Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 1О1) – Јануар 2
2.9.2025.

1. Нека је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дат са $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са $b_n = 2^n a_n$.

   а) [9] Доказати да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан и наћи му граничну вредност.

   б) [6] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

   в) [6] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n$.

   г) [7] Доказати да је низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон и конвергентан.

   *д) [4] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. Дата је функција $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

   а) [2] Израчунати $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$.

   б) [3] Израчунати $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, а потом и $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

   в) [3] Доказати да функција f има бар једну нулу.

   г) [20] Испитати ток и скицирати график функције f.

   д) [9] Израчунати површину дела равни ограниченог графиком функције f' и правама $y = 0$, $x = -\sqrt{8}$ и $x = -\sqrt{3}$.

3. а) [9] Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - 1\right)^n$.

   в) [3] Доказати да важи $1 - n\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{c}{n^2}$, кад $n \to \infty$ за неку позитивну константу c.

   в) [9] Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - 1\right)^{\alpha} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx$ и нека је функција $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt$.

   а) [3] Доказати да је функција g двапут диференцијабилна и израчунати $g'(x)$ и $g''(x)$ за све $x \in (0,1)$.

   б) [5] Доказати да постоји $a \in (0,1)$ такво да је $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt = 0$.

   в) [6] Доказати да постоји $c \in (0,1)$ такво да је $f(c) = \displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.