



1. Нека је $ABCD$ правоугли трапез са краћим краком AD и основицама AB и CD , при чему је $\|\vec{AB}\| = 3\|\vec{CD}\|$. Нека је $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{CD} = \vec{b}$ и тачка M је средиште крака BC .
- а) [5п] Изразити вектор $\vec{AM}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако је $\|\vec{a}\| = 3$ и $\|\vec{b}\| = 2$, одредити $\|\vec{AM}\|$, угао $\angle BAM$ и површину троугла ABM .
- б) [4п] У равни трапеза $ABCD$ изабрана су два афина репера: репер Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{e}_1 = \frac{1}{6}\vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{AD}$ и репер $Tx'y'$ са почетком у тежишту T троугла ABM и координатним векторима $\vec{f}_1 = \vec{TA}$ и $\vec{f}_2 = \vec{TB}$. Изразити координате (x, y) преко координата (x', y') .

а) $M = S(BC) \xRightarrow{1.4} \vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$
 $\Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2} (3\vec{DC}) + \frac{1}{2} (\vec{AD} + \vec{DC}) = \frac{1}{2} \vec{AD} + 2\vec{DC}$
 $\Rightarrow \boxed{\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{a} - 2\vec{b}}$ $\|\vec{AM}\| = \frac{\sqrt{73}}{2}$

како је $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\|\vec{AM}\|^2 = \vec{AM} \cdot \vec{AM} = (\frac{1}{2} \vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\frac{1}{2} \vec{a} - 2\vec{b}) = \frac{1}{4} \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\|\vec{b}\|^2 = \frac{9}{4} + 0 + 16 = \frac{73}{4}$
 $\Rightarrow \angle BAM = \angle(\vec{AB}, \vec{AM}) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AM}\|} = \frac{(-3\vec{b}) \cdot (\frac{1}{2} \vec{a} - 2\vec{b})}{3 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2}} = \frac{6\|\vec{b}\|^2}{3 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} \cdot 6} = \frac{8}{\sqrt{73}}$
 $\Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos \frac{8}{\sqrt{73}}}$ $\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{64}{73}} = \frac{3}{\sqrt{73}}$

$P_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AM}\| = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AM}\| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}} = \boxed{\frac{9}{2}}$

б) T тежиште $\triangle ABM \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3} (\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AM})$
 $[\vec{T}]_{Ae} = [\vec{AT}]_e \stackrel{0}{=} [\frac{1}{3} (6\vec{e}_1) + \frac{1}{3} (\frac{1}{2}(3\vec{e}_2) + 4\vec{e}_1)]_e = (\frac{10}{3}, \frac{1}{2})$
 $[\vec{f}_1]_e = [\vec{TA}]_e = [-\frac{10}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2]_e = (-\frac{10}{3}, -\frac{1}{2})$
 $[\vec{f}_2]_e = [\vec{TB}]_e = [\vec{TA} + \vec{AB}]_e = [-\frac{10}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 6\vec{e}_1]_e = [\frac{8}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2]_e = (\frac{8}{3}, -\frac{1}{2})$
 $\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/3 & 8/3 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$

2. а) [5п] Одредити једначину равни α која са равни $\beta: 4x + y + 8z - 12 = 0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву $p: x = 2, y + 1 = z$.
- б) [4п] Одредити формуле хомотетије са центром у тачки $S(-1, 0, 1)$ и коефицијентом -3 , као и слику равни α (из дела а)) при овој хомотетији.

а) $p: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \subset \alpha \xRightarrow{4.20} \alpha: \lambda_1(x - 2) + \lambda_2(y - z + 1) = 0$
 Остаје још да обезбедимо $\angle(\alpha, \beta) = \pi/4$: $\vec{n}_\beta = (4, 1, 8)$

1) $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \alpha: y - z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (0, 1, -1)$
 $\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|1 - 8|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{81}} = \frac{7}{9\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ није тражена равна

2) $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha: x - 2 + \lambda(y - z + 1) = 0 \Rightarrow \alpha: x + \lambda y - \lambda z + \lambda - 2 = 0$
 $\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1, \lambda, -\lambda)$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|4 + \lambda - 8\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda^2} \cdot 9} = \frac{|4 - 7\lambda|}{9\sqrt{1 + 2\lambda^2}} / 2$
 $2 \cdot 81(1 + 2\lambda^2) = 4 \cdot (16 - 56\lambda + 49\lambda^2)$
 $81 + 162\lambda^2 = 32 - 112\lambda + 98\lambda^2 \Rightarrow 64\lambda^2 + 112\lambda + 49 = 0$

$$\Rightarrow (8\lambda + 7)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{8} \Rightarrow d: x - \frac{7}{8}y + \frac{7}{8}z - \frac{23}{8} = 0 \quad | \cdot 8$$

$$\textcircled{6} \quad S(-1, 0, 1), \quad \kappa = -3 \Rightarrow d: 8x - 7y + 7z - 23 = 0$$

$$M(x, y, z) \xrightarrow{\chi_{S, -3}} M'(x', y', z') \Leftrightarrow \vec{SM}' = -3\vec{SM} \quad \begin{cases} x' = -3x - 4 \\ y' = -3y \\ z' = -3z + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x' + 1, y', z' - 1) = -3(x + 1, y, z - 1) \Rightarrow \chi_{S, -3}: \begin{cases} y' = -3y \\ z' = -3z + 4 \end{cases}$$

$$\text{КАКО } S \notin d \Rightarrow \chi_{S, -3}(d) = d', \quad d' \parallel d$$

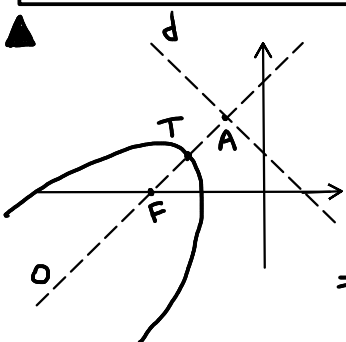
$$\begin{array}{c} d \\ A \end{array} \quad A(2, 0, 1) \in d \Rightarrow \chi_{S, -3}(A) = A'(-10, 0, 1) \in d'$$

$$d' \parallel d \Rightarrow \vec{n}_{d'} = \vec{n}_d = (8, -7, 7)$$

$$\Rightarrow d': 8(x + 10) - 7(y - 0) + 7(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow d': 8x - 7y + 7z + 73 = 0$$

3. [7п] Одредити једначину параболе која има теме $T(-2, 1)$ и жижу $F(-3, 0)$. Скицирати слику.



$$1) \text{ ОСА ПАРАБОЛЕ JE } O = FT \Rightarrow \vec{O} = \vec{FT} = (1, 1)$$

$$2) \text{ НЕКА JE } d \text{ ДИРЕКТРИСА И } d \cap O = A$$

$$\Rightarrow T = S(FA) \Rightarrow [A] = 2[T] - [F] \Rightarrow A(-1, 2)$$

$$3) \text{ Д Т.Д. } A \in d, \quad d \perp O \Rightarrow \vec{n}_d = \vec{O} = (1, 1)$$

$$\Rightarrow d: 1(x + 1) + 1(y - 2) = 0 \Rightarrow d: x + y - 1 = 0$$

$$4) M(x, y) \in \mathcal{P} \text{ произв } \Rightarrow d(M, F) = d(M, d)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}: \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathcal{P}: 2(x + 3)^2 + 2y^2 = (x + y - 1)^2$$

4. [9п] Свести једначину површи $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4z^2 - 13 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 4)(\lambda - 5)(\lambda + 5)$$

$$\dots \Rightarrow \vartheta_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vartheta_{-3} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vartheta_{-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

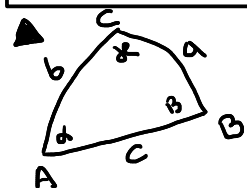
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ z = z' \end{cases}$$

$$\mathcal{P}': \frac{3}{5}(4x'^2 + 4x'y' + y'^2) + \frac{8}{5}(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2) - \frac{3}{5}(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) - 4z'^2 - 13 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}': 5x'^2 - 5y'^2 - 4z'^2 - 13 = 0 \Rightarrow \mathcal{P}': \frac{y'^2}{13/5} + \frac{z'^2}{13/4} - \frac{x'^2}{13/5} = -1$$

$\Rightarrow$ ДВОГРАНИ ХИПЕРБОЛОИД

5. [6п] Сферни троугао на сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ има углове $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ и страну $\overline{AB} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. Одредити преостале стране и угао тог троугла, као и његову површину.



$$\alpha = \pi/3$$

$$\beta = \pi/2$$

$$\cos c = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ДУАЛНА
КОСИНУСА

$$\Rightarrow -\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

$$-\cos \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \pi/3$$

$$\alpha = \gamma \Rightarrow a = c = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ДУАЛНА
КОСИНУСА

$$\Rightarrow -\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos b \Rightarrow \cos b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \arccos \frac{1}{3}$$

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$