Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - јун 2
5.7.2024.

1. а) [7] Нека је X произвољан непразан скуп и $\mathcal{F}$ фамилија реално-вредносних функција на X за коју важе следећа три својства:

   (1) $\mathcal{F}$ садржи константне функције;

   (2) Ако $f, g \in \mathcal{F}$ и $c \in \mathbb{R}$, тада $f + g, fg, cf \in \mathcal{F}$;

   (3) Ако $f_n \in \mathcal{F}$ за све $n \in \mathbb{N}$, онда и $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{F}$.

   Доказати да је $\mathfrak{M} = \{A \subseteq X \mid \chi_A \in \mathcal{F}\}$ једна σ-алгебра на X.

   б) [8] Нека је дат простор са мером $([0,1], \mathfrak{M}_L([0,1]), \mu_L)$ и скуп $A \in \mathfrak{M}_L([0,1])$ такав да је $\mu_L(A) = \frac{1}{2}$. Доказати да за функцију $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ дефинисану са $g(x) = \mu_L(A \cap [0,x])$ важи да је $|g(x) - g(y)| \leqslant |x - y|$, за све $x, y \in [0,1]$, а потом закључити да за све $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ постоји $A_\alpha \subset A$ такав да $A_\alpha \in \mathfrak{M}_L([0,1])$ за кога је $\mu_L(A_\alpha) = \alpha$.

2. [15] Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{3}{n}}^{1} \frac{\sin x}{\operatorname{arctg}^2 x\,(\ln x + \ln n)^2}\,dx$.

3. а) [13] Доказати да за $p > 1$ важи $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^p}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(p(n+1)-1)^2}$.

   б) [2] Да ли једнакост у делу а) важи и за $p = 1$?

4. [15] Нека је $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ Лебег мерљива функција таква да је $\displaystyle\int_{[0,1]} |f|^p\,d\mu_L < +\infty$ за неки $p \in [1, +\infty)$. Нека је $a \in (0,1]$ произвољан. Израчунати

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a^{\frac{1}{q}}} \int_{[0,a]} |f|\,d\mu_L,$$

где је $q \in (1, +\infty]$ такав да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.