

1. Дата је функција $f(x) = x - \sqrt[3]{x(x-4)^2}$.

- а) [3] Одредити константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ такве да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x}$, $x \rightarrow -\infty$.
- б) [3] Испитати диференцијабилност функције f у тачкама 0 и 4.
- в) [2] Решити неједначину $4 - 3x > -3\sqrt[3]{x^2(x-4)}$.
- г) [8] Испитати ток и скицирати график функције f .
- д) [2] Да ли једначина $|f(x)| = 5$ има решења?

2. а) [5] Одредити сингуларитете интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ и доказати да он конвергира.

б) [8] Одредити примитивну функцију функције $g(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ на интервалу $(1, +\infty)$.

в) [3] Израчунати $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

3. Нека је низ $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ дат са $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

а) [2] Доказати да је $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

б) [2] Доказати да је низ $\{I_n\}$ строго опадајући и да су му сви чланови позитивни.

в) [2] Доказати да је $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Чему је једнако $I_n + I_{n-2}$ за свако $n \geq 2$?

г) [2] Доказати да је $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ за свако $n \geq 2$.

д) [2] Одредити константу $c \in \mathbb{R}$ такву да важи $I_n \sim \frac{c}{n}$, кад $n \rightarrow \infty$.

ђ) [6] Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n \cos I_n$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.