Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Анализа 1

1.1 Разни задаци

1. Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

Решење. Доказаћемо прво неједнакост за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Како је $\sin z < z$ за $z \in (0, 1)$, то је $\sin(\cos x) < \cos x$. На интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ функција $\cos x$ је опадајућа, па из $\sin x \leqslant x$ следи $\cos x \leqslant \cos(\sin x)$. Коначно, следи $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ за свако $x \in \left[0\frac{\pi}{2}\right)$. За $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ је $\sin(\cos x) \leqslant 0 < \cos(\sin x)$, тј. неједнакост важи. С обзиром на парност посматраних функција, неједнакост важи на интервалу $\left[-\pi, \pi\right]$. С обзиром на 2π-периодичност посматраних функција, неједнакост важи за свако $x \in \mathbb{R}$.

2. Решити $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} \leqslant 17$.

Решење. Приметимо да је $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Дакле, након смене $a = 16^{\sin^2 x}$, треба решити следеће $a + \frac{16}{a} \leqslant 17$. Како је $a > 0$, то је еквивалентно са $a^2 - 17a + 16 \leqslant 0$, односно са $(a - 16)(a - 1) \leqslant 0$. Одавде је $1 \leqslant a \leqslant 16$, односно $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, што важи за свако $x \in \mathbb{R}$.

3. Нека је функција f дата са $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$, где је $x \in \mathbb{R}$ и $a > 0$. Одредити вредност збира $f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2}{2021}) + \cdots + f(\frac{2020}{2021})$.

Решење. Функција f задовољава идентитет $f(x) + f(1-x) = 1$. Отуда је $f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2}{2021}) + \cdots + f(\frac{2020}{2021}) = (f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2020}{2021})) + (f(\frac{2}{2021}) + f(\frac{2019}{2021})) + \cdots + (f(\frac{1010}{2021}) + f(\frac{1011}{2021})) = 1010$.

4. Да ли је број $1{,}000001^{0{,}999999} \cdot 0{,}999999^{1{,}000001}$ већи или мањи од 1?

Решење. Нека је $\varepsilon = 0{,}000001 = 10^{-6}$. Тада је $1{,}000001^{0{,}999999} \cdot 0{,}999999^{1{,}000001} = (1 + \varepsilon)^{1-\varepsilon} \cdot (1 - \varepsilon)^{1+\varepsilon} = (\frac{1}{1+\varepsilon})^{2\varepsilon}(1 - \varepsilon^2)^{1+\varepsilon} < 1 \cdot 1 = 1$.

5. Рационалисати разломак $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

Решење. Увођењем смене $x = \sqrt[3]{2}$ добијамо
$\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{1+3x+2x^2} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1} \cdot \frac{4x^2-2x+1}{4x^2-2x+1} = \frac{(x^2-x+1)(4x^2-2x+1)}{(x^3+1)(8x^3+1)} = \frac{7\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}-11}{51}$.

6. Решити једначину $\log_2\left(xy + \frac{1}{xy}\right) = 1 - (x+y-2)^2$ у скупу реалних бројева.

Решење. Из дефиниције логаритма следи $xy > 0$, одакле следи $xy + \frac{1}{xy} \geqslant 2$, при чему једнакост важи за $xy = 1$. Даље је $\log_2\left(xy + \frac{1}{xy}\right) \geqslant 1$. Како је $1 - (x+y-2)^2 \leqslant 1$, то мора да важи једнакост у неједнакости. Дакле,

$$xy = 1,$$

$$x + y = 2.$$

одакле се добија јединствено решење $x = y = 1$.

7. Решити $4^{x+1} \cdot 3^{x-1} < 48 \cdot 2^x$.

Имамо да је $2^{2x} \cdot 4 \cdot 3^x \frac{1}{3} < 48 \cdot 2^x$, што је еквивалентно са $6^x < 36$, односно са $x < 2$.
Решење.

8. Доказати неједнакост $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Решење. Нека је $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ и $b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$. Тада је $a^3+b^3 = 6$. Како је $a^2 - ab + b^2 > ab$, то важи $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < 4(a^3+b^3)$, одакле следи жељена неједнакост.

9. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $ax^2 + (7a+4)x - 4 = 0$. Одредити све вредности параметра a за које је $1 < x_1 < 2$ и $x_2 > 2$.

Решење. Како су оба решења позитивна, то је $x_1 x_2 = -\frac{4}{a} > 0$, односно $a < 0$. Дакле, парабола која представља график функције је окренута врхом нагоре. Како је $1 < x_1 < 2$ и $x_2 > 2$, то је $f(1) < 0$ и $f(2) > 0$. Тако је

$$a + (7a+4) - 4 < 0,$$

$$4a + 2(7a+4) - 4 > 0.$$

Прва неједнакост је већ констатована, а друга даје $a > -\frac{2}{9}$. Дакле, решења ће испуњавати наведене услове за $a \in \left(-\frac{2}{9}, 0\right)$.

10. Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2 - 4ax + 5a^2 - 6a = 0$. Одредити све вредности параметра a за које је $|x_1 - x_2|$ максимално.

Како је $(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = 4(9-(a-3)^2)$, израз има максималну вредност за $a = 3$.

Решење.

11. Наћи све парове реалних бројева (x, y) који задовољавају једначине $|x + y - 4| = 5$, $|x - 3| + |y - 1| = 5$.

Решење. Из датог система следи да је $|x+y-4| = |x-3|+|y-1|$, што је тачно ако су $x-3$ и $y-1$ истог знака. Дакле, решење треба тражити у областима $D_1 = \{(x, y) : x \geqslant 3, y \geqslant 1\}$ и $D_2 = \{(x, y) : x \leqslant 3, y \leqslant 1\}$. У области D_1 систем је еквивалентан једначини $x+y-4 = 5$, па је скуп решења у тој области $R_1 = \{(x, y) : y = 9-x, 3 \leqslant x \leqslant 8\}$. У области D_2, систем је еквивалентан једначини $x + y = -1$, па е скуп решења $R_2 = \{(x, y) : y = -1 - x, -2 \leqslant x \leqslant 3\}$. Скуп решења система је $R = R_1 \cup R_2$.

12. Дата је једначина $x^2 + (a - 2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$, где је a реални параметар. а) Решити једначину. б) Наћи a за које је апсолутна вредност једног корена два пута већа од апсолутне вредности другог корена.

Решење. а) Решења дате једначине су $x_1 = a-1$ и $x_2 = 3-2a$. б) Треба решити једначине $|x_1| = 2|x_2|$ и $|x_2| = 2|x_1|$. Разликујемо случајеве: $a < 1$, $1 \leqslant a < \frac{3}{2}$и $a \geqslant \frac{3}{2}$. Скуп решења је $\{\frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\}$.

13. Решити једначину $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.

Решење. Уведимо смену $a = x^2 + 3x - 4$ и $b = 2x^2 - 5x + 3$. Добија се $a^3 + b^3 = (a + b)^3$, одакле је $ab(a + b) = 0$. Решавањем се налази $x \in \{-4, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

14. Наћи све парове реалних бројева (x, y) такве да је $\max\{x^2 + y^2, 2\} = \min\{-2x, 2y\}$.

Решење. Како је $\max\{a, b\} \geqslant a, b$ и $min\{a, b\} \leqslant a, b$, следи да мора бити $x^2 + y^2 \leqslant -2x$, $x^2 + y^2 \leqslant 2y$, $2 \leqslant -2x$, $2 \leqslant 2y$. Једина заједничка тачка ових области је $(-1, 1)$ и то је једини пар реалних бројева који задовољава полазну једначину.

15. Решити $||x - 3| - 3x - 1| \geqslant 2x + 1$.

Решење. За $x \geqslant 3$ једначина је еквивалентна са $|-2x-4| \geqslant 2x+1$, а за $x < 3$ са $|-2x+2| \geqslant 2x+1$. Решавањем ових подслучајева, налази се скуп решења $(-\infty, \frac{1}{6}] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$.

16. Решити $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} < 0$.

Решење. За $x \notin \{0, 1, -2\}$ једначина је еквивалентна са $\frac{3x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)} < 0$. Решења су из скупа $(-\infty, -2) \cup (-\frac{\sqrt{7}+1}{3}) \cup (\frac{\sqrt{7}-1}{3}, 1)$.

17. Решити $x - 3 > \sqrt{2x^2 - 10x - 12}$.

Решење. Једначина је еквивалентна са $x - 3 > 0$, $2x^2 - 10x - 12 = 2(x+1)(x-6) \leqslant 0$, $(x-3)^2 > 2x^2 - 10x - 12$. Решења су из скупа $[6, 7)$.

18. Решити $2\ln(x) + \ln(2) \geqslant \ln(x^2 - 2x + 1) + \ln(3x + 2)$.

Решење. Једначина је еквивалентна са $x > 0$, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$, $3x + 2 > 0$, $2x^2 \geqslant (x-1)^2(3x+2)$. Решења су из скупа $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1) \cup (1, 2]$.

19. $\sqrt{2}$ је ирационалан. Доказати

Решење. Доказ свођењем на контрадикцију. Претпоставимо супротно, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $\gcd(m, n) = 1$. Квадрирањем имамо да је $m^2 = 2n^2$, одакле налазимо да $2|m$, тј. $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Сменом тога у полазну једнакост имамо $n^2 = 2k^2$, одакле је $2|n$. Дакле, $2|\gcd(m, n) = 1$. Контрадикција.

20. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи $x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0$.

Решење. Дата једначина је еквивалентна са $(x - \cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0$, односно са $\cos(xy) = x$ и $\sin(xy) = 0$. Имамо да је (из друге једнакости) $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, па како је $\cos k\pi = \pm 1$, добијамо да $x \in \{-1, 1\}$. Ако је $x = 1$, $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако је $x = -1$, имамо да је $y = (2l+1)\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Дакле, $(x, y) \in \{(1, 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, (2l+1)\pi : l \in \mathbb{Z})\}$.

1.2 Математичка индукција

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(n+1)) \implies (\forall n \in \mathbb{N})P(n).$$

21. Наћи цео део броја $a_n = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \ldots \sqrt[3]{24}}}$.

Решење. Приметимо да је $2 \leqslant \sqrt[3]{24} < 3$. Докажимо индукцијом да је за свако $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [2,3)$. Базу индукције смо проверили, она важи. Претпоставимо да важи за a_n и докажимо индуктивни корак, тј. да одатле следи важење за a_{n+1}. Како је $a_n \in [2,3)$, а $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 24}$, то је $2 < \sqrt{26} = \sqrt[3]{24+2} \leqslant a_{n+1} < \sqrt[3]{24+3} = 3$, што је и требало доказати.

22. Доказати индукцијом $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Решење. За $n = 1$: $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$, па база индукције важи. Докажимо индукцијски корак. Поставимо индуктивну хипотезу за n: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ и докажимо одатле формулу за $n+1$: $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2}{4} + n + 1) = (n+1)^2(\frac{n^2+4n+4}{4}) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Принципом математичке индукције закључујемо да формула важи за све природне бројеве.

23. Доказати Бернулијеву неједнакост $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Решење. База индукције за $n = 1$ важи јер је $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$. Претпоставимо да за $n \in \mathbb{N}$ важи $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ и посматрајмо израз $(1+x)^{n+1}$. Имамо да важи $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2$, а како је nx^2 ненегативно, то је $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$, што је и требало доказати.

24. Доказати биномну формулу $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Решење. Приметимо најпре да је $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, за $n - 1 \geqslant k$. Докажимо биномну формулу индукцијом. За $n = 1$ важи једнакост, па је база индукције задовољена. Претпоставимо да формула важи за n, тј. да је $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ и посматрајмо израз за $n+1$: $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^{n+1} + [\binom{n}{1} + \binom{n}{0}] a^n b + \cdots + [\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}] a b^n + b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Овим је тврђење доказано.

25. Доказати неједнакост аритметичке и геометријске средине,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}.$$

Решење. У случају $n = 1$ важи једнакост, а случај $n = 2$ је еквивалентан ненегативности бинома $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$. Надаље ћемо примењивати регресивну индукцију, показаћемо да $n \Rightarrow 2n$ и $n \Rightarrow n-1$. Имамо да је

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{x_k}{2n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} + \sum\limits_{k=n+1}^{2n \frac{x_k}{n}}}{2} \geqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}} + \prod\limits_{k=n+1}^{2n} x_k^{\frac{1}{n}}}{2} \geqslant \sqrt{\prod_{k=1}^{2n} x_k^{\frac{1}{n}}} = \prod_{k=1}^{2n} x_k^{\frac{1}{2n}}$$

. Слично,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n-1} = \frac{1 + \frac{1}{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \geqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n-1}},$$

одакле се након степеновања са n, добија

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} x_k^{\frac{1}{n-1}}.$$

Коначно, можемо закључити да тврђење важи за свако $n \in \mathbb{N}$.

26. За $x \in [0, \pi]$ доказати неједнакост

$$|\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin(x_k).$$

Решење.

База индукције важи, поставимо хипотезу за n. Применом адиционе формуле, добија се

$$|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k| = |\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1})| = |\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k) \cos x_{n+1} + \cos(\sum_{k=1}^{n} x_k) \sin x_{k+1}|.$$

Одавде је на основу неједнакости троугла,

$$|\sin(\sum_{k=1}^{n+1} x_k)| \leqslant |\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| + |\sin(x_{n+1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin(x_k) + \sin(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \sin(x_k).$$

27. Доказати неједнакост $n^{n+1} > (n+1)^n$ за $n \geqslant 3$.

Решење. Како је $81 = 3^4 > 4^3 = 64$, база индукције важи. Претпоставимо $n^{n+1} > (n+1)^n$. Тада, $(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} = (n+2+\frac{1}{n})^{n+1} > (n+2)^{n+1}$.

28. Доказати $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n$.

Решење. Приметимо да је $f(1) = 2$ и имајмо на уму идентитет $\binom{n+1+k}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1}$. Стога,

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k} = \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{k-1} \frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} + f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^{k+1}},$$

$$f(n+1) = (\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}) \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} \frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2} f(n+1),$$

одакле је

$$f(n+1) = 2f(n).$$

29. Нека је α реалан број такав да $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Доказати да $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. За $n = 0$ и $n = 1$ тврђење важи (база индукције). (Индуктивни корак) Претпоставимо да за неко n важи

$$\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

Тада,

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = (\alpha + \frac{1}{\alpha})(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}) - (\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}) \in \mathbb{Z}.$$

30. Нека је $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ за $n \geqslant 1$. Показати да је низ монотоно растући и ограничен одозго са 2.

Решење. Имамо $a_0 < a_1$; претпоставимо $a_{n-1} < a_n$. Експоненцијална функција је растућа и чува неједнакост, па следи $a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}} < \sqrt{2}^{a}_{n} = a_{n+1}$. Овим је показано да је низ растући. Докажимо ограниченост. Важи $a_0 < 2$. Претпоставимо $a_n < 2$. Тада, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a}_{n} < \sqrt{2}^{2} = 2$. Дакле, a_n је ограничен одозго са 2.

1.3 Скупови

Дефиниција 1. Нека је X универзални скуп.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

$$A^C = X \backslash A = \{x \in X : x \notin A\},$$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

$$\mathcal{P}A = \{B : B \subset A\}.$$

31. Доказати да важе
(закони идемпотенције) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
(закони комутације) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
(закони асоцијације) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
(закони дистрибуције) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(закони апсорпције) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$,
(Де Морганова правила) $A \cup A^C = X$, $A \cap A^C = \varnothing$, $\varnothing^C = X$, $X^C = \varnothing$, $A^{C^C} = A$, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Решење. За вежбу читаоцу.

32. а) Ако је $A = \{x \in R : x^2 + 6x - 7 < 0\}$ и $B = \{x \in R : x^2 - x - 2 \geqslant 0\}$, одредити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.
б) Ако је $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $A' = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A'' = \{x \in R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и $B = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, приказати графички $A \times B$, $A' \times B$, $A'' \times B$ и $A^2 \times A'$.

Решење. Како је $A = (-7, 1)$ и $B = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$, лако се налазе пресек, разлика, унија ова два скупа.

1.4 Релације

Дефиниција 2. Нека су X и Y скупови и $\rho \subset X \times Y$. Тада кажемо да је ρ бинарна релација из X у Y.

33. Нека је $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2 + 3y + 1\}$. Одредити домен и слику релације ρ.

Решење. $x \in Dom(\rho)$ акко постоји $y \in \mathbb{R}$ тако да $x^3 = y^2 + 3y + 1$. Одавде, $Dom(\rho) = [-\sqrt[3]{\frac{9}{4}}, \infty)$. Са друге стране, $y \in Im(\rho)$ акко постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да је $x^3 = y^2 + y + 1$. Како је ово испуњено за све $y \in \mathbb{R}$, то је $Im(\rho) = \mathbb{R}$.

34. Нека је $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x - y \leqslant 2, -1 \leqslant x + y \leqslant 5\}$. Одредити домен и слику релације ρ.

Решење. Релација ρ је заправо један паралелограм у равни (нацртати слику), чија темена су $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$, $(2, 3)$. Добија се да је $Dom(\rho) = [-1, \frac{7}{2}]$, $Im(\rho) = [-\frac{3}{2}, 2]$.

Дефиниција 3. Релација ρ на скупу X је релација еквиваленције ако је
рефлексивна: $(\forall x \in X) x\rho x$,
симетрична: $(\forall x, y \in X)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$,
транзитивна: $(\forall x, y, z \in X)(x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.

35. Нека је $m \geqslant 2$ цео број. Дефинишимо бинарну релацију на $\mathbb{Z}$ са: $a \equiv_m b$ акко $m|a - b$. Доказати да је $\equiv_m$ релација еквиваленције и одредити њене класе и количнички скуп.

Решење. Посматрана релација је рефлексивна јер $m|0 = a - a$. Такође, ако $m|a - b$, онда $m|b - a$, па је релација симетрична. Транзитивност такође важи, ако $m|a - b$ и $m|b - c$, онда $m|a - c = (a - b) + (b - c)$. Дакле, $\equiv_m$ јесте релација еквиваленције која има m класа $m\mathbb{Z}, m\mathbb{Z} + 1, \ldots m\mathbb{Z} + m - 1$. Количнички скуп је скуп класа еквиваленције.

Дефиниција 4. Релација ρ на скупу X је релација поретка (или уређења) ако је
рефлексивна: $(\forall x \in X) x\rho x$,
антисиметрична: $(\forall x, y \in X)(x\rho y, y\rho x \Rightarrow x - y)$,
транзитивна: $(\forall x, y, z \in X)(x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.
За скуп X кажемо да је уређен релацијом ρ. Ако ρ задовољава јос и услов
$(\forall x, y \in X)(x\rho y \vee y\rho x)$, кажемо да је ρ релација потпуног поретка.

Дефиниција 5. Елемент m посета P је највећи ако за сваки елемент $x \in P$ важи: $x \leqslant m$. Кажемо да је елемент m посета P максималан уколико не постоји елемент $x \in P$ такав да је $m < x$. Аналогно се дефинишу најмањи и минималан елемент посета. Ако су свака два елемента упоредива, тада је скуп P линеарно уређен. Линеарно уређен подскуп неког посета се назива ланац. Ако су у неком подскупу неког посета свака два различита елемента неупоредива, такав посет називамо антиланац.

Пример 1. Ако радимо са релацијом дељивости у $\mathbb{Z}_+$, скуп свих простих бројева чини један антиланац.

36. На скупу $\mathbb{R}^2$ дефинишимо релацију парцијалног уређења са $(a, b) \preceq (c, d)$ акко $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$, где је са $\leqslant$ означена стандардна релација поретка на $\mathbb{R}$.
(а) Доказати да је овако заиста дефинисана једна релација парцијалног уређења.
(б) Посматрајмо троугао $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + 2y \leqslant 1\}$. Наћи максималне и минималне елементе у T. Да ли у T постоји највећи, односно најмањи елемент?

Решење. Важе особине рефлексивности, антисиметричности и транзитивности, па заиста јесте у питању релација поретка на $\mathbb{R}^2$. Какоје за свако $(x, y) \in T$ испуњено $(0, 0) \preceq (x, y)$, то је координатни почетак најмањи елемент у T, а тиме и једини минимални елемент. Нека је $(x, y) \in T$ и нека тачка није на хипотенузи троугла, тј. $x + 2y < 1$. Ако је $y' = \frac{1-x}{2}$, онда $(x, y') \in T$ и $(x, y) \preceq (x, y)$. Дакле, (x, y) није максималан елемент у T. Но, сваки елемент са хипотенузе јесте максималан. Ако је $x + 2y = 1$ и $(x, y) \preceq (u, v)$, онда је $x \leqslant u$ и $y \leqslant v$, при чему је бар једна од ових неједнакости строга. Стога је $1 = x + 2y < u + 2v$ и $(u, v) \notin T$. Дакле, заиста је свако елемент са хипотенузе максималан и у овом посету не постоји највећи елемент.

1.5 Функције

Дефиниција 6. Нека је $f : X \to Y$ и $A \subset X$, $B \subset Y$. Инверзна слика скупа B при функцији f је

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x \in B)\},$$

а директна слика скупа A при функцији f је

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}.$$

37. а) Нека је $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ пресликавање дефинисано на следећи начин

$$(x, y) \to (2x + y, x + y).$$

Наћи слику скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ ограниченог правама $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.
б) Одредити слику скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ ограниченог хиперболама $xy = 1$, $xy = 2$ и правама $y = x$, $y = 2x$, ако је

$$f(x, y) = (xy, \frac{y}{x}).$$

Решење. У првом случају, слика посматраног скупа је паралелограм, у другом случају је то квадрат.

Дефиниција 7. Нека је $f \subset A \times B$ релација из A у B. Та релација је функционална релација ако за свако $x \in D(f)$ постоји тачно једно $y \in B$такво да $(x, y) \in f$. У том случају уместо $(x, y) \in f$, че71е се пише $y = f(x)$.

Функција са доменом X и кодоменом Y, у ознаци $f : X \to Y$ је уређена тројка (X, Y, f), где су X и Y скупови, а $f \subset X \times Y$ функционална релација за коју је $D(f) = X$.

38. Нека $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и нека су A, A', A_i за $i \in I$ подскупови од X, B, B', B_iза $i \in I$ подскупови од Y (I је неки скуп индекса), а C подскуп од Z. Тада важи

$$(g \circ f)[A] = g[f[A]],$$
$$(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]],$$
$$f^{-1}[\bigcup_{i\in I} B_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i],$$
$$f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i],$$
$$f^{-1}[B \backslash B'] = f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[B'],$$
$$f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i],$$
$$f[\bigcap_{i\in I} A_i] = \bigcap_{i\in I} f[A_i],$$
$$f[A \backslash A'] \supset f[A] \backslash f[A'],$$
$$f[f^{-1}[B]] \subset B,$$
$$f^{-1}[f[A]] \supset A.$$

Решење. За вежбу читаоцу.

39. Нека је $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Тада важи
а) $g \circ f$ је "1-1" $\implies$ f је "1-1",
б) $g \circ f$ је "на" $\implies$ g је "на",
в) $g \circ f$ и $f \circ g$ су бијекције $\implies$ f и g су бијекције.

Решење. Нека је $f(x_1) = f(x_2)$. Тада је и $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, а како је $g \circ f$ ињективна, следи да је $x_1 = x_2$. Произвољан елемент $z \in Z$ је слика од $y = f(x) \in Y$, јер је g сурјективна.

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B,$$

$$\chi_{A\times B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \cdot \chi_B.$$

40. Показати да важи:
а) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$,
б) $A = B \cup C \Leftrightarrow A\triangle B\triangle C = B \cap C$,
в) $x \in A\triangle B\triangle C \Leftrightarrow x$ припада једном или сва три скупа A, B, C.

Решење. $x \in A\triangle B\triangle C \Leftrightarrow \chi_A(x) + \chi_B(x) + \chi_C(x) = 1$ и искористи се асоцијативност збира. Аналогно за остале случајеве.

1.6 Супремум и инфимум, минимум и максимум скупа

41. Одредити $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ за скуп A
а) $A = [0, 5)$,
б) $A = (-1, 3]$,
в) $A = \{|n^2 - 5| : n \in \mathbb{Z}\}$,
г) $A = \{x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{Q}\}$,
д) $A = \{\sin x + \cos x : x \in \mathbb{R}\}$.

Решење. а) $\sup A = 5$, $\max A$ не постоји, $\inf A = 0 = \min A$,
б) $\sup A = \max A = 3$, $\inf A = -1$, $\min A$ не постоји,
в) $\inf A = \min A = 1$, $\sup A = \infty$, $\max A$ не постоји,
г) $\inf A = 2\sqrt{2}$, $\min A$ не постоји, $\sup A = \infty$, $\max A$ не постоји,
д) $\inf A = \min A = -\sqrt{2}$, $\sup A = \max A = \sqrt{2}$.

42. Одредити $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ за скуп $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$.

Решење. $\inf A = 0$ јер је 0 очигледно миноранта, а за $\varepsilon > 0$ по Архимедовој аксиоми постоји n_0 тако да $n_0\varepsilon > 1$ тј. $\varepsilon > \frac{1}{n_0} \in A$.

$\sup A = 1$ јер је 1 очигледно мајоранта и за $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $\varepsilon n_0 > 1$, тј. $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_0} \in B$.

43. Одредити $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ за скуп
а) $A = \{\frac{2n+1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$,
б) $A = \{2 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
в) $A = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
г) $A = \{[-2, -1] \cup (1, 3)\} \cap \mathbb{Q}$.

Решење. а)$\inf A = \min A = 2$, $\sup A = 2$, $\max A$ не постоји,
б)$\inf A = \min A = 1$, $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$,
в) $\inf A = \min A = 1$, $\sup A = 2$, $\max A$ не постоји,
г) $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = 3$, $\max A$ не постоји.

44. Нека су $B, C \subset \mathbb{R}$, $A = B \cup C$. Доказати $\sup A = \max\{\sup B, \sup C\}$.

Решење. Нека је $\sup B = b$ и $\sup C = c$. Претпоставимо да је $b \geqslant c$. За свако $x \in B$ је $x \leqslant b$ и за свако $x \in C$ је $x \leqslant c$. Дакле, $x \leqslant \max\{b, c\} = b$ тј. b је горње ограничење. Нека је $\varepsilon > 0$, тада $b-\varepsilon$ није ограничење за B, па ни за $B \cup C$, односно мора бити $\sup B \cup C = b$. Аналогно се доказује случај $c \geqslant b$.

45. Нека је $A \subset B$. Доказати
а) $\sup A \leqslant \sup B$,
б) $\inf A \geqslant \inf B$.

Решење. $\sup B$ је горње ограничење скупа A, а како је $\sup A$ најмање горње ограничење скупа A,онда важи $\sup A \leqslant \sup B$. Слично, $\inf B$ је доње ограничење скупа A, а како је $\inf A$ највеће доње ограничење, то је $\inf A \geqslant \inf B$.

46. Нека је $A \subset \mathbb{R}$ и $A \neq \varnothing$. Доказати да је $\inf A \leqslant \sup A$ и да једнакост важи акко је A једночлан. Шта се дешава у случају $A = \varnothing$?

Решење. Како је за свако $x \in A$ $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$. Ако је $\inf A = \sup A$, то је A једночлан (иначе, $x, y \in A$ и важи $\inf A \leqslant x < y \leqslant \sup A$, па је $\inf A < \sup A$. Контрадикција). За једночлан скуп $A = \{x\}$, $x = \inf A = \sup A$. За празан скуп A је $\inf A = +\infty$, $\sup A = -\infty$.

47. Нека је $E = \{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ за $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-|x|}$. Одредити $\sup E$, $\inf E$, $\max E$, $\min E$.

Решење. Посматрајмо график функције. Лако се провери да је $\max E = \sup E = 1$. Минимум скупа не постоји, а $\inf E = 0$.

48. Нека је $-A = \{-x : x \in A\}$. Доказати
а) $\inf(-A) = -\sup A$,
б) $\sup(-A) = -\inf A$.

Решење. Нека је $\sup A = M$, тада је $-M$ доње ограничење за $-A$. За $\varepsilon > 0$ је $-x < -M + \varepsilon$, па је $\inf(-A) = -\sup A$. Аналогно за другу једнакост.

49. Нека је $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Доказати
а) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
б) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Решење. Нека је $M_1 = \sup A$ и $M_2 = \sup B$, тада је $M_1 + M_2$ мајоранта за $A + B$. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада, постоји $x \in A$ тако да $x > M - \frac{\varepsilon}{2}$ и постоји $y \in B$ тако да $y > M_2 - \frac{\varepsilon}{2}$. Следи, $x + y > M_1 + M_2 - \varepsilon$, односно $\sup A + B = M_1 + M_2$. Аналогно се доказује други случај.

50. Нека је $A \cdot B = \{xy : x \in A, y \in B\}$, $A, B \subset \mathbb{R}_+$. Доказати
а) $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$,
б) $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$.
Да ли тврђење важи за произвољне подскупове од $\mathbb{R}$?

Решење. Нека је $M_1 = \sup A$ и $M_2 = \sup B$, тада је $M_1 M_2$ горње ограничење за AB. За $\varepsilon > 0$ постоји $x \in A$ тако да $x > M_1 - \frac{\varepsilon}{2M_2}$ и постоји $y \in B$ тако да $y > M_2 - \frac{\varepsilon}{2M_1}$. Тада, $xy > M_1 M_2 - \varepsilon$, односно $\sup AB = M_1 M_2$. Аналогно се доказује за инфимум. Да за произвољне подскупове реалне праве тврђење не важи види се из следећег примера: $A = (-3, -1)$, $B = [0, 1]$, $\sup A = -1$, $\sup B = 1$, $\sup AB = \max AB = 0$.

1.7 Линеарне хомогене диференцне једначине са кораком 2 и 3

Нека је x_1, x_2 дато и

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,\ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Нека су λ_1, λ_2 решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n,$$

при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

51. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n,$$

ако је $x_1 = 5$ и $x_2 = 13$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$ су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n + 3^n$.

52. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n,$$

ако је $x_0 = 3$ и $x_1 = 1$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 2x - 3 = 0$ су $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Дакле, опште решење је $x_n = 2(-1)^n + 2^n$.

53. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} + 4x_n,$$

ако је $x_1 = 4$ и $x_2 = 12$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 4x + 4 = 0$ су $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n(1 + n)$.

54. Одредити општи члан Фибоначијевог низа ($f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_1 = f_2 = 1$).

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - x - 1 = 0$ су $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, па је опште решење облика $f_n = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = -C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Дакле, опште решење је $f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

Нека су x_1, x_2, x_3 дати и

$$x_{n+3} = \alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3\lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n.$$

55. Решити диференцну једначину

$$x_{n+3} = -x_{n+2} + 17x_{n+1} - 15x_n,$$

ако је $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$. Опште решење је облика $C_1 + C_2 3^n + C_3(-5)^n$. Из почетних услова се одређују константе $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Дакле, опште решење је $x_n = 3^n$.

56. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 4y_n,$$

ако је $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Решење. Из прве једначине је $y_n = 2x_n - x_{n+1}$, односно $y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_{n+2}$. Сменом у другу једначину, добија се $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$, одакле следи $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Из почетних услова се одређују C_1, C_2, односно $x_n = 3^n(2-n)$,а добија се и $y_n = 3^n(n+1)$.

57. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n,$$

ако је $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

Решење. Решавањем система се добија карактеристична једначина за x_n: $x^2 - 4x + 1 = 0$, чији су корени $2 \pm \sqrt{3}$. Лако се налази $x_n = \frac{(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n}{2}$, $y_n = \frac{\sqrt{2}}{6}((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)$.

58. Нека је

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}, \ p, q, r, s \in \mathbb{R},$$
$$x_{n+1} = px_n + qy_n,$$
$$y_{n+1} = rx_n + sy_n,$$

при чему је $x_1 = a_1 = a$, $y_1 = 2$. Доказати да је

$$a_n = \frac{x_n}{y_n},$$

ако је $y_n \neq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Лако се проверава индукцијом.

59. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{1 - 4a_n}{1 - 6a_n},$$

ако је $a_1 = 1$.

Решење. Користи се претходни задатак. Треба решити систем диференцних једначина,

$$x_{n+1} = 4x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = 6x_n - y_n.$$

Добија се $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, одакле се налази $x_n = C_1 + C_2 2^n$, а уврштавањем почетних услова, $x_n = 2^n - 1$, $y_n = 2^{n+1} - 3$. Овде је $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.

60. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},$$

ако је $a_0 = 1$.

Решење. Треба решити систем

$$x_{n+1} = x_n - y_n,$$
$$y_{n+1} = x_n + 3y_n,$$

уз почетне услове $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Лако се налази $x_n = 2^n(1-n)$, $y_n = 2^n(1+n)$ и $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.

1.8 Важне неједнакости

61. Доказати неједнакост паралелограма:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_i|.$$

Решење. За $n = 1$ важи једнакост, а случај $n = 2$ је неједнакост троугла. Претпоставимо да тврђење важи за n и докажимо га за $n + 1$:

$$|\sum_{k=1}^{n+1} a_i| = |\sum_{k=1}^{n} a_i + a_{n+1}| \leqslant |\sum_{k=1}^{n} a_i| + |a_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_i|.$$

62. Доказати Кошијеву неједнакост

$$(\sum_{k=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_i^2)(\sum_{k=1}^{n} b_i^2).$$

Решење. Како је

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geqslant 0,$$

то је дискриминанта непозитивна, одакле следи тражена неједнакост.

63. Доказати неједнакост средина $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n$:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Решење. Неједнакост квадратне и аритметичке средине је последица Кошијеве неједнакости, док је неједнакост аритметичке и геометријске средине доказана раније. Неједнакост геометријске и хармонијске средине следи применом аритметичко-геометријске неједнакости на $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots \frac{1}{a_n}$.

64. Доказати Ацелову неједнакост: Ако је $a_1^2 > \sum\limits_{i=2}^{n} a_i^2$ или $b_1^2 > \sum\limits_{i=2}^{n} b_i^2$, онда

$$(a_1b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_ib_i)^2 \geqslant (a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2)(b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2).$$

Решење. Посматрајмо непрекидну функцију

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 - \sum_{i=2}^{n}(a_ix - b_i)^2.$$

Имамо да је $f(\frac{b_1}{a_1}) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Дакле, f има бар један корен и дискриминанта је ненегативна, одакле следи тражена неједнакост.

65. Доказати неједнакости са елементарним функцијама:

$$\text{За } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ важи } \sin x < x < \tan x.$$

$$\text{За свако } x \in \mathbb{R} \text{ важи } |\sin x| \leqslant |x|.$$

Решење. Функција $f(x) = x - \sin x$ је растућа на $(0, \frac{\pi}{2})$ је њен први извод ненегативан, па је $f(x) \geqslant f(0) = 0$, одакле због непарности и 2π-периодичности синусне функције следи $|\sin x| \leqslant |x|$ за свако реално x (једнакост важи за $x = 0$). Функција $g(x) = \tan x - x$ има ненегативан први извод на $(0, \frac{\pi}{2})$, па је растућа и $g(x) \geqslant g(0) = 0$, одакле следи неједнакост $x < \tan x$.

Дефиниција 8. За функцију $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна ако за сваке две тачке $x_1, x_2 \in (a, b)$ и свака два ненегативна реална броја важи

$$f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Функција је конкавна ако важи

$$f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

66. Доказати Јенсенову неједнакост: Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ненегативни бројеви такви да је $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$. Тада за све $x_1, x_2, \dots x_n \in (a, b)$ важи

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Решење. За $n = 1$ и $n = 2$ неједнакост важи. Претпоставимо да важи за n и докажимо да важи за $n + 1$: На основу дефиниције конвексности је

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leqslant f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),$$

одакле је кори71ењем индуктивне хипотезе

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

67. Доказати Јангову неједнакост: Нека су p и q спрегнути индекси $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и u и v ненегативни реални бројеви.
Ако је $p > 1$ и $q > 1$, тада је

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

при чему једнакост важи акко је $u^p = v^q$.
Акоје $p < 1$ и бројеви u, v су позитивни, тада је

$$uv \geqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

при чему једнакост важи акко је $u^p = v^q$.

Решење. Следи из Јенсенове неједнакости за $n = 2$, експоненцијалну функцију и $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $x = u^p$, $y = v^q$.

68. Доказати Хелдерову неједнакост: Нека су p и q спрегнути индекси $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и нека су $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$ ненегативни реални бројеви.
Ако је $p > 1$, тада важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}).$$

Ако је $p < 1$, тада важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}).$$

Једнакост у оба случаја важи акко је $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$.

Решење. Доказаћемо прву неједнакост, доказ друге се аналогно изводи. Означимо са $X = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ и $Y = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$. Ако у Јанговој неједнакости заменимо $u = \frac{x_i}{X}$, $v = \frac{y_i}{Y}$, добијамо за $i = 1, 2 \dots n$ да важи

$$\frac{x_i y_i}{XY} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X^p} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y^q},$$

одакле сумирањем следи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{XY} \leqslant 1,$$

што је и требало извести.

69. Доказати неједнакост Минковског: Нека је $1 \leqslant p < \infty$. Тада важи

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Решење.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Дељењем неједнакости са $(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ добија се жељена неједнакост.

70. Доказати Чебишовљеву неједнакост: Ако су $x_1, x_2, \dots x_n$ и $y_1, y_2, \dots y_n$ растући низови бројева, тада важе неједнакости

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) \leqslant n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

при чему једнакости важе акко је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ или $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

Докажимо најпре десну неједнакост.

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(ny_i - \sum_{j=1}^{n} y_j),$$

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(ny_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n}(y_i - y_j)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)(y_j - y_i).$$

За доказ десне неједнакости применити доказану неједнакост на (x_i) и $(-y_{n+1-i})$.

Решење.

1.9 Комплексни бројеви

71. Израчунати з ако важи $\overline{z} = z^2$.

Решење. Нека је $z = x + iy$. Тада $x - iy = x^2 - y^2 + 2ixy$, одакле следи $x = x^2 - y^2$и $y = 2xy$. Дакле, $x = -\frac{1}{2}$ или $y = 0$. У првом случају се добија $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а у другом $x = 0$ или $x = 1$. Решења су $\{0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

72. Нека је $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $z_1 z_2 \neq -1$. Доказати $z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

Решење. Покажимо да је $z = \overline{z}$:

$$\overline{z} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + z_1 z_2} \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|^2 z_2 + |z_2|^2 z_1}{z_1 z_2 + |z_1|^2 |z_2|^2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = z.$$

73. Наћи $\sqrt[4]{16}$.

Решење. Важи формула за n-ти корен комплексног броја:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}), \text{ за } k = 0, 1, \ldots n - 1.$$

Дакле, корени су ± 2, $\pm 2i$.

74. Представити графички области а) $Imz^2 > 2$,
б) $|z| > 2 + Imz$,
в) $\frac{\pi}{6} < argz < \frac{\pi}{4}$,
г) $1 < |z| < 3$,
д) $|z - z_0| \leqslant 6$.

Решење. Видети слику.

75. Да ли Абелова група $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ може да се уреди?

Решење. Не може. Доказ- свођењем на контрадикцију. Претпоставимо да може. Како је $i \neq 0$, тада би било $-1 = i^2 > 0$. Контрадикција.

76. Нека је $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3i|^2 \geqslant 3|z|^2 + 1\}$ и $B = \{z \in \mathbb{C} : |z^4 + i| = |z^4 - i|\}$. Наћи $A \cap B$.

Решење. Одредимо A. Нека је $z = x + iy \in A$. Тада је $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \leqslant (\frac{5}{2})^2$. Одредимо B. Нека је $z^4 = x + iy$. Тада је $x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$, односно $y = 0$. Дакле,

$$z^4 = \begin{cases} 0, x = 0, \\ |x|e^{i0}, x > 0, \\ |x|e^{i\pi}, x < 0, \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \sqrt[4]{|x|}e^{ik\frac{\pi}{2}}, k = 0, 1, 2, 3, x > 0, \\ \sqrt[4]{|x|}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2})}, k = 0, 1, 2, 3, x < 0. \end{cases}$$

77. Решити $(12 - 5iz)(z - i) = z^3 + i$.

Решење. Како је $z^3 + i = z^3 - i^3$, добија се

$$(z - i)(12 - 5iz + z^2 + zi - 1) = 0,$$

одакле је $z = i$ или $z^2 + 6iz - 13 = 0$, односно нуле су $z = i$, $z = -3i \pm 2$.

78. Решити $|z + 2 + i|^2 + 4\overline{z} + 6 + 4i = 0$.

Решење. Нека је $z = x + iy$. Тада је $x^2 + 8x + 11 + y^2 + 2y = 0$ и $1 - y = 0$, односно $y = 1$ и $x = -4 \pm \sqrt{2}$. Дакле, решења су $-4 - \sqrt{2} + i$ и $-4 + \sqrt{2} + i$.

79. Одредити решења система

$$\omega(z\overline{\omega} - 1) = i(z\overline{w} - 1),$$

$$8\omega^2 z^2 = |z|^3.$$

Решење. Из прве једначине система се добија $\omega = i$ или $\omega = \frac{1}{z}$. Размотримо случај $\omega = i$: Тада је из друге једначине система $-8z^2 = |z|^3$, а како је $z = |z|e^{i\phi}$, добија се $z = 0$ или $z \neq 0$, $-8e^{2i\phi} = |z|$, одакле се добија $|z| = 8$, $\phi = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1$.
Размотримо случај $\omega = \frac{1}{z}$:
Добија се $8(\frac{z}{\overline{z}})^2 = |z|^3$, одакле због $z = |z|e^{i\phi}$ следи $|z| = 2$ и $\phi = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
Дакле, $(z, \omega) \in \{(0, i), (-8, i), (8, i), (2, \frac{1}{2}), (2i, \frac{i}{2}), (-2i, \frac{-i}{2}), (-2, -\frac{1}{2})\}$.

80. Решити $2|z|Re(z) = \sqrt{5}(\overline{z} - 2iz - 2)$.

Решење. Нека је $z = x + iy$. Тада следи $2x\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}(x + 2y - 2)$ и $2x + y = 0$. Сменом друге једначине у прву добија се $2x|x| + 3x = -2$, одакле се у случају $x < 0$ налази решење $z = -\frac{1}{2} + i$.

1.10 Разни задаци

81. Скицирати график функције $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Решење. Домен функције је $\mathbb{R}$. Функција је парна и пресјеца апсцису у тачкама $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$. Функција је позитивног знака на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, а негативног знака на $(-2, 2)$. Функција нема асимптота, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Нуле првог извода се достижу за $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, а знак првог извода је позитиван на $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, а негативан на $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Други извод је једнак нули за $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, тј то су превојне тачке, а други извод је позитивног знака на $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$.

82. У координатној равни нацртати скуп $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [x]y = x\{y\}\}$.

Решење.

$$x = n + \alpha, \alpha \in [0, 1),$$
$$y = m + \beta, \beta \in [0, 1),$$

Из $n(m + \beta) = (n + \alpha)\beta$ следи $nm = \alpha\beta \in [0, 1)$, односно $nm = 0$, тј.бар један од бројева је цео.

83. Да ли постоји пресликавање $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ тако да је $f(f(x)) = x + 1$ за свако $x \in \mathbb{Z}$?

Решење. Применом f на $f(f(x)) = x + 1$, добија се $f(f(f(x))) = f(x) + 1 = f(x + 1)$ и $f(0) = m \in \mathbb{Z}$. Стога имамо

$$f(m) = f(m-1) + 1,$$
$$f(m-1) = f(m-2) + 1,$$

...

$$f(1) = f(0) + 1,$$
$$f(0) = m,$$

одакле се сабирањем добија $f(m) = 2m$ и $2m = 1$. Контрадикција.

84. Наћи највећу вредност функције $f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$ на интервалу $(0, \infty)$.

Решење. Применом аритметичко-геометријске неједнакости, добија се

$$f(x) \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 1,$$

при чему неједнакост важи за $x = 3$.

85. Доказати неједнакост

$$a + b + c \leqslant \frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2},$$

за $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Решење. Приметимо да је $\frac{2a^3}{a^2+b^2} \geqslant 2a - b$, аналогно за b, c. Једнакост се достиже за $a = b = c$.

86. Доказати да је

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{b+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3},$$

за све $a, b, c, d > 0$.

Решење. Нека је Iизраз на левој страни. Тада је

$$4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)I \geqslant (a + b + c + d)^2.$$

Како је $3(a + b + c + d)^2 \geqslant 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$, то следи неједнакост.

87. Решити диференцну једначину

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n,$$

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Решење. Карактеристична једначина је $x^2 - x + 1 = 0$, а опште решење је $a_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3}$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

88. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Одредити $f[A]$ и $f^{-1}[B]$,за $A = [-1, 0) \cup (1, 2)$, $B = (-1, 4]$.

Решење. $f[A] = (-1, 3)$ и $f^{-1}[B] = [-\sqrt{5}, 0) \cup (0, \sqrt{5}]$.

89. Одредити инфимум и супремум скупа $S = \{(-1)^n \frac{2n+3}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Решење. Елементи скупа S су облика $(-1)^n[2 + \frac{5}{2n}]$. Посматрајмо одговарајући низ. Чланови тог низа са непарним индексима чине растући низ који тежи ка -2кад $n \to \infty$, а чланови низа који одговарају непарним индексима чине опадајући низ који тежи ка 2 кад $n \to \infty$. Следи, сви чланови су већи од првог, а мањи од другог члана овог низа, па је $\inf S = -\frac{9}{2}$, а $\sup S = \frac{13}{4}$.

90. Нека је $S = \{\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$. Наћи $\sup S$ и $\inf S$.

Решење. За $n = 1$ је $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} = m + 1 + \frac{2}{m}$, па је $\sup S = \infty$. Како је $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} > \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geqslant 2$ и како за $m = n$ важи да $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{2}{m} \to 2, m \to \infty$, следи да је $\inf S = 2$.

91. Одредити $f^{-1}[A]$ ако је $A = [0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Решење. $f^{-1}[A] = [0, \infty)$, што се добија применом АГ неједнакости за $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2 + 1} \leqslant \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

92. Нека је $f(n) = 9 \cdot 4^n - 13 \cdot 6^n + 4 \cdot 9^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $A = (-\infty, 0]$. Одредити $f^{-1}[A]$.

Решење. Треба решити $(9 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n)(2^n - 3^n) \leqslant 0$, одакле се добија $f^{-1}[A] = \{1, 2\}$

93. Проверити да је производ две парне (непарне) функције парна функција и да је производ парне и непарне функције непарна функција.

Решење. По дефиницији.

94. Одредити укупан број бинарних релација на n-елементном скупу. Колико има рефлексивних релација? А симетричних?

Решење. Проблем укупног броја бинарних релација над n-елементним скупом је еквивалентан попуњавању квадратне таблице $n \times n$ бројевима 0 или 1, односно износи 2^{n^2}. Број рефлексивних релација је једнак броју могућности да се попуни таблица $n \times n$ ако је попуњена главна дијагонала, тј. број могућности је 2^{n^2-n}. Број начина за попуњавање таблице која одговара симетричној релацији је $2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

95. Доказати да је пресликавање $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где је $f(n) = \{\alpha n\}$, ињективно за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Претпоставимо супротно, да је $f(n) = f(m)$ за $m \neq n$. Тада, $\{\alpha n\} = \{\alpha m\}$ тј. $\alpha n = p + \alpha m$, за неко $p \in \mathbb{Z}$. Међутим, тада је $\alpha = \frac{p}{n-m} \in \mathbb{Q}$, контрадикција.

96. Наћи максимум функције $f(x, y, z) = 5x - 6y + 7z$ на елипсоиду $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Решење. Применом Коши-Шварцове неједнакости се добија

$$(5x-5y+7z)^2 = (\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}x - \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}y + \frac{7}{2} \cdot 2z)^2 \leqslant ((\frac{5}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{6}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{7}{2})^2)(2x^2+3y^2+4z^2) = \frac{147}{4},$$

одакле је максимум функције $\frac{\sqrt{147}}{2}$.

1.11 Низови

Дефиниција 9. $a \in \mathbb{R}$ је гранична вредност низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon)$$

Теорема. Претпоставимо да за низове $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Тада је и $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Теорема. Монотон и ограничен низ конвергира.

97. Доказати по дефиницији да је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

Решење. Тривијално.

98. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n^3}{2n^2+3} - \frac{5n^2+1}{5n+1})$.

Решење. Лимес је $\frac{1}{5}$.

99. Ако је $|a|, |b| < 1$, наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b^k}$.

Решење. Лимес је $\frac{b-1}{a-1}$.

100. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Решење. Применом теореме о три лимеса $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, налази се да је лимес једнак 1.

101. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Решење. Постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да $m > a$. Стога,

$$0 < \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{m-1}\frac{a}{m}\cdots\frac{a}{n-1}\frac{a}{n} \leqslant \frac{a^m}{m!}(\frac{a}{m})^{n-m+1} \to 0, n \to \infty.$$

102. Доказати (за $a > 1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

Решење. Запишимо $\frac{n^k}{a^n} = (\frac{n}{\sqrt[k]{a^n}})^k$ и уведимо смену $b = \sqrt[k]{a} > 1$. Како је на основу биномне формуле

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+b-1)^n} \leqslant \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} = \frac{2}{(b-1)^2}\frac{1}{n-1} \to 0, n \to \infty,$$

то је и

$$0 < (\frac{n}{b^n})^k \leqslant (\frac{2}{(b-1)^2}\frac{1}{n-1})^k \to 0, n \to \infty.$$

103. Доказати (за $a > 1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

Решење. Доказ по дефиницији. На основу претходног задатка, како је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{\varepsilon n}} = 0$, за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\frac{1}{a^{\varepsilon n}} \leqslant \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1,$$

одакле је

$$\log_a 1 \leqslant \log_a n < \log_a a^{\varepsilon n},$$
$$0 \leqslant \log_a n < \varepsilon n,$$
$$0 \leqslant \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

104. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Решење. Приметимо да је $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ за $n \geqslant 1$. На основу АГ неједнакости је

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1\cdot 1\cdots\sqrt{n}\sqrt{n}} \leqslant \frac{1+1+\cdots\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} \to 0+1 = 1, n \to \infty.$$

105. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{10}}$.

Решење. Применом теореме о три лимеса, уз кори71ење претходног задатка имамо

$$\sqrt[n]{1^{10}} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^{10}} \leqslant \sqrt[n]{n^{11}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^{10}} = 1.$$

106. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n} = \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}$

Решење. Како је $a_i \leqslant \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ за $i = 1, \dots k$, а максимум коначног скупа се достиже, то је

$$\max\{a_1, a_2, \dots a_k\} \leqslant \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} \leqslant k^{\frac{1}{n}} \max\{a_1, a_2, \dots a_k\}.$$

107. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + n^b}$, где су $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Решење. Размотримо следеће случајеве:
1) $a > 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + n^b} = a\sqrt[n]{1 + \frac{n^b}{a^n}} \to a, n \to \infty.$$

2) $0 < a < 1$:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{n}^b \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^b} + 1} \to 1, n \to \infty.$$

3) $a = 1$:

$$\sqrt[n]{1 + n^b} \to 1, n \to \infty.$$

108. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}k^2},$$

померањем индекса у производима у бројиоцу и скраћивањем одговарајућих разломака, добија се

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n-1}{2n},$$

одакле пуштањем лимеса имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}.$$

109. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}})$.

Решење. Како је

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)},$$

померањем индекса и скраћивањем разломака се добија

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

110. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Решење.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)},$$

а важи идентитет $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$, то након померања индекса у производу и канцелације, имамо

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}.$$

Теорема. Нека је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

111. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n}$.

Решење. Овде је $y_n = n$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n} = 1.$$

112. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5}$.

Решење. Овде је $y_n = n^5$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5} = \frac{1}{5}$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5} = \frac{1}{5}.$$

113. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$.

Решење. Овде је $y_n = n^{p+1}$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p}$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p}.$$

114. Доказати Кошијев став: Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = a$.

Решење. Овде је $y_n = n$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1} = a$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = a.$$

115. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Решење. Доказаћемо да је $n! > (\frac{n}{3})^n$ индукцијом. За $n = 1$ неједнакост је тачна. Претпоставимо да је тачна за n и докажимо за $n + 1$:

$$(n+1)! = n!(n+1) > (\frac{n}{3})^n(n+1) = (\frac{n+1}{3})^{n+1}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} > (\frac{n+1}{3})^{n+1}.$$

Последња неједнакост је тачна, јер је (применом биномне формуле)

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Даље се доказ изводи на основу теореме о три лимеса.

116. Доказати да је низ $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ растући и ограничен одозго, а низ $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ опадајући и ограничен одоздо. Зато они имају заједничку граничну вредност:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e.$$

Решење. Како је

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}\frac{n+1}{n} > (1-\frac{1}{n+1})\frac{n+1}{n} = 1,$$

а применом Бернулијеве неједнакости је

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}\frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\frac{n+1}{n} < 1,$$

то је низ x_n растући, а y_n је опадајући. Такође, $0 < y_n - x_n < \frac{e}{n} \to 0$, $n \to \infty$, одакле следи да су лимеси ових низова једнаки међусобно и једнаки e.

117. Нека је p_n произвољан низ бројева који тежи $+\infty$ и q_n произвољан низ бројева који тежи $-\infty$ кад $n \to \infty$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{p_n})^{p_n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{q_n})^{q_n}.$$

Решење. Нека је n_k било који број целих бројева који тежи $+\infty$. Тада је

$$\lim_{n_k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e.$$

Ако низ произвољних бројева p_k тежи $+\infty$, то постоји такав низ цијелих бројева n_k да је $n_k < p_k < n_k + 1$ и $n_k \to \infty$. Како лева и десна страна неједнакости

$$(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} < (1+\frac{1}{p_k})^{p_k} < (1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}$$

теже e, то је по теореми о три лимеса и

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{p_n})^{p_n} = e.$$

Аналогно за негативан низ.

118. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

Решење. Посматрати низ $\frac{\ln \frac{n!}{n^n}}{n}$ и применити Штолцову теорему.

119. Доказати:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e,$$
$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n} = e^{-1},$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^{n} = e^{2},$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+3}{2n+1})^{n} = e.$$

Решење. Кори7ењем претходног задатка и чињенице да непрекидна експоненцијална функција комутира са лимесом.

120. Доказати да је $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и да је $\frac{r}{r+1} \leqslant \ln\left(1+r\right) \leqslant r$ за свако $r \in \mathbb{Q}$.

Решење. На основу једног од претходних задатака $(1+\frac{1}{n}) \leqslant e \leqslant (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Логаритмовањем и сређивањем израза добија се жељена неједнакост. Уопштавањем се добија неједнакост и за рационалне бројеве.

Дефиниција 10. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geqslant n \geqslant n_0 \implies |x_m - x_n| < \varepsilon),$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N} \implies |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon).$$

Теорема. Сваки конвергентан низ је Кошијев. У комплетном метричком простору сваки Косхијев низ конвергира.

121. Доказати да низ $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ конвергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да је низ Кошијев у $\mathbb{R}$:

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

122. Доказати да низ $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$ конвергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да је низ Кошијев у $\mathbb{R}$:

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{(n+p)}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - (\frac{1}{2})^p}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

123. Доказати да низ $a_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$ конвергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да је низ Кошијев у $\mathbb{R}$:

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

124. Доказати да низ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ дивергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да низ није Кошијев у $\mathbb{R}$. Нека је $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geqslant \frac{p}{n+p}.$$

Нека је $p = n$. Тада је

$$|x_{2n} - x_n| \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

125. Доказати да низ $x_n = \frac{1}{\log 2} + \cdots + \frac{1}{\log n}$ дивергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да низ није Кошијев у $\mathbb{R}$. Нека је $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\log n+1} + \cdots + \frac{1}{\log n+p} \geqslant \frac{p}{\log(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

Нека је $p = n$. Тада је

$$|x_{2n} - x_n| \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

126. Доказати да низ $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \leqslant 9$ конвергира.

Решење. Низ је растући:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant 0.$$

Низ је ограничен одозго:

$$x_n \leqslant 9 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^n} = 9\frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = 10 - 10^n < 10.$$

Монотон и ограничен низ конвергира.

127. Доказати да низ $x_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \ldots (1 + \frac{1}{2^n})$.

Решење. Низ је растући:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1.$$

Низ је ограничен одозго:

$$\ln x_n = \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{4}) + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{2^n}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1,$$

$$x_n < e.$$

Низ је монотон и ограничен, па конвергира.

128. Нека је дат низ: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}$. ($n$ корена). Доказати да конвергира и наћи лимес.

Решење. Низ је растући, што се показује индукцијом. Важи $x_1 < x_2$. Претпоставимо да важи $x_n < x_{n+1}$. Тада је и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + x_{n+1}} = x_{n+2}$. Низ је ограничен одозго са 2, што се такође проверава индукцијом. Важи $x_1 < 2$. Претпоставимо да је $x_n < 2$. Тада је и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

129. Нека је $2 < a_1 < 3$ и $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Докажимо да је низ ограничен (индукцијом). Важи $2 < a_1 < 3$. Претпоставимо да је $2 < a_n < 3$. Тада је и $a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{5} \in (2, 3)$. Низ је опадајући: $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n-2)(a_n-3)}{5} < 0$. Следи, низ конвергира. Проласком лимесом кроз једнакост $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$ имамо $a^2 - 5a + 6 = 0$. Због описаних својстава низа, мора бити $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

130. Нека је $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{4x_n+2}{x_n+3}$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Низ је добро дефинисан (индукцијом се показује да је $x_n > 0$). Низ је ограничен одозго са 4 (индукцијом). Низ је растући, што се такође проверава индукцијом. Дакле, низ конвергира и $x = \frac{4x+2}{x+3}$, одакле мора бити $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

131. Нека је $a > b > 0$ и $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $y_1 = \sqrt{ab}$ и $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Доказати да низови x_n и y_n конвергирају.

Решење. Индукцијом се проверава да је низ y_n добро дефинисан, док је добра дефинисаност низа x_n очигледна. Приметимо да је на основу АГ неједнакости $x_n \geqslant y_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Низ x_n је растући, док је низ y_n опадајући. Оба низа су ограничена. Нека је $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Пуштањем лимеса кроз рекурентне формуле које дефинишу посматране низове, добија се $x = y$.

132. Нека је $x_1 = 0$ и $x_n = \frac{1}{1+x_n}$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Индукцијом се показује да је низ добро дефинисан, а одатле следи и ограниченост низа одозго са 1. Подниз чланова са непарним индексима је растући, а подниз чланова са парним индексима је опадајући, што се проверава индукцијом. Нека је $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$. Тада, $x = \frac{1}{1+y}$ и $y = \frac{1}{1+x}$, одакле следи $x = y$. Дакле, $x^2 + x - 1 = 0$ и $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (друго решење одбацујемо због његове негативности).

133. Нека је $x_0 = a > 0$ и $x_{n+1} = \frac{3x_n^2}{1+2x_n}$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Низ је добро дефинисан, што се проверава индукцијом. Ако је $x_n < 1$, низ опада, а ако је $x_n > 1$ низ расте. Проверава се да за $0 < a < 1$ важи $x_n < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а за $a > 1$ је $x_n > 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. У првом случају, гранична вредност је 0, а у другом случају низ дивергира.

134. Нека је $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $x_1 = a \in \mathbb{R}$. Испитати конвергенцију низа.

Решење. За $a = 0$ или $a = 1$ низ је константан (сваки члан је једнак 1) и конвергира. Претпоставимо да је $a \neq 1 = 0$, $a \neq 1$. Тада, низ је добро дефинисан и $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$, па је растући. Кандидат за лимес је 1. У случајевима $a > 1$ и $a < 0$ низ дивергира. У случају $0 < a < 1$, низ је ограничен одозго са 1 и конвергира. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ за $a \in [0, 1]$.

135. Доказати да $\sin n$ и $\cos n$ дивергирају.

Решење. Претпоставимо супротно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$. Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = \sqrt{1-a^2}$. Са друге стране, због $\sin 2n = 2\sin n \cos n$, мора бити $a = 2a\sqrt{1-a^2}$ и због $\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n$ мора бити $\sqrt{1-a^2} = 1 - 2a^2$. Из прве једнакости је $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, сменом у другу, добија се $\frac{1}{4} = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$. Контрадикција.

Дефиниција 11. Подниз низа x_n је пресликавање $x \circ \varphi$, где је $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које је "1-1"и строго растуће.

Дефиниција 12. x је тачка нагомилавања низа x_n ако у свакој ε-околини има бесконачно много чланова низа.

Теорема. Сваки ограничен низ има тачку нагомилавања.

Теорема. Тачка x је тачка нагомилавања низа акко постоји подниз x_{n_k} тако да $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

136. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $(-1)^n(2 + \frac{3}{n})$.

Решење. Низ $(-1)^n$ дивергира и има две тачке нагомилавања, -1 и 1, док низ $2 + \frac{3}{n}$ конвергира ка 2. Скуп тачака нагомилавања је $\{-2, 2\}$.

137. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $(1+\frac{1}{n})^n(-1)^n + \sin n\pi 4$.

Решење. Како је

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e,$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k, \\ -1, & n = 2k+1, \end{cases}$$

и

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0 & n = 8k, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+1, \\ 1, & n = 8k+2, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+3, \\ 0 & n = 8k+4, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+5, \\ -1, & n = 8k+1, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+7, \end{cases}$$

то је скуп тачака нагомилавања $A = \{-e-\frac{\sqrt{2}}{2}, -e+\frac{\sqrt{2}}{2}, e, e-1, e+1\}$.

138. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $\frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

Решење. Аналогно претходним задацима, скуп тачака нагомилавања је $\{-\frac{1}{2}, 1\}$.

139. Нека је $x_1 \in (0,1)$ и $x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+x_k)$ за $n > 1$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решење. Индукцијом (уз кори71ење неједнакости $\ln(1+x) \leqslant x$) се показује да је $x_n \in (0,1)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $nx_{n+1}-(n-1)x_n = \ln(1+x_n)$, тј. $x_{n+1}-x_n = \frac{\ln(1+x_n)-x_n}{n} < 0$, то је низ опадајући. Дакле, низ x_n конвергира и за његов лимес важи $x = \ln(1+x)$, односно $x = 0$.

140. Нека је $x_0 \in (0,\pi)$ и $x_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin x_k$ за $n > 1$. Израчунати (ако постоји) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $x_n \in (0,\pi)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $nx_n-(n-1)x_{n-1} = \sin x_n$, то је $x_n - x_{n-1} = \frac{\sin x_n - x_n}{n} \leqslant 0$, па је низ опадајући. Следи, конвергира и за његов лимес важи $x = \sin x$ на основу Кошијеве теореме. Коначно, закључујемо $x = 0$.

141. Доказати
$$\lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e,$$
$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}, 0<\theta_n<1.$$

Решење. Љашко, задатак 35.

142. Доказати да је e ирационалан.

Решење. Љашко, задатак 35.

143. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a, a>0.$

Решење. Љашко, задатак 39.

144. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|.$

Решење. $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})| = \lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1}-\pi n)| = \lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\frac{\pi(n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+n})| = |\sin\frac{\pi}{2}| = 1.$

145. Доказати да $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ конвергира.

Решење. Низ је растући. Покажимо да је и ограничен: $a_n=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{4}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}<\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}=\sqrt{2}b_n$. Како је $b_{n+1}=\sqrt{1+b_n}$, лако се проверава да је b_n ограничен одозго са 2, што значи да је a_n ограничен одозго са $2\sqrt{2}$. Низ a_n конвергира.

146. Нека је $0<x_0<1$ и $x_{n+1}=x_n-x_n^2$, $n\geqslant 0$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $0 < x_n < 1$. Низ је опадајући и конвергира ка 0. Применом Штолцовог става је $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n) = 1$.

147. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Решење. На основу задатка са претходних цасова је $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \gamma+\ln n+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ кад $n\to\infty$. Слично, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n} = \gamma+\ln 2n+\varepsilon_{2n}$, где $\varepsilon_{2n}\to 0$ кад $n\to\infty$. Одузимањем ове две релације, добија се тражено.

148. Нека је $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$, $n \geqslant 3$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решење. Решавањем посматране диференцне једначине се добија $x_n = \frac{4(b-a)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a+2b}{3}$. Тражени лимес је $\frac{a+2b}{3}$.

149. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{m}}{n^m}$.

Решење. Применом дефиниције биномног коефицијента се добија да је тражени лимес $\frac{1}{m!}$.

150. Нека је $0 \leqslant x_n \leqslant x_m + x_n$, $m,n\in\mathbb{N}$. Доказати да $\frac{x_n}{n}$ конвергира.

Решење. Применом субадитивности имамо $0 \leqslant x_n \leqslant nx_1$, односно $0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1$. Дакле, постоји инфимум скупа $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ који ћемо означити са α. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји m тако да је $\alpha \leqslant \frac{x_m}{m} \leqslant \alpha+\frac{\varepsilon}{2}$. Како је $n = qm+r$ и $x_n \leqslant qx_m + x_r$, то је $\alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n} < \alpha+\varepsilon$. Одавде је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \alpha$.

151. Нека је $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = -1+\sqrt[n]{1+x_n}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Решење.

152. Нека је $x_0 > 0$ и $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2$.

Решење.

153. Наћи лимес низа $a_n = \sqrt[n+1]{((n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$.

Решење.

154. Нека је низ x_n дефинисан са $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}$ за све $n \geqslant 1$. Наћи лимес низа у зависности од α, x_0, x_1.

Решење.

155. Низ x_n реалних бројева задовољава $\lim\limits_{n\to\infty}(x_2n + x_{2n+1}) = 315$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n} + x_{2n-1}) = 2003$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}$.

Решење.

156. Нека је a_n низ реалних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}(3n)^{\frac{1}{3}} a_n = 1$.

Решење.

157. Нека је a_n низ реалних бројева таквих да $a_n \geqslant 1$ за све n и да низ $(a_n + a_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ конвергира. Доказати да је низ a_n конвергентан.

Решење.

158. Нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n^2} - 1}$. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$

Решење.

159. Нека је x_n низ и $y_n = x_{n-1} + x_n$ за све $n \geqslant 2$. Претпоставимо да y_n конвергира. Показати да и низ x_n конвергира.

Решење.

160. Нека је a_n низ реалних бројева таквих да $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_{n+1} - a_n) = l$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Решење.

1.12 Функције

161. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+nx)^m-(1+mx)^n}{x^2}$.

Решење. Применом биномне формуле, добија се да је тражени лимес $\binom{n}{2}m^2 - \binom{m}{2}n^2$.

162. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$

Решење. Канцелацијом са $x - 1$, добија се да је тражени лимес једнак $\frac{m}{n}$.

163. Наћи $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$.

Решење. Увођењем смене $t = x - 1$ и применом биномне формуле, добија се да је тражени лимес $\frac{m-n}{2}$.

164. Наћи $\lim\limits_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решење. Факторисањем разлике квадрата и канцелацијом са $\sqrt{x-a}$, добија се да је тразхени лимес $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

165. Наћи $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решење. Кори71ењем идентитета $t^2-a^2=(t-a)(t+a)$ и $t^3-a^3=(t-a)(t^2+ta+a^2)$, добија се да је тражени лимес $\frac{12}{5}$.

166. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2}$.

Решење. Кори71ењем адиционе формуле и познатог лимеса $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, добија се да је тражени лимес $\frac{1}{2}$.

167. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x-\sin 4x}{\sin 2x}$.

Решење. Кори71ењем адиционе формуле, добија се да је тражени лимес $\frac{3}{2}$.

168. Наћи $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Решење. Увођењем смене $x=\pi+t$ и применом адиционе формуле, добија се да је тражени лимес $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$.

169. Нека је $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$. Наћи $\lim\limits_{x\to a} \frac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

Решење. Лимес је једнак $\frac{1}{\cos^2 a}$.

170. Доказати да не постоји $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

Решење. Тражено се закључује посматрањем лимеса на низовима $n\pi$ и $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и применом Хајнеове теореме.

171. Наћи $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - xe^{\frac{1}{x}})$.

Решење. Сменом $x = \frac{1}{t}$ уз кори71ење чињенице да је $(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}t+o(t)$ и $e^t = 1+t+o(t)$ кад $t \to 0$, добија се да је тражени лимес једнак $-\frac{1}{2}$.

172. Доказати да не постоји $\lim\limits_{x\to\infty} \{x\}$.

Решење. Применом Хајнеове дефиниције граничне вредности на низовима $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{2}$.

173. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[5]{1+5x}-2}{\sqrt{1+2x}-1}$.

Решење. Кори71ењем асимптотске еквиваленције се добија да је тражени лимес 2.

174. Наћи $\lim\limits_{x\to 1} x^2 \frac{\ln x}{x-1}$.

Решење. Увести смену $t = x - 1$ и користити познате лимесе.

175. Наћи $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$.

Решење. Написати израз у облику разлике квадрата. Тражени лимес је -2.

176. Наћи $\lim \frac{e^x \cos x - 1}{x}$.

Решење. У бројилац додати $\pm\cos x$ и искористити познате лимесе да би се добило да је тражени лимес 1.

177. Наћи $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-x\cos\frac{1}{x}$.

Решење. Увођењем смене $t=\frac{1}{x}$ и кори71ењем асимптоцких еквиваленција добија се резултат $-\frac{1}{3}$.

178. Наћи $\lim\limits_{x\to0}(\frac{2^x+3}{4})^{\frac{1}{x}}$

Решење. Кори71ењем познатог лимеса $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, добија се да је резултат $\sqrt[4]{2}$.

179. Наћи $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{x+\sin x}$.

Решење. У бројиоцу се ±1 и користе се познати лимеси да би се добио резултат $-\frac{1}{2}$.

180. Наћи $\lim\limits_{x\to2}\frac{2^x\sin\frac{\pi x}{4}-4}{x-2}$

Решење. У бројиоцу додати и одузети 2^x, добија се да је тражени лимес $4\ln 2$.

181. Наћи $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-xe^{\frac{1}{x}})$.

Решење. Сменом $x=\frac{1}{t}$ уз кори71ење чињенице да је $(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t+o(t)$ и $e^t=1+t+o(t)$ кад $t\to0$, добија се да је тражени лимес једнак $-\frac{1}{2}$.

182. Доказати да не постоји $\lim\limits_{x\to\infty}\{x\}$.

Решење. Применом Хајнеове дефиниције граничне вредности на низовима $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{2}$.

183. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[5]{1+5x}-2}{\sqrt{1+2x}-1}$.

Решење. Кори71ењем асимптотске еквиваленције се добија да је тражени лимес 2.

184. Наћи $\lim\limits_{x\to 1} x^2 \frac{\ln x}{x-1}$.

Решење. Увести смену $t = x - 1$ и користити познате лимесе.

185. Наћи $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2-2x+4}$.

Решење. Написати израз у облику разлике квадрата. Тражени лимес је -2.

186. Наћи $\lim \frac{e^x \cos x - 1}{x}$.

Решење. У бројилац додати $\pm \cos x$ и искористити познате лимесе да би се добило да је тражени лимес 1.

187. Наћи $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - x\cos\frac{1}{x}$.

Решење. Увођењем смене $t = \frac{1}{x}$ и кори71ењем асимптоцких еквиваленција добија се резултат $-\frac{1}{3}$.

188. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2^x+3}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$

Решење. Кори71ењем познатог лимеса $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, добија се да је резултат $\sqrt[4]{2}$.

189. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{x+\sin x}$.

Решење. У бројиоцу се ± 1 и користе се познати лимеси да би се добио резултат $-\frac{1}{2}$.

190. Наћи $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x \sin\frac{\pi x}{4}-4}{x-2}$

Решење. У бројиоцу додати и одузети 2^x, добија се да је тражени лимес $4\ln 2$.

191. Испитати непрекидност функције $f(x) = [x]\sin \pi x$.

Решење. Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$.

192. Испитати непрекидност функције $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{1+|x|^n+(\frac{x}{2})^{2n}}$

Решење. Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$.

193. Испитати непрекидност функције $f(x) = [x]\ln x - \ln\left([x]!\right)$, $x \geqslant 1$.

Решење. Функција је непрекидна на домену.

194. Одредити a, b, c тако да функција буде непрекидна на $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \leqslant -2 \\ x^2+b, & -2 < x \leqslant 3 \\ e^x + c, & 3 < x \leqslant 5 \\ x^2+2x+7, & x > 5 \end{cases}$$

Решење. Одредити a, b, c тако да функција буде непрекидна у тачкама -2, 3 и 5.