① $f=u+iv$ $\qquad \Omega=\{z\in\mathbb{C}: |z-1|<1\}$

$v=3x^2y-6xy+3y-y^3+1$, $f(0)=i$ $\qquad \max\limits_{z\in\bar\Omega}|f(z)|=?$

KP: $\left.\begin{array}{l}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{array}\right\}$ $\quad u_x=v_y=3x^2-6x+3-3y^2$

$u_y=-(6xy-6y)=6y-6xy \Rightarrow u(x,y)=\int(6y-6xy)\,dy=6\frac{y^2}{2}-6x\frac{y^2}{2}+C(x)$

$u(x,y)=3y^2-3xy^2+C(x)$

$u_x=\cancel{-3y^2}+C'(x)=3x^2-6x+3\cancel{-3y^2}$

$C(x)=\int(3x^2-6x+3)\,dx=x^3-3x^2+3x+D$

$\Rightarrow u(x,y)=3y^2-3xy^2+x^3-3x^2+3x+D$

$\Rightarrow f=u+iv=x^3-3x^2+3x+3y^2-3xy^2+i(3x^2y-6xy+3y-y^3+1)+D$

$f(0)=D+i=i \Rightarrow D=0$

$f(x+iy)=(x-1)^3+1+3y^2(1-x)+i\,3y\cdot(x^2-2x+1)-iy^3+i$

$=(x-1)^3-3y^2(x-1)+3iy(x-1)^2-iy^3+i+1$

$=(x-1)^3-3y^2(x-1)+3iy(x-1)^2+i^3y^3+i+1$

$=(x-1)^3+3(iy)^2(x-1)+3iy(x-1)^2+(iy)^3+i+1$

$=(x-1+iy)^3+i+1=(z-1)^3+i+1$

$\Rightarrow \boxed{f(z)=(z-1)^3+i+1}$

II начин:

$f(x+i\cdot 0)\overset{y=0}{=}x^3-3x^2+3x+i$

$f(x)=(x-1)^3+1+i$

$\Rightarrow f$ и ф-ја $(z-1)^3+1+i$ се поклапају на реалној оси па на основу теореме једнакости се поклапају на $\mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z)=(z-1)^3+1+i$

ПММ: $\max\limits_{z\in\bar\Omega}|f(z)|=\max\limits_{z\in\partial\Omega}|f(z)|=\max\limits_{|z-1|=1}|f(z)|=\max\limits_{|z-1|=1}|(z-1)^3+i+1|$

$|(z-1)^3+1+i|\le|z-1|^3+|1+i|\underset{|z-1|=1}{=}1+\sqrt{1^2+1^2}=1+\sqrt2$, = се достиже када су $|z-1|^3$ и $1+i$ колинеарни (као вектори) и истог смера

$z-1=e^{i\varphi}$ $\quad e^{i3\varphi}$ $\quad$ имају исти arg!

$1+i=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt2}e^{i\pi/4}$

$\Rightarrow 3\varphi=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{12}$

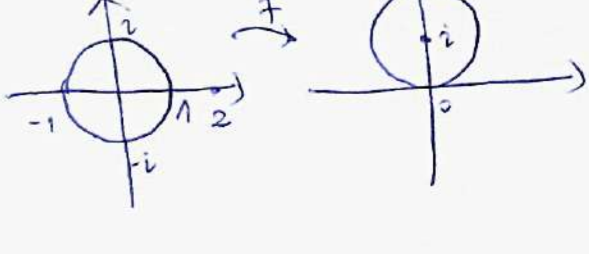
$\boxed{=\text{ за } z=1+e^{i\pi/12}}$

Дакле, $\max\limits_{z\in\bar\Omega}|f(z)|=1+\sqrt2$.

② a) $f: -i\mapsto 0$

$2\mapsto\frac{3-i}{4}$

$|z|=1\longrightarrow|w-i|=1$



* симетричне тачке се сликају у симетричне (симетрија у односу на кружнице је инверзија)

Симетрична тачка са 2 у односу на $K_1:|z|=1$ је тачка $\frac12$ $\left(\psi_{0,1}(z)=\frac{1}{\bar z}\right)$

Симетрична тачка са $\frac{3-i}{4}$ у односу на $K_2:|w-i|=1$ се добија формулом

$\psi_{i,1}(z)=i+\frac{1}{\bar z-\bar i}$

$$\psi_{2,1}\left(\frac{3-i}{4}\right) = i + \frac{1}{\frac{3-i}{4}-2} = i + \frac{1}{\frac{3-i-4i}{4}} = i + \frac{4}{3-5i} = i + \frac{4}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$$

$$= i + \frac{12-20i}{34} = \frac{34i+12-20i}{34} = \frac{12+14i}{34} = \frac{6+7i}{17}$$

Дакле,

1. $-i \longmapsto 0$
2. $2 \longmapsto \frac{3-i}{4}$
3. $\frac{1}{2} \longmapsto \frac{6+7i}{17}$

$\quad\uparrow z \qquad \uparrow w$

$w = f(z)$

$$\frac{f(z)-w_1}{f(z)-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

$$(1+2i)(5i-3) = 5i-10-3-6i = -13-i$$

$$\frac{6+7i}{13+i}\cdot\frac{13-i}{13-i} = \frac{78+91i-6i+7}{169+1} = \frac{85+85i}{170} = \frac{1+i}{2}$$

$$\frac{f(z)-0}{f(z)-\frac{3-i}{4}} : \frac{\frac{6+7i}{17}-0}{\frac{6+7i}{17}-\frac{3-i}{4}} = \frac{z+i}{z-2} : \frac{\frac{1}{2}+i}{\frac{1}{2}-2} \begin{matrix}\cdot 2\\ \cdot 2\end{matrix}$$

$$\frac{f(z)}{f(z)-\frac{3-i}{4}} : \frac{\frac{6+7i}{17}}{\frac{24+28i-51+17i}{17\cdot 4}} = \frac{z+i}{z-2} : \frac{1+2i}{-3}$$

$$\frac{f(z)}{f(z)-\frac{3-i}{4}} : \frac{4(6+7i)}{45i-27} = \frac{z+i}{z-2}\cdot\frac{-3}{1+2i}$$

$$\frac{f(z)}{f(z)-\frac{3-i}{4}} = \frac{z+i}{z-2}\cdot\frac{-\cancel{3}^{1}}{1+2i}\cdot\frac{4(6+7i)}{\cancel{9}_{3}(5i-3)} = \frac{z+i}{z-2}\cdot\frac{(-4)}{3}\cdot\frac{6+7i}{\underbrace{(1+2i)(5i-3)}_{-(13+i)}} = \frac{z+i}{z-2}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1+i}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{f(z)}{f(z)-\frac{3-i}{4}} = \frac{z+i}{z-2}\cdot 2(1+i)\cdot\frac{1}{3}$$

$$(1+i)(3-i) = 3+3i-i+1 = 4+2i$$

$$3f(z)(z-2) = 2(1+i)\left(f(z)-\frac{3-i}{4}\right)(z+i)$$

$$f(z)\left(3z-6-2(1+i)(z+i)\right) = -\cancel{2}(1+i)\frac{3-i}{\cancel{4}_{2}}(z+i)$$

$$1-2i = -i(2+i)$$

$$f(z)(3z-6-2z-2iz-2i+2) = -(2+i)(z+i)$$

$$f(z)(z-2iz-2i-4) = -(2+i)(z+i)$$

$$|:(2+i)(-1)$$

$$f(z) = \frac{-(2+i)(z+i)}{z(1-2i)-2(i+2)} = \frac{-(2+i)(z+i)}{-i(2+i)z-2(i+2)} = \frac{z+i}{iz+2}$$

б)

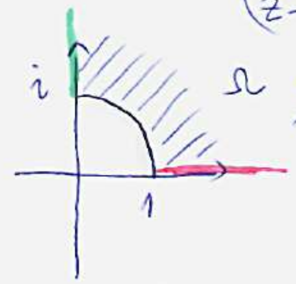
$$f(z) = \frac{z+i}{iz+2} = \frac{z+i}{i(z-2i)} = \frac{z-2i+2i+i}{i(z-2i)} = \frac{1}{i} + \frac{3i}{i(z-2i)} = -i + 3\cdot\frac{1}{z-2i}$$

$$f(z) = -i + 3\cdot\left(\frac{1}{z-2i}\right)$$

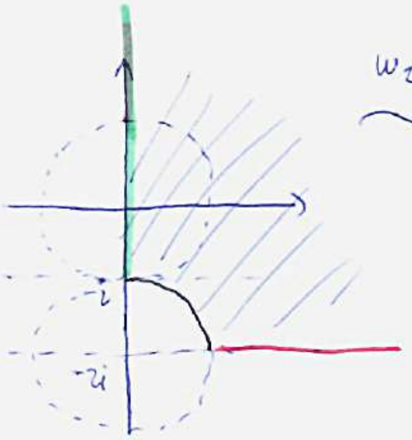
Наставак 2д)

(мало већа размера)

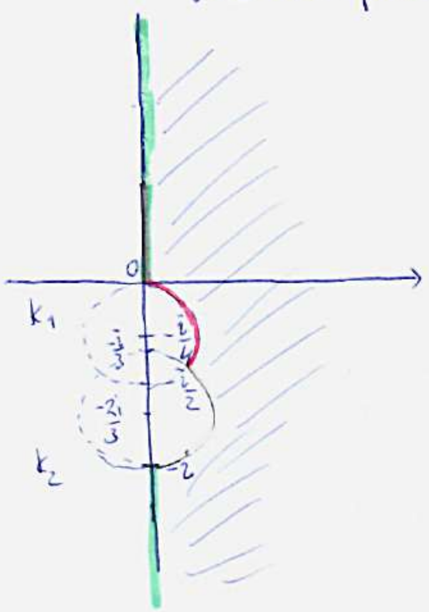
$$f(z) = -i + 3\cdot\overline{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$$



$\xrightarrow{w_1(z)=z-2i}$



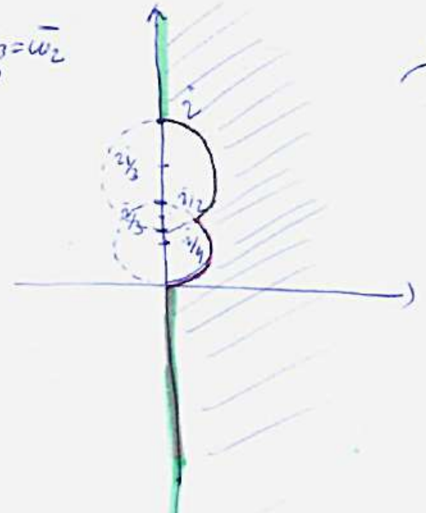
$\xrightarrow{w_2=\frac{1}{w_1}}$



објашњење (нисте морали да ги пишете, пишем да би Вама било јасније)

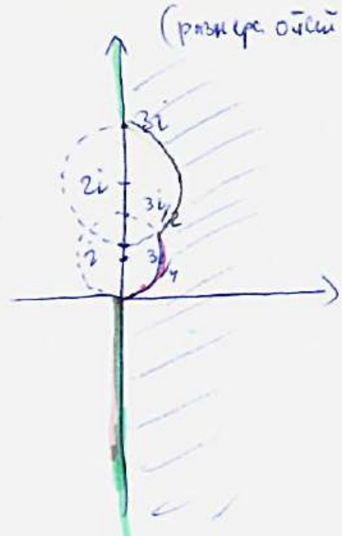
- права $y=-2$ се слика у кружницу k_1 која садржи 0 (јер права садржи ∞) и садржи $\frac{-i}{2}$ (јер $-2i \mapsto \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$) и пошто је права $y=-2$ сим. у односу на y осу, то је и њена слика симетрична у односу на y осу, па је центар кружнице k на y оси, тј. дуж која спаја 0 и $\frac{-i}{2}$ је баш пречник кружнице k_1, па је њен центар баш на средини дужи тј. у $\frac{-i}{4}$ $\Rightarrow k_1\left(-\frac{i}{4}, \frac{1}{4}\right)$
- права $x=0$ се слика на себе (не тачка по тачка!)
- кружница са центром $-2i$ и пол. 1 се слика на кружницу k_2 (јер не садржи 0) која не садржи 0. Пошто $-i \mapsto \frac{1}{-i} = \frac{1}{i} = -i$ и $-3i \mapsto \frac{1}{-3i} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}$ то ће k_2 садржати $-i$ и $-\frac{i}{3}$, а опет због симетрије у односу на y осу центар k_2 мора бити на y оси, па је дуж која спаја $-\frac{i}{3}$ и $-i$ баш пречник кружнице k_2
 $\Rightarrow k_2\left(-\frac{2i}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- граница области се слика на границу (обојила сам) ($i \mapsto i$, па је област осенчена)

$\xrightarrow{w_3=\overline{w_2}}$

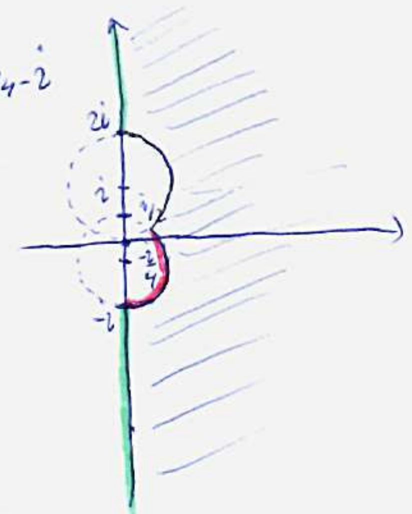


$\xrightarrow{w_4=3w_3}$

(размера опет није иста)



$\xrightarrow{w_5=w_4-i}$



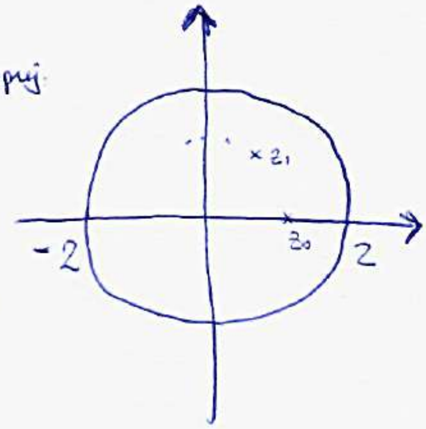
$$f(\Omega) = \left\{w\in\mathbb{C} : |w-i|>1,\ \left|w+\frac{i}{4}\right|>\frac{3}{4},\ \operatorname{Re} w>0\right\}$$

③

$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-5)(1-z^n)}$, $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+x+1}\,dx$

I : $f(z) = \frac{1}{(z-5)(1-z^n)} = \frac{-1}{(z-5)(z^n-1)}$

$\gamma : |z| = 2$, поз. ориј.



$I = \int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz$

f има полове првог реда у $z = 5$ и $z_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $(k=0,1,2,\dots,n-1)$

$\Rightarrow I = 2\pi i \sum\limits_{k=0}^{n-1} Res(f, z_k)$, $5 \notin int\,\gamma$, $z_k \in int\,\gamma$

Важи $Res(f,5) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} Res(f, z_k) = Res(g, 0)$, где је $g(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

$$g(z) = \frac{1}{z^2} \frac{-1}{\left(\frac{1}{z}-5\right)\left(\frac{1}{z^n}-1\right)} = \frac{-z^{n+1}}{z^2(1-5z)(1-z^n)} = \frac{z^{n-1}}{(z^n-1)(1-5z)}$$

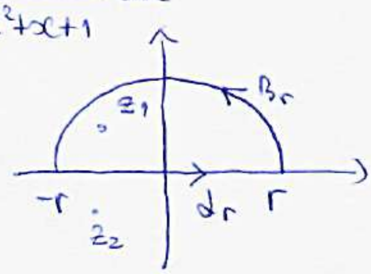
g је хол. у $0 \Rightarrow Res(g,0) = 0$

$Res(f,5) = \lim\limits_{z\to5} (z-5)f(z) = \lim\limits_{z\to5} \frac{-1}{z^n-1} = \frac{-1}{5^n-1}$ $\Bigg\} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1} Res(f, z_k) = \frac{1}{5^n-1}$

$\Rightarrow I = 2\pi i \frac{1}{5^n-1} = \frac{2\pi i}{5^n-1}$ (зад. са вежби - КТО зад ④)

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re\, e^{inx}}{x^2+x+1}\,dx = Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{x^2+x+1}\,dx$$

$f(z) = \frac{e^{inz}}{z^2+z+1}$ интегралимо по полукружници



$r > 0$, $V_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r, Im\, z > 0\}$

$\partial V_r = \gamma_r = d_r + \beta_r$ (+ ориј.)

$\int\limits_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum\limits_{\substack{z \in int\,\gamma_r \\ z \text{ синг.}}} Res(f,z)$

$z^2 + z + 1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$\boxed{\int\limits_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot Res(f, z_1)}$ $\Leftarrow$

$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

z_1 и z_2 су полови реда 1 fје f

за $r > 1$ $z_1 \in int\,\gamma_r$, $z_2 \notin int\,\gamma_r$

$$Res(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{inz}}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)}\cancel{(z-z_1)} = \frac{e^{inz_1}}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\, e^{in\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2}{2i\sqrt{3}} \cdot e^{\frac{-in}{2} - \frac{n\sqrt{3}}{2}} = \frac{-i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{n\sqrt{3}}{2}} e^{-in/2} = \frac{-i}{\sqrt{3}} e^{\frac{-n\sqrt{3}}{2}} \left(\cos\frac{n}{2} - i \sin\frac{n}{2}\right)$$

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{-i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{n\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{n}{2} - i\sin\frac{n}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{n\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\cos\frac{n}{2} - i\sin\frac{n}{2}\right)$$

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{d_r} f(z)\,dz + \int_{B_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{inz}}{z^2+z+1}dz + \int_{B_r} \frac{e^{inz}}{z^2+z+1}dz$$

$$= \underset{z=x,\ x\in(-r,r)}{\int_{-r}^{r}} \frac{e^{inx}}{x^2+x+1}dx + \underbrace{\int_{B_r} \frac{e^{inz}}{z^2+z+1}dz}_{\xrightarrow[r\to\infty]{} 0} \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{x^2+x+1}dx \quad (*)$$

$inz = in(x+iy) = inx - ny$

$$\left|\int_{B_r} \frac{e^{inz}}{z^2+z+1}dz\right| \underset{ОНН}{\le} \int_{B_r} \frac{|e^{inz}|}{|z^2+z+1|}|dz| = \int_{B_r} \frac{e^{Re(inz)}}{|z^2+z+1|}|dz| = \int_{B_r} \frac{e^{-n\cdot \overbrace{Im z}^{\ge 0}}}{|z^2+z+1|} \le 1$$

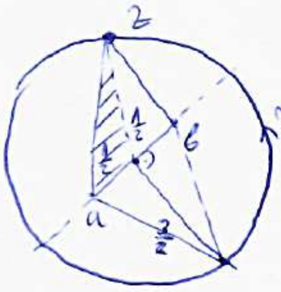
$|z^2+z+1| \ge |z|^{3/2}$ за довољно велико $|z| = r$

па је $$\int_{B_r} \frac{e^{-n Im z}}{|z^2+z+1|}|dz| \le \int_{B_r} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \underset{l(B_r)=r\pi}{=} \frac{1}{r^{3/2}}\cdot r\cdot\pi = \frac{\pi}{\sqrt{r}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-n\sqrt{3}/2}\left(\cos\frac{n}{2} - i\sin\frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow J = Re\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{n\sqrt{3}}{2}} \cos\frac{n}{2}$$

4) $\gamma = \left\{z\in\mathbb{C} : \left|z - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{3}{2}\right\}$, $|a-b| = 1$



Da, b

$|f(z)| \le M \quad \forall z\in\gamma$

$|f(a) - f(b)| \le \frac{3}{2}M$, $|f'(a) - f'(b)| \le \frac{9}{2}M$ (?)

$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$, $f(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-b}dz$

$$|f(a) - f(b)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-b}\right)dz\right| \underset{ОНН}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|f(z)\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)\right||dz|$$

$$\le \frac{M}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right||dz| = \frac{M}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{z-b-z+a}{(z-a)(z-b)}\right||dz| \underset{|a-b|=1}{=} \frac{M}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{\underbrace{|(z-a)(z-b)|}_{\ge 1}}$$

$|z-a| \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ (нej Δ), $|z-b| \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$$\le \frac{M}{2\pi} l(\gamma) = \frac{M}{2\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}M$$

$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$

$f'(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-b)^2}dz$

$$|f'(a) - f'(b)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(z)\left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z-b)^2}\right)dz\right| \underset{ОНН}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \underbrace{|f(z)|}_{\le M}\left|\frac{(z-b)^2 - (z-a)^2}{(z-a)^2(z-b)^2}\right||dz| \le \frac{M}{2\pi}\int_\gamma \frac{|b^2 - 2zb - a^2 + 2za|}{\underbrace{|z-a|^2|z-b|^2}_{\ge 1}}|dz|$$

$$\le \frac{M}{2\pi}\int_\gamma |(b-a)(b+a) - 2z(b-a)||dz| = \frac{M}{2\pi}\int_\gamma \underbrace{|b-a|}_{1}\underbrace{|b+a-2z|}_{2|z-\frac{a+b}{2}|=3}|dz| = \frac{3M}{2\pi}l(\gamma) = \frac{3M}{2\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{9}{2}M$$