Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - јун 1
20.9.2025.

1. [8] Нека је дат мерљив простор $([0,1], \mathfrak{M}, \mu)$ са Лебеговом мером и скупови $E_1, E_2, \ldots, E_{2025} \in \mathfrak{M}$ такви да је $\sum\limits_{k=1}^{2025} \mu(E_k) > 2024$. Доказати да је $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{2025} E_k\right) > 0$.

2. [10] Нека је f ненегативна мерљива функција дефинисана на $\mathbb{R}$. Ако је
$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2+x^2} f(x)\,dx \leqslant 1 \quad \text{за све } n \in \mathbb{N},$$
доказати да $f \in L^1(\mathbb{R})$ и да је $\|f\|_1 \leqslant 1$.

3. [10] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}}}$.

4. [10] Израчунати $\int\limits_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx$.

5. Дата је функција $f \in L^2(\mathbb{R})$.

   а) [4] Доказати да је са $\mu(E) = \int\limits_E |f|^2\,dm$ дефинисана једна коначна мера на $(\mathbb{R}, m)$.

   б) [8] Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+1} f\,dm = 0$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.