

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2А - септембар 1
18.10.2025.

1. Нека је функција $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & [x] = [y]; \\ \ln(1 + |[x] - [y]|), & [x] \neq [y], \end{cases}$$

где је $[x]$ ознака за цео део (највећи цео број не већи од x).

- а) [5] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}$.
- б) [5] Скицирати отворене кугле $B(0, \ln(\frac{3}{2}))$ и $B(3, 2)$.
- в) [5] Испитати конвергенцију низа $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ у простору $(\mathbb{R}, d)$.

2. Дата је непрекидна функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 x}{y^2 + x^4} + \sin xy & , (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- а) [5] Одредити $a \in \mathbb{R}$.
 - б) [4] Наћи парцијалне изводе у свим тачкама $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - в) [4] Наћи све тачке у којима је функција f диференцијабилна.
3. [12] Нека је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задата са $f(x, y) = -x^3 + xy + 3x + 6y$. Одредити најмању и највећу могућу вредност функције f на скупу $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq (x - 3)^2\}$.
4. [10] Израчунати запремину тела ограниченог површима $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$ и Oxy равни.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.