ и $m+2\neq 1$ добија се Бернулијева ДЈ која се решава сменом $x^{-(m+1)}=v$. Лако се добија $v'-zv(m+1)=k(m+1)z$ одакле имамо $v=-k+Ce^{\frac{m+1}{2}z^2}$, односно $x^{-(m+1)}=Ce^{\frac{m+1}{2}\frac{y^2}{x^2}}-k$. Ако је $m+2=1$, добија се хомогена линеарна ДЈ $x'+zx=-kzx$, односно $x'+(k+1)zx=0$, чије решење је $x=Ce^{-\frac{(k+1)y^2}{2x^2}}$. Ако је $m+2=0$, имамо ДЈ $x'+(k+x)z=0$, одакле је $x=Ce^{-\frac{y^2}{2x^2}}-k$.

1.8.2 Рикатијева диференцијална једначина

Рикатијева ДЈ је ДЈ облика $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$, где су $p,q,r\in C(a,b)$. ДЈ нема сингуларних рехења, а област егзистенције и јединствености решења је $(a,b)\times(-\infty,\infty)$. Постоји неколико подтипова које ћемо решавати: 1) $y'=f(x)(ay^2+by+c)$,
2) $y'=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}y+c$,
3) $y'=\frac{a}{x}y^2+\frac{1}{2x}y+c$, која се решава сменом $y=\sqrt{x}z$,
4) $y'=ay^2+\frac{b}{x}y+\frac{c}{x^2}$, која се решава сменом $xy=z$.
Ако је познато партикуларно решење φ_1 Рикатијеве једначине, опште решење је облика $y=\varphi_1(x)+\frac{1}{z}$.

133. Урадити задатке 57 и 86 из збирке Ј. Кнежевић-Миљановић.

Решење. Збирка Диференцијалне једначине 1, Задаци са елементима теорије: Ако су позната два партикуларна решења Рикатијеве ДЈ $\varphi_i(x)$, $i=1,2$, опште решење је облика $\frac{y(x)-\varphi_1(x)}{y(x)-\varphi_2(x)}=Ce^{\int p(x)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))dx}$, а ако су позната три партикуларна решења $\varphi_i(x)$, $i=1,2,3$, опште решење је $\frac{y(x)-\varphi_2(x)}{y(x)-\varphi_1(x)}:\frac{\varphi_3(x)-\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)-\varphi_1(x)}=C_1$.

134. Решити $x^2y'+x^2y^2+xy=4$, ако је познато да су партикуларна решења облика $f(x)$ и $f(-x)$.

Решење.

$$x^2f'(x)+x^2f^2(x)+xf(x)=4,$$
$$-x^2f'(-x)+x^2f(-x)+xf(x)=4.$$

Сменом $-x$ у другу једначину, добија се

$$-x^2f'(x)+x^2f^2(x)-xf(x)=4.$$

Сабирањем прве и последње једначине се добија

$$x^2f^2(x)=4,$$

односно $f(x) = \pm\frac{2}{x}$. Решење се налази из претходног задатка,

$$\frac{y - \frac{2}{x}}{y + \frac{2}{x}} = Ce^{-\int \frac{4}{x} dx} = \frac{C}{x^4}.$$

$x = 0$ је партикуларно решење које се добија за $C = 0$.

135. Решити $y' + y^2 + \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$.

Решење. Ово је подтип 4 и решава се сменом $xy = z$, $y' = \frac{z'x - z}{x^2}$. Добија се $z'x = 4 - z^2$, одакле следи $\left(\frac{z+2}{2-z}\right) = Cx^4$, односно $y = \frac{2Cx^4 - 2}{x + Cx^5}$.

1.8.3 Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом

Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом је диференцијална једначина облика $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, при чему су M, N дефинисане и непрекидне у $G \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема. Нека су M, N, M'_y, N'_x дефинисане и непрекидне функције у G, при чему је $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$ за свако $(x,y) \in G$. Једначина $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ је једначина са тоталним диференцијалом акко $M'_y = N'_x$ за свако $(x,y) \in G$.

$$F'_x = M,$$

одакле се интеграцијом добија

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi(y),$$

$$F'_y = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Како је $M'_y = N'_x$, имамо

$$\int_{x_0}^{x} N'_t(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y),$$

одакле је $\varphi'(y) = N(x_0, y)$. Дакле,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C,$$

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C.$$

136. Решити $x(y^2+1)dx + (x^2y+2y^3)dy = 0$.

Решење. Како је $M'_y = N'_x$, то је у питању ДЈ са тоталним диференцијалом. Узећемо $(x_0, y_0) = (0, 0)$, па је $\int_0^{x_0} t(y^2+1)dt + \int_0^y 2t^3dt = C$, односно $x^2(y^2+1)+y^4 = C_1$, $C_1 > 0$.

137. Решити диференцијалну једначину $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0$.

Решење. $\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + Ce^{x^2} - 2e^{x^2}\int e^{-x^2}dx$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

138. Решити диференцијалну једначину $y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x$.

Решење. $\frac{1}{\cos^3 y} = Ce^{-3x^2} + 2x^2 - \frac{2}{3}$.

139. Решити диференцијалну једначину $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx - \sqrt{x^2-y}dy = 0$.

Решење. $x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} = C$.

1.8.4 Интеграциони фактор

Функцију $\mu = \mu(t,x)$ дефинисану, непрекидну и различиту од 0 у једноструко повезаној области D називамо интеграционим фактором једначине $Pdt + Qdx$ ако је $\mu Pdt + \mu Qdx$ једначина са тоталним диференцијалом.
Ако се интеграциони фактор може изразити помоћу функције $\mu = \mu(\omega)$, тада из $(\mu P)'_x = (\mu Q)'_t$ добијамо $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_x - Q'_t}{\omega'_t Q - \omega'_x P}d\omega$.

140. Одредити интеграциони фактор:
1. диференцијалне једначине која раздваја променљиве,
2. линеарне диференцијалне једначине.

Решење. Диференцијална једначина $y' = f(x)g(y)$ има интеграциони фактор $\mu = \frac{1}{g(y)}$ јер помножена са њим постаје диференцијална једначина са тоталним диференцијалом. Из $\frac{1}{\mu} = 0$ се добијају евентуална сингуларна решења. Линеарна диференцијална једначина има интеграциони фактор $e^{\int p(x)dx}$.

141. Решити диференцијалну једначину $x(1+xy^2)y' = y(2-3xy^2)$ и одредити решење које пролази кроз $(-2, 0)$.

Решење.
$$y(2x - 3xy^2)dx - x(1 + xy^2)dy = 0,$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3 - 7xy^2}{-x(1 + xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial x} - y(2 - 3xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial y}},$$
$$\omega = \alpha \ln|x| + \beta \ln|y|,$$
$$\frac{x^2 - x^3y^2}{y} = C,$$
$$y = 0, x < 0.$$

142. Решити диференцијалну једначину $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})dy = 0$.

Решење. $x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C$.

143. Решити диференцијалну једначину $(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0$ ако је познато да има $\mu = \mu(x^2 - y)$.

Решење. $x + 2\sqrt{x^2 - y} = C$.

144. Решити диференцијалну једначину
$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$$

Решење.

145. Решити диференцијалну једначину
$$(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^2(y^2 - 2) = 0.$$

Решење.

1.9 Диференцијалне једначине које се решавају без и са параметризацијом

146. Решити диференцијалну једначину $y'^2 - (y + x^2)y' + x^2 y = 0$.

Решење. Опште решење $(y - \frac{x^3}{3} - C)(y - De^x) = 0$, (x_0, x_0^2) сингуларне тачке.

147. Решити диференцијалну једначину $(y')^3 - 4yy' = 0$.

Решење.

148. Решити диференцијалну једначину $xy'^2 - 2y' + 4x = 0$.

Решење. Опште решење $(\frac{y}{x^2} - \frac{\sqrt{\frac{y}{x^2} - 4}}{x} - C)(D - x(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 4})) = 0$.

149. Решити диференцијалну једначину $y - y'^2 e^{y'} = 0$.

Решење. $x = e^u(u+1) + C$, $y = u^2 e^u$ је опште решење у параметарском облику.

150. Решити диференцијалну једначину $y \ln y' + y' - y \ln y - xy = 0$, $y > 0$, $y' > 0$.

Решење. $x = \ln u + \frac{u}{y} - \ln y$, $\ln|y| + C = \frac{u}{y} + \frac{u^2}{2y^2}$.

151. Решити диференцијалну једначину $y - yy'^2 - 2y'x = 0$.

Решење. $x = C\frac{v^2-1}{v^2}$, $y = -\frac{2C}{v}$.

152. Погодном сменом упростити диференцијалну једначину и решити је $y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 + a = 0$.

Решење. $y^2 = -(x-c)^2 + \frac{c^2-a}{2}$.

153. Решити диференцијалну једначину $x^{n-1}y'^n - nxy' + y = 0$, $n \neq 0$, $x > 0$.

Решење.

1.10 Лагранжова и Клерова диференцијална једначина

154. Решити диференцијалну једначину $y = 3xy' - 7y'^3$.

Решење.

155. Решити диференцијалну једначину $y = xy' + \sqrt{y'^2 + 1}$.

Решење.

156. Решити диференцијалну једначину $\ln y' + xy' + ay + b = 0$.

Решење.

157. Решити диференцијалну једначину $yy'^2 + axy' + by = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Решење.

1.11 Неки интеграбилни типови нелинеарних диференцијалних једначина n-тог реда

- $F(x, y^{(n)}) = 0$ је најједноставнија диференцијална једначина чије се опште решење добија узастопном интеграцијом n пута. Ова једначина нема сингуларних решења.
- $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}) = 0$ се сменом $y^{(k)} = z$ трансформише у диференцијалну једначину нижег реда.
- Ако је диференцијална једначина облика $f(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$, ред диференцијалне једначине се снижава за једна сменом $y' = z$, где је $y \neq const$ нова независно променљива, а $z = z(y)$ нова непозната функција.
- Диференцијалној једначини хомогенитета m, односно

  $$F(x, ty, ty', \dots ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots y^{(n)})$$

  ред се снижава сменом $y' = yz$, где је $z = z(x)$ нова непозната функција.
- Ако је диференцијална једначина уопштена хомогена диференцијална једначина

  $$F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \dots e^{(k-n)t} y^{(n)}) = e^{mt} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \text{ за неке } k \text{ и } m,$$

  једначина се трансформише у једначину трећег типа параметризацијом $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, где је t нова независно променљива, а $u = u(t)$ нова непозната функција.

158. Решити диференцијалну једначину $x = \frac{y''}{1+y''^2}$

Решење. $y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ има опште решење $-\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c_1x + c_2$, $|x| < 1$.

159. Решити диференцијалну једначину $y'' + 2y' = e^x y'^2$.

Решење. $y = -e^{-x} - c_1x + c_1 \ln|1 + c_1e^x| + c_2$, $y = c$.

160. Решити диференцијалну једначину $y''^2 = 4(y' - 1)$.

Решење. $y = x + \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2$, $y = x + c$.

161. Решити диференцијалну једначину $y'' = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

Решење. $y = \frac{1}{2}x\ln^2 x - x\ln x + x + C_1x + C_2$.

162. Решити диференцијалну једначину $x - \sin y'' + 2y'' = 0$.

Решење. $dy = (t\sin t + \cos t - t^2 + C_1)(\cos t - 2)dt$.

163. Одредити сва решења диференцијалне једначине $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$ која задовољавају почетне услове $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$.

Решење. $y = C_1\frac{x^3}{6} - C_1^3\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$ је опште решење, $y = \pm\frac{8}{105\sqrt{3}}x^{\frac{7}{2}} + C_4x + C_5$ је сингуларно решење за $u \neq 0$. постоје 3 решења која задовољавају почетне услове.

164. Решити диференцијалну једначину $yy'' - 2yy'\ln y - y'^2 = 0$, $y > 0$.

Решење.

165. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

Решење.

166. Решити диференцијалну једначину $x^3y'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0$.

Решење.

1.12 Линеарне диференцијалне једначине n-тог реда

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x)$ је канонски облик линеарне дифренцијалне једначине n-тог реда (за $f(x) = 0$ добија се одговарајућа хомогена линеарна диференцијална једначина. Скуп решења посматране једначине образује векторски простор над пољем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

1.12.1 Хомогене линеарне диференцијалне једначине вишег реда са константним коефицијентима

167. Одредити опште решење диференцијалне једначине

- $y''' - 13y' - 12 = 0$,
- $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$,
- $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

Решење.

168. Одредити Кошијево решење диференцијалне једначине $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Решење.

1.12.2 Нехомогене линеарне ДЈ вишег реда са константним коефицијентима, $y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_ny = f(x)$

Решење је $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$, где се користи таблица:

Таблица решења нехомогених линеарних ДЈ са константним коефицијентима:		
$f(x)$	α, β	$y_p(x)$
$P_n(x)$	$\alpha = \beta = 0$	$x^s\overline{P_n(x)}$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	$\alpha \neq 0,\ \beta = 0$	$x^s e^{\alpha x}\overline{P_n(x)}$
$P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$	$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$	$x^s(\overline{P_k(x)}\cos(\beta x) + \overline{Q_k(x)}\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$	$x^s e^{\alpha x}(\overline{P_k(x)}\cos(\beta x) + \overline{Q_k(x)}\sin(\beta x))$

s- вишеструкост броја $\alpha + i\beta$ као корена карактеристичне једначине, $k = \max\{m, n\}$

169. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' + y' - y = \cos x + 2e^x$.

Решење.

170. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решење.

171. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 5y = (\sin x + 2\cos x)e^{2x}$.

Решење.

1.12.3 Метод варијације константи

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots y_n(x)$ образују фундаментални систем решења хомогене ДЈ

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Проблем се своди на решавање система

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x),
\end{aligned}$$

172. Решити диференцијалну једначину $y'' + 4y = 2\tan x$ методом варијације константи.

Решење.

1.13 Линеарне ДЈ са функционалним коефицијентима

1.13.1 Ојлерова ДЈ

173. Решити диференцијалну једначину $x^2y'' - xy' + 4y = \cos\ln x + x\sin\ln x$.

Решење.

174. Одредити опште решење диференцијалне једначине $(x+a)^3y''' + 3(1-b)(x+a)^2y'' + (3b^2 - 3b + 1)(x+a)y' - b^3y = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Решење.

1.13.2 Абелова формула

Ако је $y_1(x)$ партикуларно решење хомогене линеарне ДЈ, тада се сменом $y = y_1 z$, $z = z(x)$ снижава ред те једначине за 1.
Ако је $y_1(x)$ партикуларно решење ДЈ $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, тада је друго партикуларно решење могуће добити формулом Абела $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$.

175. Решити хомогену линеарну ДЈ $\sin(2x)y'' - 2\cos x(3\cos x + 2)y' - 4\sin x(1 + \cos x)y = 0$, $y_1(x) = \cos x$.

Решење.

176. Решити нехомогну линеарну диференцијалну једначину $xy'' + 2y' + y = \frac{1}{x}$ ако је познато једно решење одговарајуће хомогене линеарне диференцијалне једначине $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Решење.

1.13.3 Степени редови

177. У близини координатног почетка одредити опште решење диференцијалне једначине $2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0$.

Решење. $y_1(x) = \frac{c_1 x + c_2 |x|^{\frac{1}{2}}}{1+x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

178. Решити диференцијалну једначину $x^2 y'' + (x^2 - 3x)y' - (x - 4)y = 0$.

Решење. $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где су $y_1(x) = x^2 e^{-x}$, $y_2(x) = x^2 \ln|x| e^{-x} + x^2(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \dots)$, за $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.13.4 Гринова функција

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & \alpha\leqslant t\leqslant s,\\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(s)}, & s\leqslant t\leqslant \beta.\end{cases}$$

179. Наћи Гринову функцију за гранични задатак $t^2x''-2x=f(x)$, $x(1)=0$, $x(2)+2x'(2)=0$.

Решење.

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1-t^3}{3st}, & 1\leqslant t\leqslant s,\\ \frac{1-s^3}{3st}, & s\leqslant t\leqslant 2.\end{cases}$$

180. Наћи Гринову функцију за гранични задатак $x''-x=f(t)$, $x(t)$ ограничено за $t\to\pm\infty$.

Решење.

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{e^{t-s}}{2}, & -\infty\leqslant t\leqslant s,\\ \frac{e^{s-t}}{2}, & s\leqslant t\leqslant \infty.\end{cases}$$

1.14 Системи диференцијалних једначина

181. Свести на нормални систем диференцијалну једначину: $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$, и систем диференцијалних једначина: $y''=z$, $z'=\frac{2y}{x^2}-y'$.

Решење.

182. Методом елиминације решити систем: $y''=2y-3z$, $z''=y-2z$.

Решење.

183. Методом елиминације решити систем диференцијалних једначина: $x^2y'-z=0$, $xz'+x(x^2+2)y=4z$

Решење.

184. Методом елиминације решити систем диференцијалних једначина: $xy' - y - 3z = 0$, $xz' - y + z = 0$.

Решење.

185. Решити: $\frac{dx}{x+^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

Решење.

186. Решити: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+u} = \frac{du}{x+y}$.

Решење.

187. Решити: $\frac{dx}{4y-3z} = \frac{dy}{4x-2z} = \frac{dz}{2y-3x}$.

Решење.

188. Решити Кошијев проблем система диференцијалних једначина: $\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$, $z(0) = -1$, $y(0) = 1$.

Решење.

189. Одредити опште решење нехомогеног линеарног система диференцијалних једначина: $y_1' = y_2 + \tan^2 x + 1$, $y_2' = -y_1 + \tan x$.

Решење.

190. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = y_2 + \tan^2 x + 1,$$

$$y_2' = -y_1 + \tan x$$

, ако су позната два линеарно независна решења одговарајућег хомогеног система.

Решење.

191. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2,$$

$$y_2' = 4y_1 + 5y_2.$$

Решење.

192. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = -y_1 + 2y_2.$$

Решење.

193. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = 5y_1 + 2y_2,$$

$$y_2' = -4y_1 - y_2.$$

Решење.

194. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = 3y_1 + y_2,$$

$$y_2' = -y_1 + y_2.$$

Решење.

195. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3,$$

$$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3.$$

Решење.

196. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3,$$
$$y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3,$$
$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3.$$

Решење.

197. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$xy_1' = -6y_1 + y_2 + 3y_3,$$
$$xy_2' = -23y_1 + 6y_2 + 9y_3,$$
$$xy_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3.$$

Решење.

1.15 Парцијалне диференцијалне једначине 1. реда

198. Решити Кошијев проблем хомогене линеарне парцијалне диференцијалне једначине $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u|_{x=1} = y + z$.

Решење.

199. Решити хомогену линеарну парцијалну диференцијалну једначину $(2z-3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Решење.

200. Одредити једначину површи G која садржи круг $x^2 + y^2 = r^2$, $z = h$ и ортогонална је на фамилију хиперболоида $xy = cz^2$, $h, r, c \neq 0$.

Решење.

201. Решити Пфафове једначине $dz = (2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1)d - 2ydy \quad (\cos x + e^x)dx + (e^x + e^y z)dy + e^y dz = 0$.

Решење.

202. Наћи потпуни, општи и сингуларни интеграл једначине $p = (qy + z)^2$ и одредити услове постојања Кошијевог интеграла који садржи криву $y = 1$, $z = g(x)$.

Решење.

203. Одредити потпуне интеграле посебних типова парцијалних диференцијалних једначина 1. $A(x, p) = B(y, q)$ (парцијална диференцијална једначина која раздваја промењљиве),
2. $z = xp + yq + f(p, q)$ (Клерова парцијална диференцијална једначина),
3. $F(z, p, q) = 0$.

Решење.

1.16 Парцијалне диференцијалне једначине 2. реда

204. Одредити тип парцијалне диференцијалне једначине $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$ и свести је на канонски облик.

Решење. Дата једначина је хиперболичног типа, а канонски облик је $y_{\xi\eta} = 0$

205. Одредити тип парцијалне диференцијалне једначине $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0$ и свести је на канонски облик.

Решење. Дата једначина је параболичног типа, а канонски облик је $u_{\eta\eta} + 2(\frac{\xi}{\eta})^2 u_\xi = 0$.

206. Одредити тип парцијалне диференцијалне једначине $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$ и свести је на канонски облик.

Решење. Дата једначина је елиптичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\xi}{\xi+\eta} + \frac{u_\eta}{2\eta} = 0$.

207. Одредити области у којима је једначина $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ хиперболичног, параболичног и елиптичног типа и у сва три случаја написати формуле трансформације за свођење на канонски облик.

Решење.

208. Наћи опште решење следећих парцијалних диференцијалних једначина:
а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 2(x + e^y)$,
б) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.

Решење.

209. Датом сменом наћи опште решење следећих парцијалних диференцијалних једначина:
а) $\frac{\delta(x^2 u_x)}{\delta x} = x^2 u_{yy}$, $v(x, y) = xu(x, y)$,
б) $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$, $v(x, y) = (x - y)u(x, y)$.

Решење.

210. Решити Кошијев проблем:
$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y + \frac{u}{4} = 0$,
$u|_{y=0} = x^2 e^{-\frac{x}{4}}$, $u_y|_{y=0} = 0$.

Решење.

211. Решити следеће Гурсаове проблеме:
а) $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$, $|x| < y$,
$u|_{y=x} = 1$, $u|_{y=-x} = (1 + x)e^x$,
б) $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$, $y^3 - 8 < 3x < y^3$, $0 < y < 2$,
$u|_{y=2} = 3x + 8$, $u|_{3x=y^2} = 2y^3$.

Решење.

Мешовити проблем хомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

Проблем: У области $D = (0, l) \times (0, \infty)$ одредити нетривијално класично ресење $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ хомогене таласне једначине

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x, t \in D$$

која задовољава хомогене граничне услове

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t>0,$$

и почетне услове

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u'_t(x,0)=\varphi_1(x),\ x\in(0,l).$$

Посматрани проблем се решава Фуријеовом методом раздвајања променљивих:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x)T(t),\ x\in[0,l],\ t\geqslant 0,\\ X(x)T''(t) &= a^2X''(x)T(t),\\ \frac{T''(t)}{a^2T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\ \lambda=const,\ X(0)=X(l)=0. \end{aligned}$$

што се своди на решавање регуларног Штурм-Лиувиловог проблема

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X(l)=0, \end{aligned}$$

и решавање обичне диференцијалне једначине

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

Интерпретација проблема: Жица дужине l слободно осцилује, $u(x,0)=\varphi_0(x)$ даје положај жице у тренутку $t=0$, $u'_t(x,o)=\varphi_1(x)$ је почетна брзина осциловања жице. Жица је учвр7ћена на крајевима: $u(0,t)=u(l,t)=0\ \ t>0$.

Решимо разматрани Штурм-Лиувилов проблем:

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x) &= 0,\ X(0)=X(l)=0\\ X(x) &= C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,\ X(0)=X(l)=0,\\ C_2 &\neq 0,\sin\sqrt{\lambda}l=0,\\ \lambda_k &= (\frac{k\pi}{l})^2,\\ X_k(x) &= \sin\sqrt{\lambda_k}x=\sin\frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Решимо разматрану обичну диференцијалну једначину:

$$T''_k(t)+a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t)=0,$$
$$T_k(t)=C_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+D_k\sin\frac{ak\pi t}{l}.$$

Решење полазног проблема је облика $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x,t), u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t), k\geqslant 1.$

1. Одредити закон осциловањажице дужине l, учвр71ене на крајевима, која је у пресецима удаљеним за $\frac{l}{3}$ од крајњих тачака изведена из равнотежног положаја за амплитуду x_0, тако даје средишњи део паралелан њеном равнотежном положају, па потом пуштена да осцилује без почетне брзине.

2 Варијациони рачун (за Б смер), Лапласова и Фуријеова трансформација (за Ц смер)

2.1 Варијациони рачун

212. Наћи екстремале функционала:

а) $J[y] = \int\limits_{-1}^{0}(12xy - y'^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$,

б) $J[y] = \int\limits_{1}^{2}(y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$,

в) $J[y] = \int\limits_{0}^{1} yy'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$,

г) $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi}(4y\cos x + y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Решење. а) Ојлер-Лагранжова једначина је облика $6x - y'' = 0$, $y = x^3 + Cx + D$, одакле се сменом у граничне услове добија систем $-1 - C + D = 1$, $D = 0$, па је $y = x^3 - 2x$ екстремала посматраног функционала.
б) $-y'' - y' + 2y = 0$ има опште решење облика $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, па се сменом у граничне услове добија систем једначина $C_1e + C_2e^{-2} = 1$, $C_2e^2 + C_2e^{-4} = 0$, чије решење је $C_2 = \frac{e^2}{e^{-3}-1}$, $C_1 = 1 - C_2e^{-2}$.
в) $-y'^2 - 2yy'' = 0$ је диференцијална једначина која се решава сменом $z = y'$: $-z^2 - 2yz'z = 0$, одакле је $z = 0$, $y = C$ или $z' + \frac{z}{2y} = 0$, $y \neq 0$, што је диференцијална једначина првог реда $(\sqrt{y}z)' = 0$, $z = \frac{C}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = Cdx$, $y = (\frac{3}{2}Cx + \frac{3}{2}D)^{\frac{2}{3}}$. Из граничних услова се добијају екстремале, $y(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$, $y(x) = (-3x+1)^{\frac{2}{3}}$.
г) $y'' + y - 2\cos x = 0$ је диференцијалнаједначина чији хомогени део решења је $C_1\cos x + C_2\sin x$, а партикуларни део решења је облика $y_p = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, односно након смене у диференцијалну једначину $y_p = b\cos x + (x+d)\sin x$. Дакле, опште решење је $y = (x + D_2)\sin x + D_1\cos x$, одакле се сменом у граничне услове налазе екстремале $y = (x + D_2)\sin x$.

213. Наћи екстремале функционала: а) $J[y(x), z(x)] = \int\limits_{1}^{2}(y'^2 + z^2 + z'^2)dx$ $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $z(1) = 0$, $z(2) = 1$,

б) $J[y(x), z(x)] = \int\limits_{1}^{2}(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)dx$ $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$, $z(\pi) = -1$.

Решење. а) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' = 0,$$

$$z - z'' = 0,$$

одакле је

$$y = C_1 x + C_2,$$
$$z = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = x,$$
$$z = \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}$$

. б) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' + 2y - z = 0,$$
$$z'' - y = 0,$$

одакле је елиминацијом z,

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = 0,$$
$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x),$$
$$z = y'' + y.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi} \cos x,$$
$$z = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2 \sin x - x \cos x),$$

где је C_2 произвољна константа.

2.2 Фуријеова трансформација и интеграл

214. Наћи Фуријеову трансформацију функције $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Решење. Функција задовољава Дирихлеове услове и апсолутно је интеграбилна на реалној правој ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| = 2\int_0^{\infty} e^{-ax} = \frac{2}{a}$). $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\lambda^2}$.

215. Представити у форми Фуријеовог интеграла функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решење. Функција је дефинисана на реалној оси, део-по-део монотона, има две тачке прекида 1. реда и апсолутно је интеграбилна $\int\limits_{-\infty}^{infty} |f(x)| dx = \int\limits_{-1}^{1} |x| dx = x^2|_0^1 = 1$. Дакле, функција се може представити Фуријеовим интегралом. Функција је непарна, па је $a(\lambda) = 0$; $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t = \frac{2}{\pi\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda \cos\lambda)$. У тачкама непрекидности (за $x \neq \pm 1$) је $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda$, а у тачкама прекида $x = \pm 1$ је $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\sin(\lambda x) d\lambda = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.