Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - септембар 2
27.9.2024.

1. Нека је дато пресликавање $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дато са $f_6(x) = x \mod 6$.
   а) [5] Одредити минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{N}$ тако да је f_6 $\mathfrak{M}$-мерљиво пресликавање. Колико она има елемената?
   б) [5] Доказати да је за свако $c > 0$ са $\mu(A) = \sum_{x \in A} \frac{c}{x^2}$ задата једна мера на $\mathbb{N}$. Одредити c за које је μ вероватносна. За тако добијено c испитати комплетност мере μ.
   в) [5] Одредити све $n \in \mathbb{N}$ за које је $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дато са $f_n(x) = x \mod n$ једна $\mathfrak{M}$-мерљива функција.
2. [15] Израчунати $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{n} (n^2x - 1)e^{-n^2x^2}\,dx$.
3. [15] Дат је низ функција $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ дат са $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\cos x}{1 + n\ln(1+x^2)}$. Наћи $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Да ли низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има интеграбилну доминанту?
4. [15] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са вероватносном мером (тј. $\mu(X) = 1$) и $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ мерљиве функције. Доказати да је $\left(\frac{\|fgh\|_1}{\|g\|_3}\right)^2 \leqslant \|f\|_4^2 \|h^2\|_3$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - септембар 2
27.9.2024.

1. Нека је дато пресликавање $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дато са $f_6(x) = x \mod 6$.
   а) [5] Одредити минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{N}$ тако да је f_6 $\mathfrak{M}$-мерљиво пресликавање. Колико она има елемената?
   б) [5] Доказати да је за свако $c > 0$ са $\mu(A) = \sum_{x \in A} \frac{c}{x^2}$ задата једна мера на $\mathbb{N}$. Одредити c за које је μ вероватносна. За тако добијено c испитати комплетност мере μ.
   в) [5] Одредити све $n \in \mathbb{N}$ за које је $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дато са $f_n(x) = x \mod n$ једна $\mathfrak{M}$-мерљива функција.
2. [15] Израчунати $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{n} (n^2x - 1)e^{-n^2x^2}\,dx$.
3. [15] Дат је низ функција $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ дат са $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\cos x}{1 + n\ln(1+x^2)}$. Наћи $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Да ли низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има интеграбилну доминанту?
4. [15] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са вероватносном мером (тј. $\mu(X) = 1$) и $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ мерљиве функције. Доказати да је $\left(\frac{\|fgh\|_1}{\|g\|_3}\right)^2 \leqslant \|f\|_4^2 \|h^2\|_3$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.