

1. Нека је непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \left(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 \right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

- а) [3] Одредити α .
- б) [3] Доказати да је f непарна функција.
- в) [3] Одредити нуле функције f .
- г) [5] Да ли је f ограничена функција?
- д) [5] Одредити све тачке $x \in \mathbb{R}$ у којима је f диференцијабилна.
- ђ) [6] Доказати да постоји бесконачно много тачака $x \in \mathbb{R}$ таквих да је $f'(x) = 0$.

2. а) [24] Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 3x - 6 - \ln \left(\left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \right).$$

- б) [3] У зависности од реалног параметра α , колико најмање, а колико највише решења може имати једначина $f(x) = \alpha$?

3. а) [15] Израчунати интеграл $J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(1 + \pi x^3)}{2 - \cos \left(|x| + \frac{\pi}{3} \right)} dx$.

- б) [4] Доказати да важи $\operatorname{arctg}(\ln x) \sim x - 1$, кад $x \rightarrow 1+$.
- в) [7] Одредити све $\beta \in \mathbb{R}$ за које интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{(x^3 - 1)^\beta} dx$$

конвергира.

4. а) [11] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!!}{2^{\frac{3n}{2}} (n+1)!}$.

- б) [3] Доказати да је низ $b_n = \frac{n \ln n}{n^2 + 1}$ опадајући почев од неког члана.

в) [8] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \ln n + 1}{n^2 + 1}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.