Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - јануар 2,
1.9.2025.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека је дат низ скупова $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$. Кажемо да је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *скоро дисјунктан* ако за све $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ важи $\mu(A_i \cap A_j) = 0$.

   а) [5] Доказати да ако је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ скоро дисјунктан, онда је $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

   б) [5] Доказати да ако је $\mu(X) < +\infty$ и $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, тада је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ скоро дисјунктан.

   в) [3] Доказати да тврђење под б) не важи без претпоставке $\mu(X) < \infty$.

2. а) [10] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{n + n^4x^3}{(1+x)^n}\, dx$.

   б) [3] Да ли низ функција $f_n(x) = \frac{n + n^4x^3}{(1+x)^n}$ има интеграбилну доминанту на $[0, 1]$?

3. [12] Израчунати $\int\limits_0^1 \frac{x}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx$.

4. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Даље, нека је низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дат са

$$f_n(x) = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n + \sin^n x\right) e^{-2x} \chi_{[0,+\infty)}(x).$$

   а) [2] Испитати да ли овај низ конвергира униформно на $\mathbb{R}$.

   б) [3] Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.

   в) [2] Доказати да $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ за све $n \in \mathbb{N}$.

   г) [3] Испитати да ли овај низ конвергира у L^1 норми.

   д) [2] Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.