

МАТЕМАТИКА 2 Б

Писмени испит

Други септембарски испитни рок

26. 09. 2020.

1. Нека је за свако $n \geq 3$ дата матрица

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

- (а) Доказати да је за свако $n \geq 3$ матрица M_n инвертибилна и израчунати M_n^{-1} .
- (б) Одредити сопствене вредности, сопствене векторе, детерминанту и ранг матрице M_4^3 .
- (в) Одредити матрицу M_3^n и њен минимални полином за свако $n \geq 3$.
2. Одредити једначину равни која садржи тачке $A(6, 0, -1)$ и $B(3, 0, 0)$ и образује угао од 60° са xOy равни.
3. (а) Од свих квадрара запремине 8 одредити странице оног квадра који има најмању површину. Да ли постоји квадар највеће површине запремине 8?
- (б) Нека је дат конвексан многоугао површине 1. Доказати да у овом многоуглу постоји троугао површине барем $\frac{1}{4}$.
4. Нека је дата раван π једначином $z = 3$ и површи

$$(S_1) : x^2 + y^2 = 2z + 3 \quad \text{и} \quad (S_2) : z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- (а) Нека је S спољна страна тела ограниченог површима S_1 и S_2 . Израчунати интеграл

$$\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

- (б) Одредити координате центра масе хомогеног тела које се налази између површи S_2 и равни π .