Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - јануар 1,
19.8.2025.

1. Нека је $\mathbb{N}$ скуп природних, $2\mathbb{N}-1$ скуп непарних, а $2\mathbb{N}$ скуп парних бројева.

   а) [5] Доказати да је фамилија $\mathfrak{M} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 2\mathbb{N} \subseteq A \text{ или } A \subseteq 2\mathbb{N}-1\}$ једна σ-алгебра на $\mathbb{N}$.

   б) [5] Наћи $k \in (0, \infty]$ тако да је функција $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ дефинисана са
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \subseteq 2\mathbb{N}-1 \\ k, & 2\mathbb{N} \subseteq A \end{cases}$$
   једна мера на $\mathfrak{M}$. У зависности од k, испитати да ли је мера μ комплетна, коначна или полуконачна?

   в) [3] Да ли је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(n) = n$ $\mathfrak{M}$-мерљива? Дати пример неконстанте функције $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(g \neq f)$ која је $\mathfrak{M}$-мерљива.

2. [12] Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty} \frac{n^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{t}}{n^2+t^2}\, dt.$

3. [13] Нека је дата функција $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$. Наћи низове $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такве да је
$$I_1 := \int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2} \text{ и } I_2 := \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2}.$$
   Наћи вредност интеграла I_1, I_2, као и интеграла $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

4. [12] Нека је $f \in L^2(0,+\infty)$ и $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Ако је $g(x) = |f(x)|^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{\frac{1}{1+x^2}}$, доказати да $g \in L^1(0,+\infty)$, као и да је $\|g\|_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.