# Rešenja zadataka sa drugog kolokvijuma - I grupa

22. januar 2017

1. Znajući kako izgleda funkcija $y = ln(x)$, možemo zaključiti da će $y = \ln(x^2)$ izgledati isto za $x > 0$, dok će za $x < 0$ ona takodje biti definisana (jer je i tada $x^2 > 0$) i izgledaće kao i funkcija $y = \ln(x)$ preslikana u ogledalu u odnosu na pravu $x = 0$. Medjutim, s obzirom na ostale prave koje figurišu u zadatku, nama je potreban samo deo funkcije $\ln(x^2)$ za $x > 0$. Dakle:

$$P = \int_1^2 \ln(x^2)dx = 2\int_1^2 \ln(x)dx = [PI] = x\ln(x)|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln(2) - 1.$$

2.

$$x^2y' - 4xy = x^3(x^2-5)\sqrt{y}$$

$$y' - \frac{4}{x}y = x(x^2-5)y^{\frac{1}{2}}$$

Bernulijeva dif. j-na $\rightarrow$ smena $y = u^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = u^2$, $y' = 2uu'$.

$$2uu' - \frac{4}{x}u^2 = x(x^2-5)u$$

$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{x(x^2-5)}{2}$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina. Koristeći formulu za nalaženje opšteg rešenja, dobija se:

$$u(x) = e^{2\ln(x)}(c + \int \frac{x^3-5x}{2}e^{-2\ln(x)}dx)$$

$$u(x) = x^2(c + \frac{1}{2}\int(x - \frac{5}{x})dx)$$

$$u(x) = x^2(c + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{2}\ln(|x|)$$

$$y(x) = u(x)^2 = (x^2(c + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{2}\ln(|x|)))^2$$

3.

$$y'' + 3y' - 4y = xcos2x$$

homogena: $y'' + 3y' - 4y = 0$

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$$

$$y_h = c_1e^{-4x} + c_2e^x$$

Tražimo $y_p = x^s e^{\alpha x}(P_m(x)sin(\beta x) + Q_m(x)cos(\beta x))$. $f(x) = xcos2x \to \alpha = 0, \beta = 2, m = 1($ imamo samo polinom $x$), $4s = 0(0 + 2i$ nije rešenje karakteristične jednačine).

$$y_p = (Ax + B)sinc2x + (Cx + D)cos2x$$
$$y_p' = (A - 2D - 2Cx)sin2x + +(2Ax + 2B + c)cos2x$$
$$y_p'' = (-4C - 4Ax - 4B)sin2x + (4A - 4D - 4Cx)cos2x$$

Zamenom u polaznu diferencijalnu jednačinu, pritom izjednačavajući sve što je uz cos2x, sin2x sa leve i desne strane jednakosti, pa kasnije isto tako i sa polinomima $x^1, x^0$, dobija se sistem:

$$-8A - 6C = 0$$
$$-8B + 3A - 4C - 6D = 0$$
$$-8C + 6A = 1$$
$$4A + 6B + 3C - 8D = 0$$

Rešavanjem ovog sistema dobijaju se brojevi:
$A = \frac{3}{50}, B = \frac{1}{25}, C = \frac{-2}{25}, D = \frac{3}{100}$.
4.
a) Ω=PP1,PP2,PP3,PP4,PP5,PP6,
PG1, PG2, PG3, PG4, PG5, PG6,
GP1, GP2, GP3, GP4, GP5, GP6,
GG1, GG2, GG3, GG4, GG5, GG6.
Ukupan broj ishoda je 24.
b) U pitanju je uslovna verovatnoća:
A: "palo tačno jedno pismo"
B: "pala trojka na kockici"

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{24}}{\frac{4}{24}} = \frac{1}{2}$$

c)
A: "bar jedna glava"
B: "paran broj na kockici"

Traži se P(A U B).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{18}{24} + \frac{12}{24} - \frac{9}{24} = \frac{21}{24}$$

5.
Kod slučajne promenljive mora da važi da verovatnoće svih dogadjaja u zbiru daju 1. Dakle:

$$\frac{3}{2}a + \frac{1}{4}a + a^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$4a^2 + 7a - 2 = 0$$

$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = -2$.
Kako zamenom $a_2 = -2$ dobijamo negativne verovatnoće, što nije moguće, dobija se da je jedino rešenje za parametar $a = \frac{1}{4}$.

$$EX = -\frac{5}{16}$$

$$EX^2 = \frac{33}{16}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{503}{256}$$