Теорија вероватноћа - Први колоквијум **21. новембар 2018.**

1. [**8 поена**] Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних догађаја такав да је $P(A_n \triangle A_{n+1}) \geq \frac{1}{2n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

а) Ако је $B_n = A_n \cup A_{n+1}$, доказати да је $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

б) Израчунати $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right)$.

в) Наћи пример простора вероватноћа и низа догађаја $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисаних на том простору за које важи $P(C_n \triangle C_{n+1}) \geq \frac{1}{2n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_n\right) < 1$.

2. [**8 поена**] Нека су $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, независне случајне величине са експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, где је $\lambda > 0$.

а) Доказати да случајна величина $X_1 + X_2$ има гама $\Gamma(2, \lambda)$ расподелу.

б) Доказати да случајна величина $X_1 + \cdots + X_n$ има гама $\Gamma(n, \lambda)$ расподелу.

(Случајна величина са гама $\Gamma(n, \lambda)$ расподелом има густину $f(x) = \frac{x^{n-1}e^{-\lambda x}\lambda^n}{(n-1)!}$, $x > 0$.)

3. [**8 поена**] Нека су X и Y независне случајне величине, при чему X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, а Y има експоненцијалну $\mathcal{E}(\mu)$ расподелу, где су $\lambda, \mu > 0$. Нека је

$$Z = \min\{X, Y\} \qquad W = \begin{cases} 1, & \text{ако је } Z = X \\ 0, & \text{ако је } Z = Y \end{cases}$$

а) Одредити функцију расподеле случајног вектора (Z, W).

б) Доказати да су случајне величине Z и W независне.

Теоријска питања [**6 поена**]

а) Дефинисати појам σ-алгебре.

б) Ако је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ растући низ догађаја, доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

в) Нека је X апсолутно непрекидна, позитивна случајна величина. Да ли може бити $P\left\{X > \frac{1}{n}\right\} = \frac{n}{n^2+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$? Одговор образложити.

г) Ако су $F(x)$ и $G(x)$ апсолутно непрекидне функције расподеле, доказати да је $H(x) = \sqrt{F(x)G(x)}$ такође функција расподеле.

д) Ако су $f(x)$ и $g(x)$ густине расподела, да ли линеарна комбинација $h(x) = af(x) + bg(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$ може бити густина расподеле? Одговор образложити.

ђ) Случајни вектор (X, Y) има густину $f(x, y) = 2e^{-(x+2y)}$, $x, y > 0$. Испитати независност случајних величина X и Y.