Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - јун 2
3.10.2025.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Скуп $A \in \mathfrak{M}$ строго позитивне мере зовемо *атом* ако за сваки $E \in \mathfrak{M}, E \subseteq A$ важи $\mu(E) = 0$ или $\mu(A \setminus E) = 0$.

   а) [4] Ако су $A, B \in \mathfrak{M}$ атоми, доказати да или је $\mu(A \cap B) = 0$ или је $\mu(A \cap B) = \mu(A) = \mu(B)$.

   б) [4] Ако је простор σ-коначан, доказати да сваки атом има коначну меру.

2. [11] Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\frac{1}{2n}}^{+\infty} \frac{ne^{-n^2x^2-nx}}{1+x^{10}}\,dx$.

3. [11] Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(2n\pi x)}{3+x^n}\,dx$.

4. [11] Израчунати $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \ln(1-e^{-x})\,dx - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$.

5. Нека је дат низ функција $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x}, n \in \mathbb{N}$.

   а) [3] Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1$.

   б) [3] Испитати конвергенцију низа функција f_n у $L^1[0,1]$.

   в) [3] Испитати конвергенцију низа функција f_n у мери.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.