

1. Нека је дат скуп $X = \{1, 2, \dots, 2025\}$ и функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \left| \cos \frac{\pi x}{4} \right|$.
- а) [4] Наћи минималну σ -алгебру \mathfrak{M} над X такву да је функција f \mathfrak{M} -мерљива. Колико \mathfrak{M} има елемената?
- б) [4] Доказати да је $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са $\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ \sum_{n^2 \in E} n^2, & \text{иначе} \end{cases}$, једна мера на (X, \mathfrak{M}) и израчунати $\mu(X)$.
- в) [3] Да ли је μ комплетна мера? Ако није, описати комплетирање $(\overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$.
- г) [3] Испитати \mathfrak{M} -мерљивост функција $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисаних са $g(x) = \cos x$ и $h(x) = \left| \sin \frac{\pi x}{4} \right|$.
2. [12] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^5 \frac{(1+x)^n \cdot e^{-nx}}{\frac{2025}{n} + n(\ln(1+x))^2} dx$.
3. [12] Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x} - e^{-5x}}{x} dx$.
4. [12] Нека $f \in L^8(0, 1)$. Наћи све $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} \cdot f(x) dx$ коначан за све $f \in L^8(0, 1)$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.