

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

ЈУН 2 - 16.07.2026. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци ОБАВЕЗНО попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а–д):

- а) [1п] сума векторских простора U и W ;
- б) [1п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow W$;
- в) [2п] језгро и слика, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : U \rightarrow W$;
- г) [1п] скаларни производ на векторском простору V ;
- д) [2п] Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином;
- ђ) [3п] Дате су тачке $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, -2, 1)$.
Израчунати површину $\triangle ABC$, као и меру угла α код темена A .

2. [10п] У зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\ -ax + y + 4z &= 2 \\ 6x + 2y + (2-a)z &= 7.\end{aligned}$$

3. Дати су векторски потпростори

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A^T \right\}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + 2b = 0 \right\}.$$

- а) [6п] Одредити базу и димезију за U и W .
- б) [4п] Испитати да ли је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

4. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. Дате су тачка $Q(-4, 1, 1)$, права $p : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и раван $\alpha : 2x + y - 3z + 2026 = 0$.

- а) [4п] Одредити једначину праве n која садржи тачку Q и нормална је на раван α .
- б) [6п] Одредити једначину праве q која садржи Q , сече праву p и паралелна је са α .

6. [10п] Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање такво да је

$$L(1, -1, 1) = (0, 2, 1), \quad L(2, 0, 3) = (-2, 13, 3), \quad L(-1, 2, 0) = (-2, 5, -1).$$

Наћи формулу за $L(x, y, z)$ а затим одредити бар по једну базу за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$.