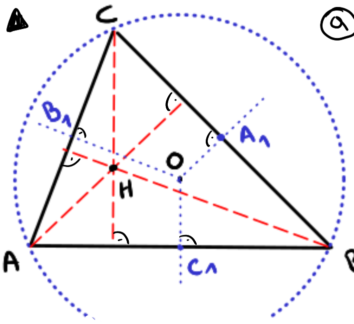
Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ДЕЦЕМБАР ПС - 28.12.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!

1. Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар оштроуглог троугла ABC, редом.
   а) [6п] Ако постоје, одредити реалне бројеве α, β и γ такве да је $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{OC_1} = \gamma\overrightarrow{CH}$, при чему су тачке A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, AC и AB, редом.
   б) [5п] Ако су T_1, T_2 и T_3 тежишта троуглова HBC, HCA и HAB, редом, доказати да важи $\overrightarrow{AT_1}+\overrightarrow{BT_2}+\overrightarrow{CT_3} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
   в) [5п] Ако је P површина троугла ABH и тачке D и E такве да је $\overrightarrow{OD} = -7\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OE} = 8\overrightarrow{A_1E}$, изразити површину троугла ODE у функцији од P.



а) Како је $AH \perp BC$ (висина) и $OA_1 \perp BC$ (симетрала странице)

$\Rightarrow AH \parallel OA_1 \Rightarrow (\exists\alpha)\ \overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{AH}$. Слично, $\overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{OC_1} = \gamma\overrightarrow{CH}$.

Додатно, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA})$

$\Rightarrow -\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2},\ \alpha = \frac{1}{2}$ (јер су $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BH}$ линеарно независни)

Слично, $\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CH}}$

б) T_1 тежиште $\Delta HBC \Rightarrow \overrightarrow{AT_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

T_2 тежиште $\Delta HCA \Rightarrow \overrightarrow{BT_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$, T_3 тежиште $\Delta HAB \Rightarrow \overrightarrow{CT_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AT_1}+\overrightarrow{BT_2}+\overrightarrow{CT_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AH}+\cancel{\overrightarrow{AB}}+\cancel{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{BH}+\cancel{\overrightarrow{BC}}+\cancel{\overrightarrow{BA}}+\overrightarrow{CH}+\cancel{\overrightarrow{CA}}+\cancel{\overrightarrow{CB}}) \overset{а)}{=} \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA_1}+2\overrightarrow{OB_1}+2\overrightarrow{OC_1})$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ и слично $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$

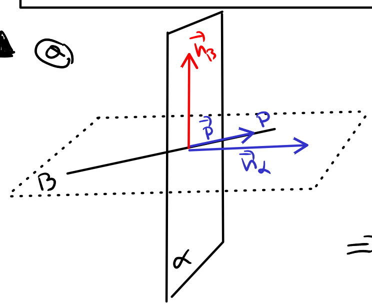
в) $P = P_{ABH} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{HA}\times\overrightarrow{HB}\| = \frac{1}{2}\|(-2)\overrightarrow{OA_1}\times(-2)\overrightarrow{OB_1}\| = 2\|\overrightarrow{OA_1}\times\overrightarrow{OB_1}\|$

$\overrightarrow{OD} = -7\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OE} = 8\overrightarrow{A_1E} = 8\overrightarrow{A_1O} + 8\overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \frac{8}{7}\overrightarrow{OA_1}$

$P_{ODE} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE}\| = \frac{1}{2}\|-7\overrightarrow{OB_1}\times\frac{8}{7}\overrightarrow{OA_1}\| = 4\|\overrightarrow{OA_1}\times\overrightarrow{OB_1}\| \Rightarrow \boxed{P_{ODE} = 2P}$

2. Дате су тачка $T(0,2,3)$, права $p: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ и раван $\alpha: x-3y+4z+2025=0$.
   а) [7п] Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α.
   б) [7п] Одредити једначину праве l која садржи тачку T, паралелна је равни α и сече праву p.

а)



β т.д. $p\subset\beta$, $\beta\perp\alpha$

1) $P(1,2,3)\in p\subset\beta \Rightarrow P\in\beta$ ✓

2) $p\subset\beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{p} = (3,2,1)$

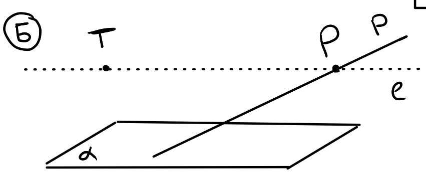
3) $\beta\perp\alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta\perp\vec{n}_\alpha = (1,-3,4)$

$\Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha\times\vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-11,11,11) \parallel (-1,1,1)$ ✓

$\Rightarrow \beta: -1(x-1)+1(y-2)+1(z-3) = 0$

$\boxed{\beta: -x+y+z-4=0}$

б)



$P(3t+1, 2t+2, t+3)\in p$ произвољна

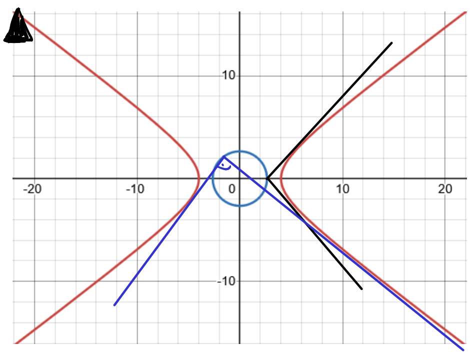
$l = PT$ за P т.д. $\overrightarrow{PT}\parallel\alpha \Rightarrow T\in l$, l сече p, $l\parallel\alpha$

$\overrightarrow{PT} = (-3t-1, -2t, -t)$

$0 = \overrightarrow{PT}\circ\vec{n}_\alpha = (-3t-1,-2t,-t)\circ(1,-3,4) = -3t-1+6t-4t \Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow P(-2,0,2)$, $\vec{l} = \overrightarrow{PT} = (2,2,1) \Rightarrow \boxed{l: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}}$

3. [15п] Одредити геометријско место тачака из којих се хипербола $H: 9x^2-16y^2 = 144$ види под правим углом.



$M(x_0,y_0)$ произвољна, $t: y = kx+n$ тангента

1) t тангента на $H: 9x^2-16y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow t$ има једну пресечну тачку са H

$\Rightarrow 9x^2 - 16(kx+n)^2 = 144$

$\Rightarrow 9x^2 - 16k^2x^2 - 32kxn - 16n^2 = 144$

$\Rightarrow (9-16k^2)x^2 - 32knx - 16n^2 - 144 = 0$

t тант. на $\mathcal{E} \Rightarrow 0 = D = (32kn)^2 + 4(9-16k^2)\cdot 16(n^2+9)$

$\Rightarrow 16\cdot 64\, \cancel{k^2} n^2 + 64\,(9n^2+81-16k^2n^2-144k^2)=0 \quad /:64$

$\Rightarrow \cancel{16k^2n^2} + 9n^2+81-\cancel{16k^2n^2}-144k^2=0$ + услов додира $a^2k^2-b^2=n^2$

$\Rightarrow 144k^2-81=9n^2 \quad /:9 \quad \Rightarrow \boxed{16k^2-9=n^2}$

⊛ H се види под правим углом из M $\Leftrightarrow$ тангенте из M на H су међусобно ортогоналне

2) $M(x_0,y_0)\in t \Rightarrow y_0=kx_0+n \Rightarrow \boxed{n=y_0-kx_0}$

3) t танг. на $H \Rightarrow 16k^2-9=(y_0-kx_0)^2=y_0^2-2kx_0y_0+k^2x_0^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{(16-x_0^2)}}_{A}k^2+\underbrace{\boxed{2x_0y_0\,k}}_{B}\underbrace{\boxed{-(9+y_0^2)}}_{C}=0$$

$$t_1\perp t_2 \Leftrightarrow -1=k_1\cdot k_2 \overset{\text{Вијет}}{=} C/A=\frac{-9-y_0^2}{16-x_0^2} \Leftrightarrow x_0^2-16=-9-y_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=7 \Leftrightarrow \boxed{M\in k(0,\sqrt{7})} \Rightarrow \boxed{\text{ГМТ је круг } k}$$

■

4. [13п] Површ $x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz=1$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која површ је у питању?

▲ $A=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\\lambda-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1-\lambda\\-1&2-\lambda&-2\\\lambda-1&0&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(2-2+3\lambda-\lambda^2)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1=0}$

$Bv=0$

$\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0$

$a-b=0$
$-a+2b-c=0$ ✓
$-b+c=0$

$a=b,\ c=b$

$\Rightarrow \boxed{v_0=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}$

$\boxed{\lambda_2=1}$

$(B-E)v=0$

$\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0$

$-b=0$
$-a+b-c=0$
$-b=0$

$b=0 \Rightarrow a=-c$

$\Rightarrow \boxed{v_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}$

$\boxed{\lambda_3=3}$

$(B-3E)v=0$

$\begin{bmatrix}-2&-1&0\\-1&-1&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{aligned}-2a-b&=0\\-a-b-c&=0\\-b-2c&=0\end{aligned}$

$b=-2c \Rightarrow a=c$

$\Rightarrow \boxed{v_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}}$$

$$A'=R^TAR=\begin{bmatrix}1/\sqrt3&1/\sqrt3&1/\sqrt3&0\\-1/\sqrt2&0&1/\sqrt2&0\\1/\sqrt6&-2/\sqrt6&1/\sqrt6&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6&0\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6&0\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

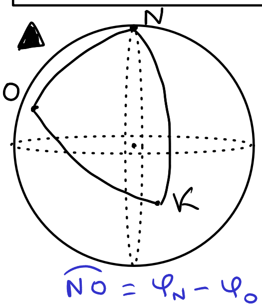
$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1/\sqrt2&0&1/\sqrt2&0\\3/\sqrt6&-\sqrt6&3/\sqrt6&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6&0\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6&0\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S': y'^2+3z'^2-1=0 \Rightarrow \boxed{\boxed{S': y'^2+3z'^2=1}\ \text{елиптички цилиндар}}$$

■

5. [12] Одредити растојање између градова Отава $(45°N, 75°W)$ и Кејптаун $(45°S, 15°E)$, ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R=6371km$.

▲



Означимо са O и K локације Отаве и Кејптауна
Претпоставимо да је $R=1$ и N северни пол

$O: \varphi_o=45°,\ \theta_o=-75°,\quad K: \varphi_K=-45°,\ \theta_K=15°,\quad N: \varphi_N=90°$

Косинусна теорема за сферни троугао ONK

$$\Rightarrow \cos\overset{\frown}{OK}=\cos\overset{\frown}{NO}\cdot\cos\overset{\frown}{NK}+\sin\overset{\frown}{NO}\cdot\sin\overset{\frown}{NK}\cdot\cos\measuredangle ONK$$

$\overset{\frown}{NO}=\varphi_N-\varphi_o=45°=\frac{\pi}{4}$, $\overset{\frown}{NK}=\varphi_N-\varphi_K=135°=\frac{3\pi}{4}$, $\measuredangle ONK=|\theta_o-\theta_K|=90°=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos\overset{\frown}{OK}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}$$

$$\cos\overset{\frown}{OK}=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)+0=-\frac12 \Rightarrow \overset{\frown}{OK}=\arccos\left(-\frac12\right)=\frac{2\pi}{3}$$

Применом хомотетије, на Земљи

$$\Rightarrow \boxed{\overset{\frown}{OK}=6371\cdot\frac{2\pi}{3}\,km=\frac{12742}{3}\pi\,km}$$

■