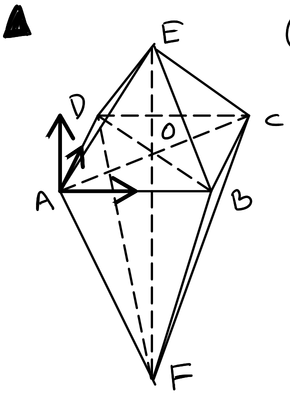
Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ЈАНУАР 2 - 06.03.2026. године
Време рада: 135мин. Срећно!

1. Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a, и врховима E и F са супротних страна основе $ABCD$. Нека је A_{xyz} позитивно оријентисан ортонормирани репер са почетком у тачки A и координатним векторима $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ који представљају позитивне правце оса x и y, редом. Уколико је висина пирамиде са врхом E једнака a, а висина пирамиде са врхом F једнака $2a$:
а) [6п] Израчунати координате свих темена у обе пирамиде.
б) [5п] Доказати да угао између правих AE и CF не зависи од дужине a.
в) [4п] Наћи координате тачке S која представља пресек праве EF и симетрале угла $\angle EAF$.



а) $\vec{e_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{a}$, $\vec{e_2} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{\overrightarrow{AD}}{a}$, $\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$ $\Rightarrow \boxed{A(0,0,0)}$

$[B]_{Ae} = [\overrightarrow{AB}]_e = \boxed{(a,0,0)}$, $[C]_{Ae} = [\overrightarrow{AC}]_e = [\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}]_e = \boxed{(a,a,0)}$

$[D]_{Ae} = [\overrightarrow{AD}]_e = \boxed{(0,a,0)}$, $[\overrightarrow{AO}]_e = [\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}]_e = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$

$\overrightarrow{OE} \parallel \vec{e_3} \Rightarrow [\overrightarrow{OE}]_e = (0,0,a)$

$[E]_{Ae} = [\overrightarrow{AE}]_e = [\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}]_e = \boxed{(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a)}$

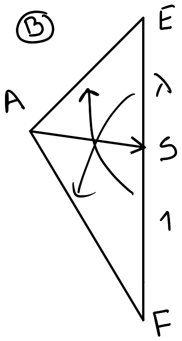
$[F]_{Ae} = [\overrightarrow{AF}]_e = [\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}]_e = [\overrightarrow{AO} - 2\overrightarrow{OE}]_e = \boxed{(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -2a)}$

$$\Rightarrow \boxed{A(0,0,0),\ B(a,0,0),\ C(a,a,0),\ D(0,a,0),\ E(\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2},a),\ F(\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2},-2a)}$$

б) $\cos\measuredangle(AE, CF) = \frac{|\overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{CF}|}{\|\overrightarrow{AE}\| \cdot \|\overrightarrow{CF}\|} = \frac{|(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)\circ(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},-2a)|}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+a^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+4a^2}} = \frac{\frac{5a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3a}{\sqrt{2}}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$

$\Rightarrow \boxed{\measuredangle(AE, CF) = \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)}$ $\Rightarrow$ не зависи од a

в)



$\frac{\overrightarrow{ES}}{\overrightarrow{SF}} \overset{2.5}{=} \frac{\|\overrightarrow{AE}\|}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{\|(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)\|}{\|(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-2a)\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \lambda$

$\overset{1.4}{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AE} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AF} = \frac{3}{\sqrt{3}+3}\overrightarrow{AE} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\overrightarrow{AF}$

$[S]_{Ae} = [\overrightarrow{AS}]_e = \left(\frac{3}{3+\sqrt{3}}(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a) + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-2a)\right)$

$\Rightarrow \boxed{S\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}a\right)} \Rightarrow \boxed{S\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}a\right)}$

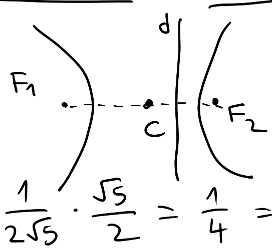
2. Дате су права $d: 2x - y + 1 = 0$ и тачке $F_1(1,0)$ и $F_2(-1,1)$:
а) [11п] Одредити једначину криве другог реда чија је једна од директриса права d, а жиже су јој тачке F_1 и F_2.
б) [3п] Одредити једначину геометријског места тачака које су подједнако удаљене од тачке F_1 и праве d. Која крива је у питању?

а) $f_d(x,y) = 2x - y + 1 \Rightarrow f_d(F_1) = 3 > 0$, $f_d(F_2) = -2 < 0$ $\Rightarrow F_1$ и F_2 са супр. страна d $\Rightarrow$ хипербола, F_2 и d пар

1) центар χ је $C = S(F_1F_2) \Rightarrow C(0, \frac{1}{2})$

2) $c = d(C, F_1) = \sqrt{1^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3) директриса $\frac{a^2}{c} = d(C,d) = \frac{|2\cdot 0 - \frac{1}{2} + 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ $\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$



4) $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

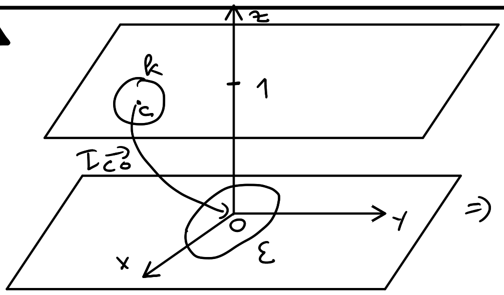
* $M(x,y) \in \chi$ произв. $\Rightarrow \chi: \frac{d(M,F_2)}{d(M,d)} = e \Rightarrow \chi: \frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}{\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

$$\boxed{\chi: (x+1)^2 + (y-1)^2 = (2x-y+1)^2}$$

(Б) $M(x,y) \in \mathcal{P}$ произв. $\Rightarrow \mathcal{P}: d(M, F_1) = d(M, d) \Rightarrow$ парабола $(e=1)$

$$\Rightarrow \mathcal{P}: \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} \quad /^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}: 5(x-1)^2 + 5y^2 = (2x-y+1)^2}$$

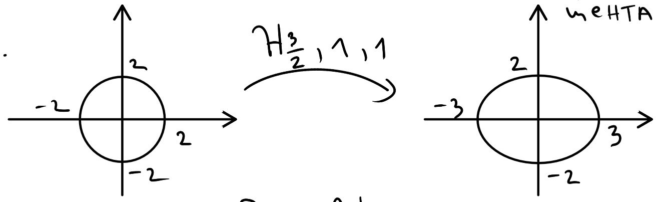
3. [14п] Одредити бар једно афино пресликавање простора којим се круг $k: (x-1)^2+(y+3)^2 = 4$, $z=1$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: 4x^2+9y^2 = 36$, $z=0$. Одредити слику равни $\alpha: x+y+z=0$ при том пресликавању.



$$k: C(1,-3,1),\ r=2 \longmapsto \mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ z=0$$

центар $O(0,0,0)$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow f = H_{\frac{3}{2},1,1} \circ T_{\vec{CO}}, \quad \vec{CO} = (-1,3,-1)$$

$$T_{\vec{CO}}: \begin{aligned} x' &= x-1 \\ y' &= y+3 \\ z' &= z-1 \end{aligned}, \quad H_{\frac{3}{2},1,1}: \begin{aligned} x'' &= \tfrac{3}{2}x' \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \end{aligned} \Rightarrow \boxed{f: \begin{aligned} x'' &= \tfrac{3}{2}(x-1) \\ y'' &= y+3 \\ z'' &= z-1 \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}x''+1 \\ y &= y''-3 \\ z &= z''+1 \end{aligned}$$

$$\alpha: x+y+z=0 \xmapsto{f} \alpha'': \frac{2}{3}x''+1 + y''-3 + z''+1 = 0 \quad /\cdot 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha'': 2x+3y+3z-3=0}$$

4. [16п] Изометријском трансформацијом свести површ $\mathcal{P}: x^2+y^2-2z^2+2xy+3x-4z+5=0$ на канонски облик. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 3/2 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -(\lambda+2)\lambda(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \dots\ v_{-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_0 & \quad v_2 & \quad v_{-2} \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}$$

$$\mathcal{P}': \frac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2) - 2z'^2 - x'^2 + y'^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(x'+y') - 4z' + 5 = 0$$

$$\mathcal{P}': 2y'^2 - 2z'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}y' - 4z' + 5 = 0$$

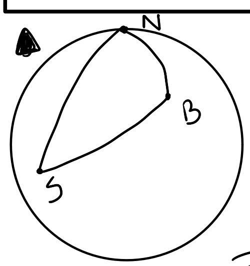
$$\mathcal{P}': 2\left(y' + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \frac{9}{16} - 2(z'+1)^2 + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + 5 = 0$$

$$\mathcal{P}': 2\underbrace{\left(y'+\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)}_{y''}^2 - 2\underbrace{(z'+1)}_{z''}^2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x' - \frac{103}{16} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\underbrace{\left(-x' - \frac{103}{24\sqrt{2}}\right)}_{x''} \quad /:2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}'': y''^2 - z''^2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}x''}$$

хиперболички параболоид

5. [12] Одредити растојање између градова Београд $(45^\circ N, 20^\circ E)$ и Сантјаго $(30^\circ S, 70^\circ W)$, ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371km$.



$B: \varphi_B = 45^\circ,\ \theta_B = 20^\circ$, $S: \varphi_S = -30^\circ,\ \theta_S = -70^\circ$, $N: \varphi_N = 90^\circ$ северни пол

Претпоставимо да је $R=1$:

косинусна теорема за сферни троугао ΔBSN:

$$\cos \overset{\frown}{BS} = \cos \overset{\frown}{NB} \cdot \cos \overset{\frown}{NS} + \sin \overset{\frown}{NB} \sin \overset{\frown}{NS} \cdot \cos \measuredangle BNS$$

$$\overset{\frown}{NB} = \varphi_N - \varphi_B = \frac{\pi}{4}, \quad \overset{\frown}{NS} = \varphi_N - \varphi_S = \frac{2\pi}{3}, \quad \measuredangle BNS = |\theta_B - \theta_S| = \pi/2$$

$$\Rightarrow \cos \overset{\frown}{BS} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Применом хомотетије, на Земљи

$$\Rightarrow \boxed{\overset{\frown}{BS} = 6371 \cdot \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$