Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - септембар 2
29.10.2025.

1. Нека је дато пресликавање $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дато са $f_6(x) = x \mod 6$.

   а) [4] Одредити минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{N}$ тако да је f_6 $\mathfrak{M}$-мерљиво пресликавање. Колико она има елемената?

   б) [4] Доказати да је за свако $c > 0$ са $\mu(A) = \sum\limits_{x \in A} \frac{c}{x^2}$ задата једна мера на $\mathbb{N}$. Одредити c за које је μ вероватносна. За тако добијено c испитати комплетност мере μ.

   в) [4] Одредити све $n \in \mathbb{N}$ за које је $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дато са $f_n(x) = x \mod n$ једна $\mathfrak{M}$-мерљива функција.

2. [13] Израчунати $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{nx}\cos x}{\ln(1+x)}\,dx$.

3. [13] Израчунати $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} e^{-x}\,dx$.

4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

   а) [4] Ако је $L^1(X,\mu) \subset L^\infty(X,\mu)$, доказати да је онда $L^p(X,\mu) \subset L^\infty(X,\mu)$ за све $p > 0$.

   б) [4] Ако је $L^1(X,\mu) \subset L^\infty(X,\mu)$, доказати да је онда $L^p(X,\mu) \subset L^q(X,\mu)$ за све $0 < p < q$.

   в) [4] Ако постоји $f \in L^1(X,\mu) \setminus L^\infty(X,\mu)$, доказати да се из низа дисјунктних скупова $E_n \in \mathfrak{M}$ дефинисаних са $E_n = \{x \in X \mid n < |f(x)| \leqslant n+1\}, n \in \mathbb{N}$ може издвојити подниз E_{n_k} такав да је $0 < \mu(E_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.