

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р смер) - први поправак првог колоквијума
12.6.2024.

1. Нека је функција $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & [x] = [y]; \\ \ln(1 + |[x] - [y]|), & [x] \neq [y], \end{cases}$$

где је $[x]$ ознака за цео део (највећи цео број не већи од x).

- а) [3] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}$.
- б) [4] Скицирати отворене кугле $B(0, \ln(\frac{3}{2}))$ и $B(3, 2)$.
- в) [3] Наћи $\text{diam } A$, где је $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 2)$.
- г) [3] Испитати конвергенцију низа $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ у простору $(\mathbb{R}, d)$.
- д) [3] Испитати комплетност и компактност простора $(\mathbb{R}, d)$

2. Нека је функција $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2 + y^2 + y}}{x^2 + (y+1)^2}, & (x, y) \neq (0, -1); \\ a, & (x, y) = (0, -1). \end{cases}$$

- а) [3] Наћи константу $a \in \mathbb{R}$ такву да функција g буде непрекидна на $\mathbb{R}^2$.
- б) [7] Испитати у којим тачкама је тако добијена функција диференцијабилна.

3. Дата је функција $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

- а) [3] Наћи локалне екстремуме функције f .
- б) [3] Наћи условне екстремуме функције f при услову $x + y + z = 3$.
- в) [8] Наћи слику $f(D)$, где је $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 3, 0 \leq z \leq 1 \leq x, y\}$.

4. [10] Израчунати интеграл $\iiint_T (y^2 - x^2) dx dy dz$, где је тело $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + 10z \leq 40, |\sqrt{3}y| \geq x, z \geq 0\}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.