

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р смер) - други поправак првог колоквијума
6.9.2024.

1. Дато је пресликавање

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & \text{ако су } x \text{ и } y \text{ линеарно независни;} \\ \|x - y\|, & \text{ако су } x \text{ и } y \text{ линеарно зависни,} \end{cases}$$

где је $\|\cdot\|$ стандардна еуклидска норма, тј. за $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ је $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

- а) [3] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}^3$.
- б) [4] Описати и скицирати отворене лопте $B(c, 1)$, где је $c \in \mathbb{R}^3$.
- в) [2] Испитати отвореност скупа

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in (0, 2), z = 0\}$$

у метрици d .

- г) [2] Испитати конвергенцију низа $x_n = (1, 1, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ у метрици d .
- д) [2] Да ли је скуп

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 2]\}$$

компактан у метрици d ?

2. Нека је дата функција

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt[3]{4x^2 + y^2 - 5}.$$

- а) [4] Испитати непрекидност и диференцијабилност функције f .
- б) [4] Испитати диференцијабилност функције $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)(x^2 - y^2)$.
- в) [3] Одредити извод у правцу произвољног јединичног вектора функције $\tilde{f}$ у тачкама у којима овај извод постоји.

3. Дате су функције $g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$g(x, y, z) = 2x^2 + 12x + 20y^2 + 10xy + 2z^3 - 3z^2 \text{ и } h(x, y, z) = g(x, y, z) - 2z^3.$$

- а) [7] Одредити локалне екстремуме функције g .
- б) [7] Одредити слику $h(T)$, где је $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y \leq 0\}$.

4. [12] Израчунати интеграл $\iiint_T (y^2 - x^2) dx dy dz$, где је тело

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z \leq 1, |y| \leq x\}.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.