

МАТЕМАТИКА 2 Б

Писмени испит

Јануарски испитни рок

28. 01. 2021.

1. [20] Нека су дате матрице

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (а) [10] Одредити A^n за свако $n \in \mathbb{N}$.
(б) [5] Одредити $\text{rang}(A^3)$, $\text{rang}(B)$, $\det(A^2)$, $\det(B^2)$ и $\mathcal{P}_A$.
(в) [5] Решити систем једначина $AX = B^T$ при чему је $X \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

2. [20] Нека су дате равни

$$(\alpha) : 4x + y = 1 \quad \text{и} \quad (\beta) : 2x + 2y - 3z = 11$$

и тачка $A(1, 2, 3)$. Одредити симетралну раван диедра одређеног равнима α и β која се налази у истој области диедра као и тачка A .

3. [20] Одредити максимум функције $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(x, y, z) = 5x - 6y + 7z$$

под условом $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ и тачке у којима се постиже.

4. [35] Нека је дата функција $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}, & \text{ако је } x \neq 0. \end{cases}$$

и за свако $r > 0$ позитивно оријентисан руб квадрата $K(r)$ који је дат својим темењима $(0, 0)$, $(r, 0)$, (r, r) и $(0, r)$.

- (а) [10] Испитати диференцијабилност функције P на скупу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

- (б) [10] Израчунати интеграл $\oint_{K(r)} P(x, y) \, dx$ за свако $r > 0$.

- (в) [15] Израчунати интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

5. [25] Нека је S спољна страна сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Израчунати интеграл

$$\iint_S (x^4 + y^4 + z^4) \, dS.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико поена носи одговарајући задатак. Ако је p_i број освојених поена на задатку под редним бројем i тада се укупан број освојених поена рачуна по формули

$$\min \left\{ 100, \sum_{i=1}^5 p_i - \min\{p_1, \dots, p_5\} \right\}.$$

Решења задатака **детаљно** образложити. Време за израду задатака износи 240 минута.