Математички факултет, Универзитет у Београду

Теорија мере и интеграције - Јануар 2 ПС

11.3.2026.

1. Дат је скуп $X = [0,1] \cup \{2\}$. Нека је $\mathfrak{M}$ најмања σ-алгебра на X која садржи све скупове облика $[0,a] \cup \{2\},\ a \in [0,1]$.

    а) [3] Доказати да $(a,b) \in \mathfrak{M}$ за све $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

    б) [6] Нека је $\mathfrak{N} = \{A \cap [0,1],\ (A \cap [0,1]) \cup \{2\} \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, где је $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Доказати да је $\mathfrak{N}$ σ-алгебра на X.

    в) [3] Да ли је $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$?

2. [13] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_0^n \left(\sin\frac{x}{n} - \cos\frac{x}{n} + 1\right) e^{-x-\frac{1}{n}}\, dx$.

3. [12] Нека је функција $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2^{n+1}}}{n} \chi_{(1-2^{-n},1-2^{-n-1}]}(x).$$

    Испитати за које $p \in [1,+\infty)$ важи да $f \in L^p([0,1], m_L)$.

4. Нека је дат простор са мером $([0,1], \mathcal{B}[0,1], m_L)$, где је $\mathcal{B}[0,1] := \{A \cap [0,1] \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, где је $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$, а m_L контракција Лебегове мере μ_L на $[0,1]$. Даље, нека је низ функција $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дат са $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

    а) [3] Испитати да ли овај низ конвергира m_L скоро свуда.

    б) [3] Испитати да ли овај низ конвергира по мери m_L.

    в) [4] Доказати да f_n не конвергира у L^p ни за једно $p \in [1,+\infty)$.

    г) [3] Доказати да одатле (или на неки други начин), f_n не конвергира у L^∞.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 135 минута.