Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - септембар 1
16.10.2025.

1. Дати су скупови $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{6, 7, 8, 9, 10\} \subset \mathbb{R}$ и функција $f : A \to B$ дата са

$$f(-2) = 10,\ f(-1) = f(1) = 7,\ f(0) = 6 \text{ и } f(2) = 8.$$

   а) [4] Наћи минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ у којој је функција f мерљива. Колико она има елемената?

   б) [4] Испитати $\mathfrak{M}$-мерљивост функција $f_1, f_2, f_3, f_4 : A \to \mathbb{R}$ датих са $f_1(x) = \operatorname{sgn} x$, $f_2(x) = x \mod 4$, $f_3(x) = x^2$ и $f_4(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

   в) [4] Доказати да постоји јединствена вероватносна мера μ на $\mathfrak{M}$ која није комплетна и узима једнаке вредности на једночланим скуповима у $\mathfrak{M}$.

2. а) [10] Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{\cos x + \operatorname{tg} x}{\frac{1}{n} + n \operatorname{arctg}(x^2)}\, dx$.

   б) [3] Да ли низ функција $f_n(x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{tg} x}{\frac{1}{n} + n \operatorname{arctg}(x^2)}$ има интеграбилну доминанту на $[-1, 1]$?

3. а) [4] Доказати да је $-\dfrac{1}{(1+x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1}$ за све $x \in [0, 1)$.

   б) [8] Израчунати $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1+x}\right)^2 dx$.

4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ мерљива функција.

   а) [3] Нека је $1 \leqslant p < +\infty$ и $f \in L^p(X)$. Доказати да тада за све $t > 0$ важи

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{\|f\|_p^p}{t^p}.$$

   б) [10] Нека је $f \in L^1(X, \mu)$ и нека за неко $p \in [1, \infty)$ важи да је $1 - f \in L^p(X, \mu)$. Доказати да је мера скупа X, тј. $\mu(X)$, коначна.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.