

1. а) [5] Нека су дати скупови $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x < 0\}$. Описати најмању σ -алгебру на \mathbb{R} која садржи скупове A и B . Колико она има елемената?
- б) [8] Нека је дат низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $x_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Доказати да је функција $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ дефинисана са

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(\{x_n \mid x_n \in A\}), & \text{ако је } \{x_n \mid x_n \in A\} \text{ коначан,} \\ +\infty, & \text{ако је } \{x_n \mid x_n \in A\} \text{ бесконачан} \end{cases}$$

за $A \subseteq \mathbb{R}$ мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Испитати да је μ коначна и да ли је σ -коначна.

2. [13] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{nx}{x - 4n} \cos\left((n^2 + n) \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)\right) dx$.

3. [12] Доказати да је $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^{2025}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2025n + 2024)^2}$.

4. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему \mathfrak{M} Лебегова σ -алгебра, а μ Лебегова мера. Даље, нека је низ функција $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дат са $f_n(x) = {}^{2n-1}\sqrt{x}$.

- а) [4] Испитати да ли овај низ конвергира μ скоро свуда.
- б) [4] Испитати да ли овај низ конвергира по мери μ .
- в) [4] Испитати да ли рестрикција $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ конвергира у $L^1([-1, 1], \mu)$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 135 минута.