

1. Дат је низ $a_n = \frac{(-1)^n n + 2}{n + 5}$.

- а) [4] Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
б) [4] Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $B = \{\sin(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
в) [3] Да ли постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n)$?
г) [3] Да ли постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n)}{\sin(a_{n+1})}$?

2. а) [6] Наћи тачке нагомилавања низа

$$a_n = \frac{(2 + (-1)^n)^n + 2^n}{n^7 + 3^n + 2025n} + \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

- б) [6] Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{3}{n^2}} - 1\right) \sqrt{2 + \cos \frac{4}{n}}}{\ln \frac{n+2}{n} \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)}.$$

3. Нека је непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \left(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

- а) [2] Одредити α .
б) [2] Доказати да је f непарна функција.
в) [2] Одредити нуле функције f .
г) [4] Да ли је f ограничена функција?
д) [4] Одредити све тачке $x \in \mathbb{R}$ у којима је f диференцијабилна.
ђ) [4] Доказати да постоји бесконачно много тачака $x \in \mathbb{R}$ таквих да је $f'(x) = 0$.
4. [6] Нека је $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и $f(a) = f(b) = 0$ за неке $a > b > 0$. Доказати да постоји $\xi \in (0, +\infty)$ такво да је

$$f(\xi) = f'(\xi)\xi.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.