УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Златко Лазовић

МЕРЕ НЕКОМПАКТНОСТИ НА ХИЛБЕРТОВИМ C*-МОДУЛИМА

Докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Zlatko Lazović

MEASURES OF NONCOMPACTNESS OVER HILBERT C^*-MODULES

— Doctoral Dissertation —

Belgrade, 2019.

Ментор:

др Драгољуб Кечкић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Милош Арсеновић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Ђорђе Кртинић, ванредни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Иван Д. Аранђеловић, редовни професор,
Машински факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Желим да изразим своју искрену захвалност свом ментору проф. др Драгољубу Кечкићу за сталну подршку током мојих докторских студија и истраживања везаних за проблеме на Хилбертовим C^*-модулима, за његово стрпљење, мотивацију, разумевање и стручно усмеравање. Његова изузетна посвећеност, као и велики број идеја и драгоцених савета су ми помогли да сагледам проблематику на прави начин, употпуним своје знање и суштински су допринели у изради ове дисертације.

Захваљујем се проф. др Зорану Каделбургу на великој подршци током мојих магистарских и докторских студија.

Желим такође да се захвалим члановима комисије, а посебно проф. др Ђорђу Кртинићу, за савестан, свестран и предан рад приликом разматрања и евалуације ове дисертације, за њихове сугестије, коментаре и савете који су допринели да ова дисертација буде још квалитетнија и да добије своју финалну форму.

Велику захвалност дугујем и др Марку Обрадовићу који је дао низ корисних запажања као и значајан допринос приликом превода радова на енглески језик.

Неизмерно хвала мојој супрузи Ивани и мојој деци, Луцији, Сергеју и Тадији, који су моја стална инспирација и велика подршка. Уз њихову помоћ, охрабрење, позитивну енергију и оптимизам добио сам додатну снагу и мотивацију да истрајем и довршим захтеван посао писања ове дисертације.

Захваљујем се и свим осталим члановима своје породице, пријатељима и колегама, који су својим саветима, подршком и разумевањем такође допринели реализацији овог рада.

Београд, мај 2019. Златко Лазовић

Наслов докторске дисертације: *Мере некомпактности на Хилбертовим C^*-модулима*

Резиме:

У првом поглављу излаже се теорија о униформним просторима и мерама некомпактности на метричким и униформним просторима. Затим, подсећамо се основних појмова и особина C^* и W^*-алгебри, као и Хилбертових модула над овим алгебрама при чему се наводе и неке познате топологије на Хилбертовом W^*-модулу.

У другом поглављу увешћемо локално конвексну топологију на стандардном Хилбертовом модулу $l^2(\mathcal{A})$, тако да сваки „компактан” оператор слика ограничен скуп (у норми) у тотално ограничен у уведеној топологији. За почетак алгебра $\mathcal{A}$ биће јединична W^*-алгебра а касније и C^*-алгебра. У специјалном случају, када је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на Хилбертовом простору, показаћемо да је тачан и супротан смер.

На почетку трећег поглавља дефинишемо меру некомпактности λ на стандардном Хилбертовом C^*-модулу $l^2(\mathcal{A})$ над јединичном C^*-алгебром, тако да важи $\lambda(E) = 0$ ако и само ако је E $\mathcal{A}$-преткомпактан (тј. за било које $\varepsilon > 0$ скуп E је ε-близу неком коначном генерисаном пројективном подмодулу). Доказујемо основне особине овакве мере некомпактности. Затим, посматрамо познате мере некомпактности Куратовског, Хауздорфа и Истрцескуа, на $l^2(\mathcal{A})$ посматраном као локално конвексан простор у односу на одговарајућу топологију. Такође, доказујемо неке њихове особине и релације између њих и уведене мере некомпактности λ.

У четвртом поглављу генералисаћемо појам Фредхолмовог оператора на произвољној C^*-алгебри. Наиме, аксиоматски дефинишемо елементе „коначног типа”, а затим дефинишемо елементе „Фредхолмовог типа” као елементе C^*-алгебре за које постоје елементи „коначног типа” p и q, такви да је $(1-q)a(1-p)$ „инвертибилан”. Добијамо Теорему о индексу за такве операторе. У потпоглављу Последице показаћемо да су класични Фредхолмови оператори на Хилберовом простору, Фредхолмови оператори у смислу Бројера, Атије и Сингера на бесконачној фон Нојмановој алгебри и Фредхолмови оператори на Хилбертовим C^*-модулима

над јединичној C^*-алгебри у смислу Мишченка и Фоменка специјални случајеви наше теорије.
Кључне речи: Униформни простори, мере некомпактности, Фредхолмови оператори, C^* и W^*-алгебре, Хилбертови модули, компактни оператори

Научна област: Математика

Ужа научна област: Математичка анализа

Doctoral Dissertation Title: *Measures of noncompactness on Hilbert C^*-modules*

Abstract:

In the first section we present the theory on uniform spaces and measures of noncompactness in metric and uniform spaces. Next, we recall the basic concepts and properties of C^* and W^*-algebras and Hilbert modules over these algebras with some known topologies on Hilbert W^*-module.

In the second section we construct a local convex topology on the standard Hilbert module $l^2(\mathcal{A})$, such that any compact" operator (i.e., any operator in the norm closure of the linear span of the operators of the form maps bounded sets into totally bounded sets. In the biginning $\mathcal{A}$ presents unital W^*-algebra, leter on $\mathcal{A}$ presents unital C^*-algebra. The converse is true in the special case where $\mathcal{A} = B(H)$ is the full algebra of all bounded linear operators on a Hilbert space H.

In the third section we define a measure of noncompactness λ on the standard Hilbert C^*-module $l^2(\mathcal{A})$ over a unital C^*-algebra, such that $\lambda(E) = 0$ if and only if E is $\mathcal{A}$-precompact (i.e. it is ε-close to a finitely generated projective submodule for any $\varepsilon > 0$) and derive its properties. Further, we consider the known, Kuratowski, Hausdorff and Istratescu measure of noncompactnes on $l^2(\mathcal{A})$ regarded as a locally convex space with respect to a suitable topology. We obtain their properties as well as some relationships between them and above introduced measure of noncompactness.

In the forth section we generalize the notion of a Fredholm operator to an arbitrary C^*-algebra. Namely, we define finite type elements in an axiomatic way, and also we define a Fredholm type element a as such an element of a given C^*-algebra for which there are finite type elements p and q such that $(1 - q)a(1 - p)$ is invertible. We derive an index theorem for such operators. In subsection Corollaries we show that many well-known operators are special cases of our theory. Those include: classical Fredholm operators on a Hilbert space, Fredholm operators in the sense of Breuer, Atiyah and Singer on a properly infinite von Neumann algebra, and Fredholm operators on Hilbert C^*-modules over a unital C^*-algebra in the sense of Mishchenko and Fomenko.

Keywords: Uniform spaces, measures of noncompactness, Fredholm operators, C^* and W^*-algebra, Hilbert modules, compact operators

Scientific Area: Mathematics

Scientific Sub-area: Mathematical analysis

Садржај

Глава 1

Увод

1.1 Мере некомпактности на метричким просторима

Појам мере некомпактности је настао као потреба да се „израчуна” у којој мери неки скупови нису компактни, односно, у којој мери неки оператори нису компактни. Меру некомпактности први је увео Куратовски[1] [36] 1930. године, а касније 1955. године истраживање је наставио Дарбо[2] [19]. Друге мере некомпактности увели су Голденстејн, Гоберг[3] и Маркус [25] 1957. године, Истрцеску[4] [27] 1972. године и многи други.

Навешћемо основне појмове и познате резултате у овој области, а који ће нам користити у следећим поглављима овог рада. За више информација о мерама некомпактности погледати радове [36], [19], [25], [27], [51], [42], [7], [1], [10] и [57].

Нека су S и M подскупови метричког простора (X, d) и $\varepsilon > 0$. Скуп S се назива *ε-мрежа* скупа M ако за свако $x \in M$ постоји $s \in S$такво да важи $d(x, s) < \varepsilon$. Ако је скуп S коначан, онда се ε-мрежа S скупа M назива *коначна ε-мрежа.* Скуп M је тотално ограничен ако има коначну ε-мрежу за свако $\varepsilon > 0$. Подскуп M у метричком простору X

[1]Kazimierz Kuratowski (1896–1980) пољски математичар
[2]Gabriele Darbo (1921–2003) италијански математичар
[3]Israel Gohberg 1928–2009) израелски математичар
[4]Vasile Istrăţescu-румунски математичар

је *компактан* ако сваки низ (x_n) у M има конвергентан подниз чија гранична вредност припада M. Скуп M је *релативно компактан* ако је затворење $\overline{M}$ компактан скуп. Ако је скуп M релативно компактан, онда је M тотално ограничен. Ако је метрички простор (X, d) комплетан, онда је скуп M релативно компактан ако и само ако је тотално ограничен.

Ако је $x \in X$ и $r > 0$, онда ћемо отворену лопту са центром у x и полупречником r означити са $B(x, r)$. Ако је X нормиран простор, онда ћемо са B_X означити затворену јединичну лопту у X, са S_X јединичну сферу у X, са $\mathcal{M}_X$ (или само $\mathcal{M}$) скуп непразних и ограничених подскупова метричког простора (X, d), са $\mathcal{M}_X^C$ (или само $\mathcal{M}^C$) скуп непразних, ограничених и затворених подскупова, са $\mathcal{N}_X$ (или само $\mathcal{N}$) скуп свих непразних и релативно компактних подскупова и са $\mathcal{N}_X^C$ скуп непразних и компактних подскупова скупа X. Нека је $d_H \colon \mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_X \to \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$d_H(S, Q) = \max\{\sup_{x \in S} d(x, Q), \sup_{y \in Q} d(y, S)\} \quad \text{за свако } S, Q \in \mathcal{M}_X.$$

Функција d_H се назива *Хауздорфово*[5] *растојање.* Она је псеудометрика на $\mathcal{M}_X$ и метрика на $\mathcal{M}_X^C$.

Нека је X векторски простор над пољем $\mathcal{K}$. Подскуп $E \subset X$ је *конвексан* ако $\lambda x + (1 - \lambda) y \in E$ за свако $x, y \in E$ и за свако $\lambda \in (0, 1)$. Пресек свих конвексних скупова који садрже скуп $F \subset X$ назива се *конвексни омотач* скупа F и означава се са $\operatorname{co} F$. *Конвексна комбинација* елемената скупа F је елемент облика

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \quad \text{за } x_i \in F, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Конвексни омотач скупа F је скуп свих конвексних комбинација елемената скупа F.

Дефиниција 1.1. Нека је (X, d) метрички простор и Q ограничен подскуп скупа X. Тада *мера некомпактности Куратовског* скупа Q, у

[5] Felix Hausdorff (1868–1942) немачки математичар

означи $\alpha(Q)$, јесте инфимум скупа свих бројева $\varepsilon > 0$ таквих да се Q може покрити коначним бројем скупова дијаметара мањих од ε.

Очигледно је $\alpha(Q) \leqslant \operatorname{diam}(Q)$ за сваки подскуп Q скупа X.

Теорема 1.1. *Нека су Q, Q_1 и Q_2 ограничени подскупови комплетног метричког простора (X, d). Тада важи следеће:*

(а) $\alpha(Q) = 0$ *ако и само ако је Q релативно компактан;*

(б) $\alpha(Q) = \alpha(\overline{Q})$*;*

(в) *из $Q_1 \subset Q_2$ следи $\alpha(Q_1) \leqslant \alpha(Q_2)$;*

(г) $\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$*;*

(д) $\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leqslant \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$*.*

Додатно, ако је X нормиран, онда је задовољено следеће:

(ђ) $\alpha(Q_1 + Q_2) \leqslant \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$*;*

(е) $\alpha(Q + x) = \alpha(Q)$*, за свако $x \in X$;*

(ж) $\alpha(\lambda Q) = |\lambda|\alpha(Q)$*, за свако $\lambda \in \mathcal{K}$;*

(з) $\alpha(Q) = \alpha(\operatorname{co} Q)$*;*

(и) *ако је X бесконачно димензионалан простор, онда је $\alpha(B_X) = 2$.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [42, Лема 2.6, Теорема 2.8, Теорема 2.9]. ■

Теорема 1.2. *Нека је (X, d) комплетан метрички простор. Ако је F_n опадајући низ непразних, затворених и ограничених подскупова скупа X таквих да је $\lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0$, онда је пресек $F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ непразан и компактан подскуп скупа X.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [42, Теорема 2.7]. ■

Дефиниција 1.2. Нека je (X, d) метрички простор и Q ограничен подскуп скупа X. Тада *Хауздорфова мера некомпактности* скупа Q, у ознаци $\chi(Q)$, jесте инфимум скупа свих броjева $\varepsilon > 0$ таквих да се Q може покрити коначним броjем лопти полупречника мањих од ε, односно

$$\chi(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid Q \text{ има коначну } \varepsilon\text{-мрежу у } X\}.$$

Теорема 1.3. *Нека су Q, Q_1 и Q_2 ограничени подскупови метричког простора (X, d). Тада су тачна следећа тврђења:*

(а) $\chi(Q) = 0$ *ако и само ако je $\overline{Q}$ тотално ограничен;*

(б) $\chi(Q) = \chi(\overline{Q})$;

(в) *из $Q_1 \subset Q_2$ следи $\chi(Q_1) \leqslant \chi(Q_2)$;*

(г) $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$;

(д) $\chi(Q_1 \cap Q_2) \leqslant \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$.

Додатно, ако je X нормиран, онда важи следеће:

(ђ) $\chi(Q_1 + Q_2) \leqslant \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$;

(е) $\chi(Q + x) = \chi(Q)$, *за свако* $x \in X$;

(ж) $\chi(\lambda Q) = |\lambda|\chi(Q)$, *за свако* $\lambda \in \mathcal{K}$;

(з) $\chi(Q) = \chi(\operatorname{co} Q)$;

(и) $\chi(B_X) = 1$, *где je X бесконачно димензионалан простор.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у књизи [11, Лема 5.9, Теорема 5.10, Теорема 5.14]. ■

Теорема 1.4. *Нека je (X, d) метрички простор и Q ограничен подскуп скупа X. Тада je*

$$\chi(Q) \leqslant \alpha(Q) \leqslant 2\chi(Q).$$

Доказ: Доказ теореме се може наћи у књизи [11, Теорема 5.13]. ■

Теорема 1.5. *Нека је (X, d) метрички простор и $Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_X$. Тада је*

$$|\chi(Q_1) - \chi(Q_2)| \leqslant d_H(Q_1, Q_2),$$

$$\chi(Q) = d_H(Q, \mathcal{N}_X^C).$$

Доказ: Доказ теореме се може наћи у књизи [11, Теорема 5.11]. ■

Дефиниција 1.3. Нека је (X, d) метрички простор и Q ограничен подскуп скупа X. Тада *унутрашња Хауздорфова мера некомпактности* скупа Q, у ознаци $\chi_i(Q)$, јесте инфимум скупа свих бројева $\varepsilon > 0$ таквих да се Q може покрити коначним бројем лопти са центрима у Q и полупречницима мањих од ε, односно

$$\chi_i(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid Q \text{ има коначну } \varepsilon\text{-мрежу која је подскуп скупа } Q\}.$$

Нека су Q, Q_1 и Q_2 ограничени подскупови метричког простора (X, d). Тада се може доказати следеће:

(а) $\chi_i(Q) = 0$ ако и само ако је Q тотално ограничен;

(б) $\chi_i(Q) = \chi_i(\overline{Q})$.

Додатно, ако је X нормиран, следећа тврђења се могу доказати:

(в) $\chi_i(Q_1 + Q_2) \leqslant \chi_i(Q_1) + \chi_i(Q_2)$;

(г) $\chi_i(Q + x) = \chi_i(Q)$, за свако $x \in X$;

(д) $\chi_i(\lambda Q) = |\lambda|\chi_i(Q)$, за свако $\lambda \in \mathcal{K}$.

Ограничен подскуп Q комплетног метричког простора (X, d) је *ε-дискретан* ако је $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ за свако $x, y \in Q$ за које је $x \neq y$. Рећи ћемо да је ограничен подскуп Q *тотално дискретан* ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је Q ε-дискретан.

Дефиниција 1.4. Нека је (X, d) комплетан метрички простор и Q ограничен подскуп скупа X. Тада *мера некомпактности Истрцескуа* скупа Q, у ознаци $I(Q)$, јесте инфимум скупа свих бројева $\varepsilon > 0$ таквих да Q нема бесконачан ε-дискретан подскуп.

Теорема 1.6. *Нека је (X, d) метрички простор и Q ограничен подскуп скупа X. Тада је*

$$\chi(Q) \leqslant \chi_i(Q) \leqslant I(Q) \leqslant \alpha(Q) \leqslant 2\chi(Q).$$

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [42, Теорема 2.22]. ■

Тврђење 1.1. *Нека су Q, Q_1 и Q_2 ограничени подскупови метричког линеарног простора X и $x \in X$. Тада је*

(а) $I(Q_1 + Q_2) \leqslant I(Q_1) + I(Q_2)$;

(б) $I(x + Q) = I(Q)$.

Доказ: Доказ се може наћи у раду [4, Тврђење 1]. ■

Значи, мера некомпактности се може посматрати као нумеричка вредност која показује у којој мери неки скуп није компактан.

Дефиниција 1.5. *Шаудерова*[6] *база* линеарног метричког простора X је низ вектора (b_n) таквих да за свако $x \in X$ постоји јединствен низ скалара (λ_n) такав да је $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n = x$.

Код коначно димензионалних простора Шаудерова база и алгебарска база се поклапају. Сваки линеаран простор има алгебарску базу. Међутим, постоје линеарни метрички простори који немају Шаудерову базу. На пример, Банахов[7] простор $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ нема Шаудерову базу.

Нека је X Банахов простор са Шаудеровом базом $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Тада сваки елемент $x \in X$ има јединствену репрезентацију $x = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) e_i$, где су ϕ_i базни функционали. Нека је $P_n \colon X \to X$ пројектор на линеаран омотач скупа $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, то јест, $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) e_i$. Може се доказати да су $P_n, n \in \mathbb{N}$, ограничени, па на основу Банах–Штајнхаусове[8] теореме, сви оператори P_n и $I - P_n$ су равномерно ограничени. Одатле, на основу јединствености репрезентације у Шаудеровој бази, следи да су и базни функционали ϕ_i ограничени.

[6] Juliusz Pawel Schauder (1899–1943) пољски математичар
[7] Stefan Banach (1892–1945) пољски математичар
[8] Wladyslaw Hugo Dionizy Steinhaus (1887–1972) пољски математичар

Теорема 1.7. *Нека је X Банахов простор који има Шаудерову базу $\{e_1, e_2, \dots\}$. Нека је Q ограничен подскуп скупа X и $P_n\colon X \to X$ пројектор на линеарни омотач скупа $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Тада је*

$$\frac{1}{a}\ \overline{\lim}\,(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|) \leqslant \chi(Q) \leqslant \inf_n \sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|,$$

где је $a = \overline{\lim}\,\|I-P_n\|$.

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [42, Теорема 2.23]. ■

Последица 1.1. *Нека је Q ограничен подскуп нормираног простора X, где је X или l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ или c_0. Ако је $P_n\colon X \to X$ оператор дефинисан са $P_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ за $(x_1, x_2, \dots) \in X$, онда је*

$$\chi(Q) = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)x\|.$$

Дефиниција 1.6. Нека су k_1 и k_2 мере некомпактности на Банаховим просторима X и Y, редом. Оператор $L\colon X \to Y$ је (k_1, k_2)-*ограничен* ако

$$L(Q) \in \mathcal{M}_Y \quad \text{за сваки } Q \in \mathcal{M}_X$$

и постоји ненегативан број k такав да важи

$$k_2(L(Q)) \leqslant k k_1(Q) \quad \text{за сваки } Q \in \mathcal{M}_X.$$

Ако је оператор L (k_1, k_2)-ограничен, онда се број

$$\|K\|_{k_1,k_2} = \inf\{k \geqslant 0 \mid k_2(L(Q)) \leqslant k k_1(Q) \text{ за свако } Q \in \mathcal{M}_X\}$$

назива (k_1, k_2)-*норма* оператора L или (k_1, k_2)-мера некомпактности оператора L. Ако је $k_1 = k_2$, онда ћемо норму означити са $\|L\|_k$.

Теорема 1.8. *Нека су X и Y Банахови простори и нека је $L \in B(X, Y)$. Тада је*

$$\|L\|_\chi = \chi(L(S_X)) = \chi(L(B_X)).$$

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [42, Теорема 2.25]. ■

1.2 Мере некомпактности на униформним просторима

Униформан простор је једно од уопштења метричког простора. То је тополошки простор чија својства омогућавају да се дефинишу појмови као што су Кошијев[9] низ, Кошијева мрежа и униформна непрекидност. Теорију униформних простора развили су Вејл[10], Бурбаки[11], Туки[12] и други. Поновићемо неке основне дефиниције и особине које се односе на униформне просторе, а за више детаља видети [13], [35], [21] и [26]. Постоји неколико еквивалентних дефиниција униформних простора (преко окружења, преко псеудометрика, преко униформног покривача). Иако је уобичајено да се униформан простор X дефинише помоћу фамилије скупова у $X \times X$, датих као нека врста дијагонала названих *окружења*, за нашу сврху згодније је дати еквивалентну дефиницију преко фамилије псеудометрика.

Дефиниција 1.7. Функција $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ која задовољава особине (а) $d(x,x) = 0$; (б) $d(x,y) = d(y,x)$ и (в) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, за свако $x, y, z \in X$, зове се *псеудометрика.*

За разлику од метрике, псеудометрика не мора раздвајати тачке, односно, може бити $d(x,y) = 0$ за $x \neq y$.

Дефиниција 1.8. Непразан скуп снабдевен фамилијом псеудометрика d_α таквих за свако $x \neq y$ постоји α такав да важи $d_\alpha(x,y) > 0$, назива се *униформан простор.*

Фамилија скупова $B_{d_\alpha}(x;\varepsilon) = \{y \in X \mid d_\alpha(x,y) < \varepsilon\}$ чини базу за неку топологију. Познато је да је сваки униформан простор потпуно регуларан (T_1 и T_3 тополошки простор), као и да се на сваком потпуно регуларном простору може увести униформна структура.

[9]Baron Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) француски математичар

[10]Andre Weil (1906–1998) француски математичар

[11]Nicolas Bourbaki - група француских математичара који су објављивали под овим псеудонимом

[12]John Wilder Tukey (1915–2000) амерички математичар

Нека је X униформан простор. За мрежу $x_i \in X$ кажемо да је *Кошијева мрежа* ако је Кошијева мрежа у односу на све d_α, то јест, за свако α и за свако $\varepsilon > 0$ постоји i_0 тако за свако $i, j > i_0$ важи $d_\alpha(x_i, x_j) < \varepsilon$. Појам комплетан униформан простор је дефинисан на уобичајен начин.

Скуп $E \subseteq X$ се назива *тотално ограничен* скуп, ако за свако $\varepsilon > 0$ и за свако α постоји коначан број елемената $c_1, c_2, \ldots, c_m \in X$ таквих да је $B_\alpha(c_j; \varepsilon) = \{y \in X \mid d_\alpha(c_j, y) < \varepsilon\}$ покривач скупа E. Познато је да је сваки релативно компактан скуп тотално ограничен, а обратно је тачно ако је X комплетан. Ако X није комплетан, онда постоји тотално ограничен скуп који није релативно компактан, на пример, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ као подскуп скупа $\mathbb{Q}$.

Сваки локално конвексан тополошки простор је униформан. Заиста, постоји фамилија полунорми која генерише његову топологију. Ова фамилија се може добити помоћу функционала Минковског[13] придружених погодно одабраним базним околинама нуле. Произвољна полунорма дефинише псеудометрику на уобичајен начин. Обратно, свака фамилија полунорми која раздваја тачке доводи до локално конвексног Хауздорфовог тополошког векторског простора. Стога, фамилија полунорми омогућава да се ради са појмовима: тотално ограничен, комплетан простор, Кошијева мрежа и тако даље.

За разлику од метричког простора, униформан простор има фамилију псеудометрика, па и мера некомпактности мора бити општије формулисана. Наиме, то ће бити пресликавање чија вредност неће бити ненегативан број већ ненегативна функција, која ће имати као аргумент псеудометрику. Читаоцу се препоручују следећи радови [61], [11], [27], [37], [3], [4] и [5].

Дефиниција 1.9. Нека је X униформан простор, P фамилија псеудометрика која генерише равномерну непрекидност на $X \times X$ и Υ скуп свих подскупова скупа X који су ограничени у односу на сваку псеудометрику $p \in P$. Нека је A скуп функција $a\colon P \to [0, +\infty)$ са топологијом која је одређена конвергенцијом тачка по тачка и нека је $\leqslant$ природно

[13]Hermann Minkowski (1864–1909) немачки математичар

парцијално уређење дато са $a_1 \leqslant a_2 \Leftrightarrow (\forall p \in P)\ a_1(p) \leqslant a_2(p)$. *Мера некомпактности* на X, генерисана помоћу фамилије псеудометрика P, јесте функција $\mu\colon \Upsilon \to A$ која задовољава следеће особине (погледати рад [37]):

(а) скуп E је тотално ограничен ако и само ако важи $\mu(E) = 0$;

(б) μ је инваријантна у односу затворење, односно,

$$(\forall E \in \Upsilon)\ \mu(E) = \mu(\overline{E});$$

(в) μ је монотона, односно, ако је $E_1 \subset E_2$, онда је $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$;

(г) ако је X комплетан и ако је $\{E_n\}$ низ затворених подскупова скупа X таквих да је $E_{n+1} \subset E_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$, онда је $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ непразан компактан скуп.

Теорема 1.9. *Функција $\alpha\colon \Upsilon \to A$ дефинисана формулом*

$$[\alpha(E)](p) = \inf\{d > 0 \mid \text{скуп } E \text{ се може поделити на коначно много подскупова чији дијаметри у односу на псеудометрику } p \text{ нису већи од } d\},$$

функција $\chi\colon \Upsilon \to A$ дефинисана формулом

$$[\chi(E)](p) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \text{скуп } E \text{ има коначну } \varepsilon\text{-мрежу у односу на } p \text{ у } X\}$$

и функција $I\colon \Upsilon \to A$ дефинисана формулом

$$[I(E)](p) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid E \text{ садржи бесконачан } \varepsilon\text{-дискретан скуп у односу на } p\}$$

јесу мере некомпактности Куратовског, Хауздорфа и Истрцескуа (редом) на E генерисане помоћу фамилије псеудометрика P.

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [61, Теорема 1.2.3]. Такође се може доказати на основу Теорема 1.1, 1.2 и 1.6. ■

Напомена 1.1. За разлику од мере некомпактности μ на метричким просторима, мера некомпактности μ на униформним просторима је пресликавање чији је аргумент скуп E, а слика је функција $\mu(E)$, која пресликава скуп псеудометрика у $[0, +\infty)$. Зато би меру некомпактности на униформним просторима требало означити са μ_P, (односно, Хауздорфову меру са χ_P, меру Куратовског са α_P, меру Истрцескуа са I_P) где је P скуп свих псеудометрика. Међутим, због краћег записа означићемо је само са μ (односно, α, χ, I).

Теорема 1.10. *Мере некомпактности Хауздорфа, Истрцескуа и Куратовског ($\mu \in \{\chi, I, \alpha\}$) имају следеће особине:*

(а) *μ је несингуларна, односно, једнака је нули за једночлан скуп;*

(б) *μ је непрекидна, односно, $(\forall E \in \Upsilon)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ постоји окружење V у X такво да за сваки скуп E_1 за који $(E, E_1) \in V$ и за свако $p \in P$ важи $|\mu(E_1)(p) - \mu(E)(p)| < \varepsilon$;*

(в) *за свако $E_1, E_2 \in \Upsilon$ и $p \in P$ имамо*

$$\mu(E_1 \cup E_2)(p) = \max\{\mu(E_1)(p), \mu(E_2)(p)\};$$

(г) *функција μ је субадитивна, односно,*

$$\mu(E_1 + E_2)(p) \leqslant \mu(E_1)(p) + \mu(E_2)(p) \quad \text{за свако } E_1, E_2 \in \Upsilon, p \in P;$$

(д) *μ је инваријантна у односу на транслацију, то јест,*

$$\mu(x + E)(p) = \mu(E)(p) \quad \text{за свако } E \in \Upsilon, x \in X, p \in P;$$

(ђ) *μ је инваријантна у односу на конвексни омотач скупа, односно,*

$$\mu(\mathrm{co}(E))(p) = \mu(E)(p) \quad \text{за свако } E \in \Upsilon, p \in P;$$

(е) *μ је равномерно непрекидна, односно, $(\forall \varepsilon > 0)$ постоји окружење*

V у X такво да за свако $(E_1, E_2) \in V$ и за свако $p \in P$ важи $|\mu(E_1)(p) - \mu(E_2)(p)| < \varepsilon$;

(ж) *важи*

$$\chi(E)(p) \leqslant I(E)(p) \leqslant \alpha(E)(p) \leqslant 2\chi(E)(p) \quad \text{за свако } E \in \Upsilon, p \in P.$$

Доказ: Доказ се може наћи у [3, Теорема 3], [4, Тврђење 1], [61, Теорема 1.2.3], [11, Страна 170], и [27]. ■

На основу претходне теореме (особина (ж)) можемо закључити да су за скуп E мере $\chi(E)$, $I(E)$, $\alpha(E)$ или све коначне или све бесконачне.

Дефиниција 1.10. [3, Дефиниција 1] Нека је X униформан простор. *Скаларна мера некомпактности* на X је функција $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ која задовољава следеће услове:

(а) $\Phi(E) = \infty$ ако и само ако је E неограничен;

(б) $\Phi(E) = \Phi(\overline{E})$;

(в) из $\Phi(E) = 0$ следи да је E тотално ограничен скуп;

(г) из $E \subset F$ следи $\Phi(E) \subset \Phi(F)$;

(д) ако је X комплетан простор и ако је $\{E_n\}$ низ затворених подскупова скупа X такав да је $\lim_{n\to\infty} \Phi(E_n) = 0$ и $E_{n+1} \subset E_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда је $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ непразан компактан скуп.

Теорема 1.11. *Нека је X униформан простор и нека је $\{d_i \mid i \in I\}$ фамилија псеудометрика која дефинише топологију на X. Означимо са μ_i произвољну меру некомпактности на псеудометричком простору (X, d_i) за свако $i \in I$. Тада функција $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ дефинисана са*

$$\mu^*(E) = \sup_{i\in I} \mu_i(E),$$

за свако $E \subset X$, јесте скаларна мера некомпактности на X.

Доказ: Доказ ове теореме може се наћи у раду [3, Теорема 3]. ■

1.3 Хилбертов C^*-модул и Хилбертов W^*-модул

1.3.1 C^*-алгебра и W^*-алгебра

C^*-алгебра је структура која се појавила 1933. године за потребе квантне механике. Прву апстрактну карактеризацију C^*-алгебре (некада се користио термин B^*-алгебра) дали су Гељфанд[14] и Најмарк[15] 1943. године. Пре њих је још фон Нојман[16] проучавао неке специјалне случајеве C^*-алгебри, које данас зовемо фон Нојмановим алгебрама. C^*-алгебре имају важну улогу у теорији унитарних репрезентација локално компактних група. За основне особине C^*-алгебри читаоцу се препоручују књиге [56], [65] и [28]. Навешћемо неке резултате о C^*-алгебрама који ће бити неопходни за даље излагање.

Дефиниција 1.11. Нека је $\mathcal{A}$ Банахов простор над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$. Ако је $\mathcal{A}$ алгебра над $\mathbb{C}$ у којој је задовољена неједнакост

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{за свако } x, y \in \mathcal{A},$$

онда се $\mathcal{A}$ назива *Банахова алгебра.*

Неједнакост

$$\|x_1y_1 - x_2y_2\| \leqslant \|x_1\| \cdot \|y_1 - y_2\| + \|x_1 - x_2\| \cdot \|y_2\|$$

нам даје да је производ непрекидна функција две променљиве.

Дефиниција 1.12. Ако је Банахова алгебра $\mathcal{A}$ снабдевена пресликавањем $x \mapsto x^* \in \mathcal{A}$ са следећим особинама:

(а) $(x^*)^* = x$;

(б) $(x + y)^* = x^* + y^*$;

---

[14]Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009) совјетски математичар
[15]Марк Аронович Наймарк (1909–1978) совјетски математичар
[16]Margittai Neumann Janos Lajos (1903–1957) мађарски математичар

(в) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$;

(г) $(xy)^* = y^* x^*$;

(д) $\|x^*\| = \|x\|$,

за свако $x, y \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, онда се $\mathcal{A}$ назива *инволутивна* Банахова алгебра. Пресликавање * ћемо звати *инволуција.*

Ако инволуција у $\mathcal{A}$ задовољава додатну особину (C^*-*услов*)

ђ) $\|x^* x\| = \|x\|^2$ за свако $x \in \mathcal{A}$,

онда се $\mathcal{A}$ назива C^*-*алгебра.*

Затворена *-подалгебра C^*-алгебре је C^*-алгебра посматрана за себе.

За S, подскуп скупа $\mathcal{A}$, кажемо да је *самоадјунгован* ако важи $S = S^*$, где је $S^* = \{a^* \mid a \in S\}$. *Самоадјунгована подалгебра* алгебре $\mathcal{A}$ је *-подалгебра алгебре $\mathcal{A}$, коју ћемо даље скраћено звати подалгебра алгебре $\mathcal{A}$.

Ако је I самоадјунговани идеал алгебре $\mathcal{A}$, онда је *количничка* алгебра $\mathcal{A}/I$ *-алгебра са инволуцијом датом са $(a+I)^* = a^* + I$ за свако $a \in \mathcal{A}$.

Ако Банахова алгебра садржи јединични елемент e (за свако $x \in \mathcal{A}$ важи $ex = xe = x$), онда кажемо да је *јединична.* Банахове и C^*-алгебре не морају имати јединични елемент. Нека је $\mathcal{A}$ произвољна Банахова алгебра (не мора бити јединична). Тада векторски простор $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$, са производом који је дат помоћу формуле $(a, z)(b, w) = (ab + zb + aw, zw)$, инволуцијом $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ и нормом $\|(a, \lambda)\|_{\mathcal{A}^+} = \|a\| + |\lambda|$, јесте Банахова алгебра са јединицом $(0, 1)$. Овај процес се назива *унитализација.* Ако исти процес применимо на C^*-алгебру, онда у општем случају нећемо добити јединичну C^*-алгебру, јер не мора бити задовољен C^*-услов за норму $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^+}$. Међутим, постоји норма на $\mathcal{A}^+$ која ће задовољавати C^*-услов.

Унитализација је процес који има највише смисла применити на C^*-алгебре које немају јединицу. Ако C^*-алгебра нема јединицу, онда ћемо за норму узети $\|(x, \lambda)\|_2 = \|L_x + \lambda I\|_o$, где је $L_x \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $L_x(y) = xy$, I

идентичко пресликавање и $\|\cdot\|_o$ операторска норма. Тиме ћемо добити C^*-алгебру $(\mathcal{A}^+, \|\cdot\|_2)$. Ако је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра, онда ћемо за норму на $\mathcal{A}^+$ узети $\|(x,\lambda)\|_3 = \|x+\lambda e\| + |\lambda|$, где је e јединични елемент, односно за унитализацију узимамо алгебру $(\mathcal{A}^+, \|\cdot\|_3)$.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је *самоадјунгован* ако је $a = a^*$. За свако $a \in \mathcal{A}$ постоје јединствени самоадјунговани елементи $b, c \in \mathcal{A}$ такви да важи $a = b + ic$ ($b = (a+a^*)/2$, $c = (a-a^*)/(2i)$). Елементи a^*a и aa^* су самоадјунговани.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је *нормалан* ако је $a^*a = aa^*$. Елемент $p \in \mathcal{A}$ је *пројектор* ако је $p = p^2$, а *ортогоналан пројектор* ако је $p = p^* = p^2$.

Ако је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра, онда је $1^* = 1$. Ако је елемент $a \in \mathcal{A}$ инвертибилан, онда је $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. *Спектар* елемента $a \in \mathcal{A}$ је скуп

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda e \text{ није инвертибилан у } \mathcal{A}\}.$$

Одавде важи $\sigma_{\mathcal{A}}(a^*) = \overline{\sigma_{\mathcal{A}}(a)}$, за свако $a \in \mathcal{A}$. Ако $\mathcal{A}$ није јединична C^*-алгебра, онда се спектар елемента a дефинише као спектар тог елемента у $\mathcal{A}^+$. Спектар је непразан компактан скуп у $\mathbb{C}$.

Теорема 1.12. *Нека $\mathcal{B}$ је C^*-подалгебра јединичне C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и нека садржи јединични елемент алгебре $\mathcal{A}$. Тада је $\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b)$ за свако $b \in \mathcal{B}$.*

Доказ: *Доказ се може наћи у књизи [49, Теорема 2.1.11].* ■

Елемент $a \in \mathcal{A}$ се назива *позитиван* елемент (пишемо $a \geqslant 0$) ако је самоадјунгован и задовољава неки од следећих еквивалентних услова:

(а) $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$;

(б) $a = b^*b$ за неко $b \in \mathcal{A}$;

(в) $a = h^2$ за неки самоадјунговани елемент $h \in \mathcal{A}$.

Самоадјунговани елемент h дефинисан у (в), називамо квадратни корен елемента a и записујемо га као $h = a^{\frac{1}{2}}$.

Елемент $u \in \mathcal{A}$ је *унитаран* ако је $u^*u = uu^* = e$. Ако је $u^*u = e$, онда u називамо *изометрија*, а ако је $uu^* = e$, онда u називамо *коизометрија*.

Пресликавање $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, где су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ неке C^*-алгебре, назива се *-*хомоморфизам* ако задовољава особине $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ и $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ за свако $a, b \in \mathcal{A}$. Додатно, ако је још и бијекција, онда је *-*изоморфизам.*

Линеаран функционал $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ се назива *позитиван* ако је $\varphi(a) \geqslant 0$ за сваки позитиван елемент $a \in \mathcal{A}$. Позитивни линеарни функционали се називају *стања* ако је $\|\varphi\| = 1$. За позитиван елемент $a \in \mathcal{A}$ важи $\|a\| = \sup \varphi(a)$, где је супремум узет по свим стањима.

Навешћемо неколико примера C^*-алгебри.

Пример 1. Поље скалара $\mathbb{C}$ је јединична C^*-алгебра са инволуцијом $z \mapsto \overline{z}$.

Пример 2. Нека је $l^\infty(S)$ скуп свих ограничених комплексних функција на неком скупу S. Тада је $l^\infty(S)$ јединична C^*-алгебра са инволуцијом $f \mapsto \overline{f}$, операцијама $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ и супремум нормом $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$.

Пример 3. Нека је (Ω, μ) мерљив простор и нека је $L^\infty(\Omega, \mu)$ скуп свих есенцијално ограничених комплексних мерљивих функција на Ω. Тада је $L^\infty(\Omega, \mu)$ јединична C^*-алгебра са инволуцијом $f \mapsto \overline{f}$.

Пример 4. Нека је Ω тополошки простор и $C_b(\Omega)$ скуп свих ограничених, непрекидних комплексних функција на Ω. Тада је $C_b(\Omega)$ јединична C^*-подалгебра алгебре $l^\infty(S)$. Ако је Ω компактан, онда је $C(\Omega)$ скуп свих непрекидних функција из Ω на $\mathbb{C}$, једнак скупу $C_b(\Omega)$.

Пример 5. Ако је Ω локално компактан Хауздорфов простор, онда је $C_0(\Omega)$ једна C^*-алгебра са инволуцијом $f \mapsto \overline{f}$.

Пример 6. Нека је Ω мерљив простор и нека је $B_\infty(\Omega)$ скуп свих ограничених комплексних мерљивих функција на Ω. Тада је $B_\infty(\Omega)$ јединична C^*-подалгебра алгебре $l^\infty(\Omega)$.

Пример 7. Нека је H Хилбертов[17] простор и нека је $B(H)$ скуп свих ограничених линеарних оператора на скупу H. Тада је $B(H)$ јединична C^*-алгебра са инволуцијом $A \mapsto A^*$.

[17]David Hilbert (1862–1943) немачки математичар

Пример 8. Нека је $(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија C^*-алгебри. Њихова директна сума $\bigoplus_\lambda \mathcal{A}_\lambda = \{a \in \prod_\lambda \mathcal{A}_\lambda \mid \sup_\lambda \|a_\lambda\| < +\infty\}$ је такође C^*-алгебра са инволуцијом $(\oplus_\lambda a_\lambda)^* = \oplus_\lambda a_\lambda^*$ и нормом $\|a\| = \sup_\lambda \|a_\lambda\|$.

Пример 9. Нека је Ω локално компактан Хауздорфов простор, $\mathcal{A}$ нека C^*-алгебра и $l^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ C^*-алгебра са инволуцијом $f \mapsto f^*$, где је $f^*(\omega) = f(\omega)^*$. Рећи ћемо да се непрекидна функција $f\colon \Omega \to \mathcal{A}$ анулира у бесконачности ако је скуп $\{\omega \in \Omega \mid \|f(\omega)\| \geqslant \varepsilon\}$ компактан за свако $\varepsilon > 0$. Означимо са $C_0(\Omega, \mathcal{A})$ скуп свих таквих функција. Одавде, $C_0(\Omega, \mathcal{A})$ је C^*-подалгебра алгебре $l^\infty(\Omega, \mathcal{A})$.

C^*-хомоморфизам из алгебре $\mathcal{A}$ у $B(H)$ назива се *репрезентација* алгебре $\mathcal{A}$. Вектор $\xi \in H$ назива се *цикличан* за репрезентацију $\varphi\colon \mathcal{A} \to B(H)$ ако је скуп свих вектора облика $\varphi(a)\xi, a \in \mathcal{A}$ густ у H. Вектор $\xi \in H$ се назива *раздвајајући* за неку репрезентацију $\varphi\colon \mathcal{A} \to B(H)$ ако из једнакости $\varphi(a)\xi = 0$ следи $a = 0$. Репрезентација је *верна* ако је инјективна. Ако је $\varphi_\lambda\colon \mathcal{A} \to B(H_\lambda), \lambda \in \Lambda$ фамилија репрезентација C^*-алгебре $\mathcal{A}$, онда је директна сума $\varphi\colon \mathcal{A} \to B(\oplus_\lambda H_\lambda), \varphi(a)((x_\lambda)_\lambda) = (\varphi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda$ за свако $a \in \mathcal{A}$ и за свако $(x_\lambda)_\lambda \in H$, репрезентација C^*-алгебре $\mathcal{A}$.

Нека је τ позитиван линеаран функционал C^*-алгебре $\mathcal{A}$. Тада је $N_\tau = \{a \in \mathcal{A} \mid \tau(a^*a) = 0\}$ затворени леви идеал алгебре $\mathcal{A}$. Означимо H_τ комплетирање количничког простора $\mathcal{A}/N_\tau$ у коме је дат скаларни производ $\langle a + N_\tau, b + N_\tau\rangle = \tau(b^*a)$. Пресликавање $\varphi_\tau\colon \mathcal{A} \to B(H_\tau)$, где је $\varphi_\tau(a)$ јединствено ограничено продужење оператора $\varphi(a)\colon \mathcal{A}/N_\tau \to \mathcal{A}/N_\tau, \varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau$ са $\mathcal{A}/N_\tau$ на H_τ, јесте репрезентација C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и зваћемо је Гељфанд-Најмарк-Сегалова[18] репрезентација (или скраћено ГНС) у односу на τ. *Универзална* репрезентација је директна сума репрезентација φ_τ, где τ пролази скуп стања $S(\mathcal{A})$. Универзална репрезентација је верна. Свака C^*-алгебра има универзалну репрезентацију.

Апроксимативна јединица C^*-алгебре $\mathcal{A}$ је растућа мрежа $e_\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \in \Lambda$, ($\Lambda$ је усмерен скуп) таква да је $\|e_\alpha\| \leqslant 1$ и $\lim\limits_\alpha \|a - ae_\alpha\| = 0$ за свако

[18]Irving Ezra Segal (1918–1998) амерички математичар

$a \in \mathcal{A}$. Свака C^*-алгебра има апроксимативну јединицу e_α такву да је $e_\alpha \geqslant 0$ и $e_\alpha \geqslant e_\beta$ за $\alpha \geqslant \beta$. C^*-алгебре које поседују пребројиву апроксимативну јединицу називају се *σ-јединичне* C^*-алгебре. Елемент $h \in \mathcal{A}$ је *строго позитиван* ако за сваки позитиван ненула линеаран функционал (или, еквивалентно, за свако стање) важи $\varphi(h) > 0$. Егзистенција строго позитивног елемента је еквивалентна егзистенцији пребројиве апроксимативне јединице.

Навешћемо неке основне појмове везане за теорију W^*-алгебри. За више детаља читаоцу се препоручује литература [65], [14], [20], [62], [28] и [50].

За почетак, на добро познатој W^*-алгебри $B(H)$ (простор ограничених линеарних оператора на Хилбертовом простору) дефинисаћемо неколико локално конвексних топологија помоћу полунорми на $B(H)$. Нека је $a \in B(H)$.

1. *σ-слаба топологија* је дефинисана помоћу полунорми

$$p(a) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle a\xi_i, \eta_i \rangle \right|,$$

за произвољне низове $(\xi_i), (\eta_i)$ у H за које важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|^2 < \infty.$$

2. *σ-јака топологија* је дефинисана помоћу полунорми

$$p(a) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a\xi_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

за произвољан низ (ξ_i) у H за који важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty.$$

3. *σ-јака* топологија* је дефинисана помоћу полунорми

$$p(a) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\|a\xi_i\|^2 + \|a^*\xi_i\|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

   за произвољан низ (ξ_i) у H за који важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty.$$

4. *Слаба топологија* је дефинисана помоћу полунорми $p(a) = |\langle a\xi, \eta\rangle|$ за произвољне векторе $\xi, \eta \in H$.

5. *Јака топологија* је дефинисана помоћу полунорми $p(a) = \|a\xi\|$ за произвољан вектор $\xi \in H$.

6. *Јака* топологија* је дефинисана помоћу полунорми

$$p(a) = \left(\|a\xi\|^2 + \|a^*\xi\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   за произвољан вектор $\xi \in H$.

На ограниченом скупу у $B(H)$, σ-слаба топологија се поклапа са слабом топологијом, σ-јака топологија се поклапа са јаком топологијом и σ-јака* топологија се поклапа са јаком* топологијом.

Комутант подскупа $R \subset B(H)$ је скуп $R^! = \{a \in B(H) \mid ar = ra$ за свако $r \in R\}$. *Бикомутант* скупа R је скуп $R^{!!} = (R^!)^!$.

Инволутивна подалгебра $\mathcal{A} \subset B(H)$ се назива *фон Нојманова алгебра* ако задовољава неки од следећих еквивалентних услова:

(а) алгебра $\mathcal{A}$ садржи идентичан оператор и затворена је у односу на σ-слабу топологију;

(б) алгебра $\mathcal{A}$ садржи идентичан оператор и затворена је у односу на σ-јаку топологију;

(в) алгебра $\mathcal{A}$ се поклапа са бикомутантом, $A^{!!} = A$.

Свака фон Нојманова алгебра је C^*-алгебра. За разлику од C^*-алгебре, код фон Нојманове алгебре увек постоји поларна декомпозиција, односно, сваки елемент $a \in \mathcal{A}$ може се на јединствен начин записати у облику $a = uh$, где је u парцијална изометрија, $h \in \mathcal{A}$ позитиван елемент и $\ker u = \ker h$.

Алгебра $\mathcal{A}$ је W^*-*алгебра* ако је C^*-алгебра и дуална је, као Банахов простор, неком Банаховом простору F, $\mathcal{A} = F^*$.

Линеарни функционал φ на фон Нојмановој алгебри $\mathcal{A}$ је *нормалан* ако за сваку растућу мрежу $a_\lambda \in \mathcal{A}, \lambda \in \Lambda$, са најмањим горњим ограничењем $a \in \mathcal{A}$, важи да је вредност $\varphi(a)$ најмање горње ограничење скупа $\varphi(a_\lambda)$. Пред-дуал W^*-алгебре $\mathcal{A}$ је изоморфан са скупом свих нормалних функционала на $\mathcal{A}$, који је иначе линеарни омотач скупа позитивних нормалних функционала.

1.3.2 Хилбертов C^*-модул

Хилбертов C^*-модул је на неки начин уопштење Хилбертовог простора, при чему уместо скаларног производа имамо такозвани унутрашњи производ чије вредности су елементи у датој C^*-алгебри. Они су се прво могли наћи у раду Капланског[19] 1953. године, где је развијена теорија за комутативне јединичне C^*-алгебре [29]. Касније, независно један од другог, Пашке[20] [53] и Рифел[21] [58] теорију шире на некомутатитивне C^*-алгебре. Хилбертови C^*-модули су важни за Каспаровљеву[22] формулацију КК-теорије [31], имају важну улогу у проширењу појма Морита еквиваленције на C^*-алгебру [59] и могу се наћи у некомутативној геометрији ([8],[9]). За више о Хилбертовим C^*-модулима читаоцу се препоручује следећа литература [66], [44], [64], [63], [53], [48], [39], [38], [24], [22] и [17].

Нека је M модул над C^*-алгебром $\mathcal{A}$. Дејство елемента $a \in \mathcal{A}$ на M означићемо са $x \cdot a$ или само са xa.

[19]Irving Kaplansky (1917–2006) канадски математичар
[20]William Paschke-амерички математичар
[21]Marc Aristide Rieffel-амерички математичар
[22]Геннадий Георгиевич Каспаров-руски математичар

Дефиниција 1.13. *Пред-Хилбертов модул* је десни $\mathcal{A}$-модул M снабдевен сесквилинеарном формом $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \to \mathcal{A}$ са следећим особинама:

(а) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ за свако $x \in M$;

(б) из $\langle x, x \rangle = 0$ следи $x = 0$;

(в) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$ за свако $x, y \in M$;

(г) $\langle x, y \cdot a \rangle = \langle x, y \rangle \cdot a$ за свако $x, y \in M$ и за свако $a \in \mathcal{A}$.

Пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle$ се назива $\mathcal{A}$-*вредносни унутрашњи производ.*

Навешћемо два примера пред-Хилбертових модула.

Пример 10. Нека је $J \subset \mathcal{A}$ десни идеал. Тада се J може посматрати као пред-Хилбертов $\mathcal{A}$-модул са унутрашњим производом $\langle x, y \rangle = x^* y$ за свако $x, y \in M$.

Пример 11. Нека је $\{J_i\}$ пребројив скуп десних идеала C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и нека је M линеаран простор свих низова $(x_i), x_i \in J_i$ који задовољавају услов $\sum_i \|x_i\|^2 < \infty$. Тада се M може посматрати као десни пред-Хилбертов $\mathcal{A}$-модул, при чему је $(x_i) \cdot a = (x_i a)$ за $(x_i) \in M, a \in \mathcal{A}$ и унутрашњи производ $\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_i x_i^* y_i$.

На пред-Хилбертов $\mathcal{A}$-модулу M можемо дефинисати функцију

$$\|x\|_M = \| \langle x, x \rangle \|^{1/2}, \quad x \in M.$$

Тврђење 1.2. *[53, Тврђење 2.3] Функција $\| \cdot \|_M$ је норма на M и задовољава следеће особине:*

(а) $\|x \cdot a\|_M \leqslant \|x\|_M \cdot \|a\|$ *за свако $x \in M, a \in \mathcal{A}$;*

(б) $\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leqslant \|y\|_M^2 \langle x, x \rangle$ *за свако $x, y \in M$ (неједнакост Коши-Буњаковског[23]);*

(в) $\| \langle x, y \rangle \| \leqslant \|x\|_M \cdot \|y\|_M$ *за свако $x, y \in M$.*

[23] Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) руски математичар

Доказ: За сваки позитиван линеаран функционал φ на $\mathcal{A}$, пресликавање $(x, y) \mapsto \varphi(\langle x, y\rangle)$ је полускаларни производ на M, одакле следи да је $x \mapsto \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2}$ полунорма на M. Имамо

$$\|x\|_M = \| \langle x, x\rangle \|^{1/2} = \sup\{\varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2} \mid \varphi \text{ је стање на } \mathcal{A}\},$$

за свако $x \in M$. Према томе, $\| \cdot \|_M$ је полунорма и на основу особине да је $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, следи да је $\| \cdot \|_M$ норма на M.

Тврђење (а) следи из једнакости

$$\|x \cdot a\|_M^2 = \| \langle x \cdot a, x \cdot a\rangle \| = \|a^* \langle x, x\rangle a\| \leqslant \|a\|^2 \cdot \| \langle x, x\rangle \| = \|x\|_M^2 \cdot \|a\|^2.$$

Да бисмо доказали тврђење (б) узмимо $x, y \in M$ и позитиван линеаран функционал φ на $\mathcal{A}$. Применом неједнакости Коши-Буњаковског за дегенерисани унутрашњи производ $\varphi(\langle \cdot, \cdot\rangle)$ на M добијамо

$$\begin{aligned}
\varphi(\langle x, y\rangle \langle y, x\rangle) &= \varphi(\langle x, y \cdot \langle y, x\rangle\rangle) \\
&\leqslant \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2} \cdot \varphi(\langle y \cdot \langle y, x\rangle, y \cdot \langle y, x\rangle\rangle)^{1/2} \\
&= \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2} \cdot \varphi(\langle x, y\rangle \langle y, y\rangle \langle y, x\rangle)^{1/2} \\
&\leqslant \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2} \cdot \| \langle y, y\rangle \|^{1/2} \cdot \varphi(\langle x, y\rangle \langle y, x\rangle)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Према томе, за сваки позитиван функционал φ имамо $\varphi(\langle y, x\rangle \langle x, y\rangle) \leqslant \|y\|_M^2 \cdot \varphi(\langle x, x\rangle)$, па смо доказали тврђење (б). Одавде директно следи тврђење (в). ∎

Дефиниција 1.14. Пред-Хилбертов $\mathcal{A}$-модул M се назива *Хилбертов C^*-модул* ако је комплетан у односу на норму $\| \cdot \|_M$.

Пример 12. Ако је $J \subset \mathcal{A}$ десни идеал, онда је пред-Хилбертов модул J комплетан у односу на норму $\| \cdot \|_J = \| \cdot \|$. Специјално, C^*-алгебра $\mathcal{A}$ се може посматрати као слободан Хилбертов модул са једним генератором.

Пример 13. Нека је $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ директна сума коначног скупа $\{M_i\}$ Хилбертових $\mathcal{A}$-модула. Тада је $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ Хилбертов модул, где је унутрашњи производ на $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ задат формулом $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i\rangle$, где су $x =$

(x_i),$y = (y_i) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Означимо директну суму n Хилбертових модула M са M^n.

Пример 14. Нека је $\bigoplus_i M_i$ директна сума пребројивог скупа $\{M_i\}$ Хилбертових $\mathcal{A}$-модула. На $\mathcal{A}$-модулу $\bigoplus_i M_i$ свих низова $x = (x_i), x_i \in M_i$ таквих да је $\sum_i \langle x_i, x_i \rangle$ конвергентан у норми C^*-алгебре $\mathcal{A}$ дефинишимо унутрашњи производ са

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \langle x_i, y_i \rangle \quad \text{за } x, y \in \bigoplus_i M_i.$$

На тај начин се добија Хилбертов C^*-модул. Пребројиву директну суму Хилбертовог модула M означићемо са $l^2(M)$ или H_M.

Стандардан Хилбертов модул, у ознаци $l^2(\mathcal{A})$ или $\mathcal{H}_\mathcal{A}$, јесте

$$l^2(\mathcal{A}) = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mid \xi_j \in \mathcal{A}, \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \xi_j \text{ конвергира у норми} \right\},$$

снабдевен $\mathcal{A}$-вредносним унутрашњим производом

$$l^2(\mathcal{A}) \times l^2(\mathcal{A}) \ni (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \eta_j \in \mathcal{A}, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots).$$

Ако је C^*-алгебра $\mathcal{A}$ јединична, онда Хилбертов модул $H_\mathcal{A}$ има стандардну базу $\{e_i\}, i \in \mathbb{N}$, где је $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ са јединичним елементом на i-том месту.

Нека је $N \subset M$ затворен подмодул Хилбертовог C^*-модула M. Дефинишимо *ортогоналан комплемент* $N^\perp$ као

$$N^\perp = \{y \in M \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ за свако } x \in N\}.$$

Тада је $N^\perp$ такође затворен подмодул Хилбертовог C^*-модула M, али једнакост $M = N \oplus N^\perp$ не мора да важи. На пример, за $\mathcal{A} = C[0,1]$ и $N = C_0(0,1)$, важи $N^\perp = 0$, одакле је $M \neq N \oplus N^\perp$.

Дефиниција 1.15. Затворен подмодул N у Хилбертовом C^*-модулу M назива се *ортогонално допуњив* ако је $M = N \oplus N^\perp$.

Дефиниција 1.16. Хилбертов C^*-модул се назива *коначно генерисан* ако постоји коначан скуп $\{x_i\} \subset M$ такав да је M једнак линеарном омотачу (над $\mathbb{C}$ и $\mathcal{A}$) тог скупа. Хилбертов C^*-модул се назива *пребројиво генерисан* ако постоји пребројив скуп $\{x_i\} \subset M$ такав да је M једнак затворењу у норми линеарног омотача (над $\mathbb{C}$ и $\mathcal{A}$) тог скупа. Када је подмодул коначних $\mathcal{A}$-линеарних сума једнак модулу M, онда кажемо да је модул M *алгебарски генерисан*.

Дефиниција 1.17. Нека је M Хилбертов C^*-модул над алгебром $\mathcal{A}$.

(а) Елемент $x \in M$ се назива *несингуларан* ако је елемент $\langle x, x\rangle \in \mathcal{A}$ инвертибилан.

(б) Скуп $\{x_i\} \in M$ се назива *ортонормиран* ако је $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$.

(в) Скуп $\{x_i\} \in M$ се назива *база* модула M ако је ортонормиран и ако су коначне суме $\sum_i x_i \cdot a_i, a_i \in \mathcal{A}$ густе у N.

Дефиниција 1.18. Хилбертов $\mathcal{A}$-модул M се назива *коначно генерисан пројективан* $\mathcal{A}$-модул ако постоји Хилбертов $\mathcal{A}$-модул N такав да за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $M \oplus N \cong \mathcal{A}^n$.

Теорема 1.13. *[Дупре[24]-Филморе[25]] Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и нека је M коначно генерисан пројективан $\mathcal{A}$-подмодул у стандардном Хилбертовом $\mathcal{A}$-модулу $H_{\mathcal{A}}$. Тада важе следећа тврђења:*

(а) *скуп несингуларних елемената модула $M^\perp$ је густ у $M^\perp$;*

(б) $H_{\mathcal{A}} = M \oplus M^\perp$*;*

(в) $M^\perp \cong H_{\mathcal{A}}$.

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 1.4.5]. ■

Теорема 1.14. *Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и нека је M коначно генерисан пројективни Хилбертов подмодул Хилбертовог $\mathcal{A}$-модула N. Тада је $N = M \oplus M^\perp$.*

[24]Maurice Joseph Dupré-амерички математичар
[25]Peter Arthur Fillmor-канадски математичар

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 1.4.6]. ■

Нека су M и N Хилбертови C^*-модули над C^*-алгебром $\mathcal{A}$. Ограничен $\mathbb{C}$-линеаран $\mathcal{A}$-хомоморфизам из M у N назива се *оператор* из M у N. Нека је $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ скуп свих оператора из M у N. Ако је $M = N$, онда је $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, M)$ Банахова алгебра. Нека је $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. Рећи ћемо да оператор T има *адјунговани* ако постоји оператор $T^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M)$ такав да важи

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \text{за свако } x \in M, y \in N.$$

Оператор T^* се зове адјунговани оператор оператора T. За разлику од ограничених оператора на Хилбертовом простору, ограничен оператор на Хилбертовом модулу не мора имати адјунговани. То показује следећи пример.

Пример 15. Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и нека оператор $T \in B(H_{\mathcal{A}})$ има матрични запис $\|t_{i,j}\|$, $t_{i,j} = \langle e_i, Te_j\rangle$ у односу на стандардну базу $\{e_i\}$. Адјунговани оператор има матрични облик $\|t^*_{j,i}\|$, где је $t^*_{j,i} = \langle e_j, Te_i\rangle^*$.

Нека је $\mathcal{A} = C[0, 1]$ јединична C^*-алгебра и нека су функције $\varphi_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, дефинисане на следећи начин

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{i+1}] \cup [\frac{1}{i}, 1]; \\ 1, & x = x_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}); \\ \text{линеарна}, & x \in [\frac{1}{i+1}, x_i] \cup [x_i, \frac{1}{i}]. \end{cases}$$

Ограничен оператор $T \in B(H_{\mathcal{A}})$ облика

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix}$$

нема адјунговани оператор. Наиме, његов адјунговани оператор би требало да има облик

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^* & 0 & 0 & \dots \\ \varphi_2^* & 0 & 0 & \dots \\ \varphi_3^* & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

који није ограничен, јер $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \varphi_i^*$ не конвергира у норми C^*-алгебре $\mathcal{A}$.

С обзиром да произвољни $\mathcal{A}$-линеаран ограничен оператор из M у N не мора имати адјунговани, посматраћемо алгебру свих $\mathcal{A}$-линеарних ограничених оператора из модула M у модул N који имају адјунговани, у ознаци $B^a(M,N)$ или $\mathrm{End}^*_{\mathcal{A}}(M,N)$ ($B^a(M)$ или $\mathrm{End}^*_{\mathcal{A}}(M)$ ако је $M=N$). Познато је да је $B^a(M)$ C^*-алгебра у случају када $\mathcal{A}$ јесте C^*-алгебра.

Тврђење 1.3. *За оператор $T\colon M \to M$, еквивалентни су следећи услови:*

(а) *T је позитиван елемент C^*-алгебре $B^a(M)$;*

(б) *важи $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ за свако $x \in M$, то јест, $\langle Tx, x\rangle$ је позитиван у C^*-алгебри $\mathcal{A}$.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Тврђење 2.1.3]. ∎

Дефиниција 1.19. Затворен подмодул N у Хилбертовом C^*-модулу M назива се *тополошки допуњив* (или само *допуњив*) ако постоји затворен подмодул L у M такав да је $N+L=M$ и $N \cap L = \{0\}$ (или краће $M = N \widetilde{\oplus} L$).

Јасно, сваки ортогонално допуњив подмодул је тополошки допуњив. Како су на основу Дупре-Филморове теореме коначно генерисани пројективни подмодули у $H_{\mathcal{A}}$ ортогонално допуњиви они су и тополошки допуњиви. Следећи пример нам показује да постоје тополошки допуњиви подмодули који нису ортогонално допуњиви.

Пример 16. Нека је $J \subset \mathcal{A}$ затворен идеал такав да из $Ja = 0, a \in \mathcal{A}$ следи $a = 0$. Нека је $M = \mathcal{A} \oplus J$ и $N = \{(b,b) \mid b \in J\}$. Тада је N тополошки допуњив, јер за подмодул $L = \{(a,0) \mid a \in \mathcal{A}\} \subset M$ важи $N \widetilde{\oplus} L = M$. Подмодул N није ортогонално допуњив, јер је $N^{\perp} = \{(c,-c) \mid c \in J\}$, одакле је $N \oplus N^{\perp} = J \oplus J \neq M$.

Нека је N затворен подмодул Хилбертовог C^*-модула M. Ако је N допуњив, при чему се M може разложити на директну суму која не мора бити ортогонална $M = N\widetilde{\oplus}L$, онда можемо дефинисати пројектор P на N дуж L. Пројектор P не мора имати адјунгован оператор. Међутим, ако важи $M = N \oplus L$, онда је P самоадјунгован.

Лема 1.1. *Нека је N затворен подмодул Хилбертовог C^*-модула M и нека је допуњив $M = N\widetilde{\oplus}L$. Пројектор P на N дуж L је $\mathcal{A}$-линеаран и ограничен.*

Доказ: $\mathcal{A}$-линеарност пројектора P се једноставно доказује.

Нека низ $(x_n, P(x_n))$ конвергира ка (x, y), где је $x_n \in M$. Елемент $x \in M$ има јединствено разлагање $x = P(x) + z$ за неко $z \in L$. Низ $P(x_n)$ конвергира ка y у затвореном подмодулу N, одакле $y \in N$. С обзиром да низ $x_n - P(x_n)$ конвергира ка $x - y$ у затвореном подмодулу L, онда и $x - y \in L$. Одавде смо добили да важи $x = y + (x - y)$, где је $y \in N, x - y \in L$. На основу јединствености разлагања елемента x, следи да је $y = Px$. Доказали смо да је график оператора P затворен. На основу теореме о затвореном графику следи да је P ограничен оператор. ■

Тврђење 1.4. *Нека је M коначно генерисан Хилбертов подмодул у Хилбертовом модулу N над јединичном C^*-алгебром. Тада је M ортогонално допуњив у N.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Лема 2.3.7]. ■

Теорема 1.15. *Нека је $H_{\mathcal{A}} \cong M\widetilde{\oplus}N$, где су M и N затворени C^*-модули над алгебром $\mathcal{A}$. Ако N има коначан број генератора, онда је N коначно генерисан пројективан C^*-модул.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 2.7.5]. ■

Теорема 1.16. *Нека је M Хилбертов C^*-модул над алгебром $\mathcal{A}$.*

(a) *Важи $M^{\perp} = \{0\}$ и $\{0\}^{\perp} = M$.*

(б) *Ако је $N \subset M$ подмодул (не мора бити затворен), онда је $N^\perp$ затворен (у норми) подмодул модула M.*

(в) *Ако су N_1 и N_2 подмодули модула M такви да је $N_1 \subset N_2$, онда је $N_2^\perp \subset N_1^\perp$.*

(г) *Ако су N_1 и N_2 подмодули модула M такви да је $N_1 \oplus N_2 = M$, онда су они затворени и важи $N_2^\perp = N_1$, $N_1^\perp = N_2$, $N_1^{\perp\perp} = N_1$, и $N_2^{\perp\perp} = N_2$.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у књизи [66, Лема 15.3.4]. ■

Теорема 1.17. *Нека су M и N Хилбертови C^*-модули над алгебром $\mathcal{A}$ и нека је $T\colon M \to M$ линеарно пресликавање. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(а) *оператор T је ограничен и $\mathcal{A}$-линеаран, то јест, $T(x \cdot a) = T(x) \cdot a$ за свако $x \in M, a \in \mathcal{A}$;*

(б) *постоји константа $K \geqslant 0$ таква да важи неједнакост $\langle Tx, Tx \rangle \leqslant K \langle x, x \rangle$ за свако $x \in M$.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 2.1.4]. ■

Теорема 1.18. *Нека су M и N Хилбертови C^*-модули над алгебром $\mathcal{A}$ и $T \in \mathrm{Hom}^*_{\mathcal{A}}(M, N)$ оператор са затвореном сликом. Тада важе следећа тврђења:*

(а) $\ker T$ *је ортогонално допуњив подмодул у M;*

(б) $\operatorname{ran} T$ *је ортогонално допуњив подмодул у N.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у књизи [44, Теорема 2.3.3]. ■

Лема 1.2. *Нека је M Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром $\mathcal{A}$ која садржи апроксимативну јединицу. Тада је затворење скупа $M \cdot \mathcal{A} = \{xa \mid x \in M, a \in \mathcal{A}\}$ у норми једнако M, односно важи $\overline{M \cdot \mathcal{A}} = M$.*

Доказ: Очигледно је да важи $\overline{M \cdot \mathcal{A}} \subset M$. Нека је $x \in M$ и нека је e_α апроксимативна јединица у $\mathcal{A}$. Тада $xe_\alpha \to x$, па $x \in \overline{M \cdot \mathcal{A}}$. Доказали смо инклузију $M \subset \overline{M \cdot \mathcal{A}}$. Према томе, $\overline{M \cdot \mathcal{A}} = M$. ■

Лема 1.3. *[66, Лема 15.3.7](Поларна декомпозиција) Нека је M Хилбертов C^*-модул над јединичном C^*-алгебром $\mathcal{A}$ и нека је $T \in B^a(M)$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(а) *оператор T има поларно разлагање $T = V|T|$, где је $V \in B^a(M)$ парцијална изометрија за коју важи*

$$\ker V = \ker T,\ \ker V^* = \ker T^*,\ V(M) = \overline{T(M)},\ V^*(M) = \overline{|T|(M)};$$

(б) $M = \ker|T| \oplus \overline{|T|(M)}$ *и* $M = \ker T^* \oplus \overline{T(M)}$*;*

(в) $\overline{T(M)}$ *и* $\overline{|T|(M)}$ *су допуњиви у M.*

Ако оператор T има поларно разлагање, онда је V^*V пројектор на $\overline{|T|(M)}$ и важи

$$V^*V|T| = |T|,\ V^*T = |T|,\ VV^*T = T.$$

Доказ: Доказ леме се може наћи у књизи [66, Лема 15.3.7]. ■

1.3.3 „Компактни” оператори на Хилбертовом C^*-модулу

Нека су M и N Хилбертови C^*-модули над алгебром $\mathcal{A}$. За елементе $x \in N, y \in M$ дефинишимо оператор

$$\Theta_{x,y}\colon M \to N, \quad \Theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle, \tag{1.3.1}$$

којег ћемо звати *оператор коначног ранга.* За такве операторе важе једнакости:

(а) $(\Theta_{x,y})^* = \Theta_{y,x}$;

(б) $\Theta_{x,y}\Theta_{u,v} = \Theta_{x\langle y,u\rangle,v} = \Theta_{x,v\langle u,y\rangle}$ за $u \in M, v \in N$;

(в) $T\Theta_{x,y} = \Theta_{Tx,y}$ за Хилбертов $\mathcal{A}$-модул L и $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, L)$;

(г) $\Theta_{x,y}S = \Theta_{x,S^*y}$ за Хилбертов $\mathcal{A}$-модул L и $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M)$.

Означимо затворење (у норми) линеарног омотача скупа свих оператора коначног ранга са $K(M, N)$. Елементе скупа $K(M, N)$ зваћемо *„компактни"* оператори. У случају $M = N$, $K(M)$ је затворен двострани идеал у C^*-алгебри $B^a(M)$. Затворење у норми оператора коначног ранга чини алгебру свих „компактних" оператора. Наводнике код термина компактни стављамо да бисмо нагласили чињеницу да „компактни" оператори не морају сликати ограничене скупове у релативно компактне скупове, као што је то случај код Банахових простора. Упркос томе, „компактни" оператори имају сличне особине као компактни оператори на Хилбертовим просторима (видети радове [45] и [43]).

Нека је $H_{\mathcal{A}}$ стандардан Хилбертов модул над јединичном C^*-алгебром и нека је $\mathcal{A}^n \subset H_{\mathcal{A}}$ слободан подмодул генерисан помоћу првих n елемената стандардне базе. Означимо са P_n пројектор из $H_{\mathcal{A}}$ на подмодул $\mathcal{A}^n$. Низ таквих пројектора P_n зваћемо *стандардна апроксимативна јединица* за $K(H_{\mathcal{A}})$.

Тврђење 1.5. *[44, Тврђење 2.2.1] Елемент $K \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ је „компактан" ако и само ако $(I - P_n)K \to 0$ у норми.*

Доказ: За свако z које је ортогонално на $\mathcal{A}^n$ важи

$$\begin{aligned}\|\Theta_{x,y}(z)\|^2 &= \| \langle \Theta_{x,y}(z), \Theta_{x,y}(z) \rangle \| = \| \langle y, z \rangle^* \langle x, x \rangle \langle y, z \rangle \| \\ &\leqslant \|x\|^2 \cdot \| \langle y, z \rangle \|^2 = \|x\|^2 \cdot \| \langle P_n y, z \rangle \|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 \cdot \|P_n y\|^2 \cdot \|z\|^2.\end{aligned}$$

С обзиром да $\|P_n y\|$ конвергира ка нули, рестрикција оператора $\Theta_{x,y}$ на подмодул $(\mathcal{A}^n)^\perp$ такође конвергира у норми ка нули. Одавде рестрикција било којег „компактног" оператора на подмодул $(\mathcal{A}^n)^\perp$ конвергира у операторској норми ка нули. Претпоставимо да за неки оператор K важи $\|K|_{(\mathcal{A}^n)^\perp}\| \to 0$. Тада, из $\sum_{m=1}^n K e_m \langle e_m, z \rangle = 0$ за свако $z \in H_{\mathcal{A}}$ за које важи $z \perp \mathcal{A}^n$ и $\|z\| \leqslant 1$, имамо

$$\sup_z \left\| Kz - \sum_{m=1}^{n} Ke_m \langle e_m, z \rangle \right\| = \sup_z \|Kz\| \to 0 \tag{1.3.2}$$

када $n \to \infty$. Ако је $z \in \mathcal{A}^n$, онда је $Kz = \sum_{m=1}^{n} Ke_m \langle e_m, z\rangle$. Ово нам даје да (1.3.2) важи и када се супремум узме по свим елементима јединичне лопте целог модула $H_{\mathcal{A}}$. Према томе, оператор K је гранична вредност по норми низа оператора $K_n = \sum_{m=1}^{n} \Theta_{Ke_m, e_m}$. ■

Лема 1.4. *Нека је $Q \in K(H_{\mathcal{A}})$ пројектор и нека је P_n стандардна апроксимативна јединица у $K(H_{\mathcal{A}})$. Тада за свако $\varepsilon \in (0, 1/12]$ постоји природан број n и унитаран елемент $U_n \in B(H_{\mathcal{A}})$, такви да важе неједнакости $\|Q - P_nQP_n\| < \varepsilon$ и $U_nQU_n^* \leqslant P_n$.*

Доказ: Доказ леме се може наћи у књизи [66, Лема 15.4.1]. ■

Теорема 1.19. *[66, Тврђење 15.4.2] Нека је M Хилбертов C^*-модул над јединичном алгебром $\mathcal{A}$ и нека је P_n стандардна апроксимативна јединица у $K(H_{\mathcal{A}})$. Следећи услови су еквивалентни:*

(а) *M је ортогонално допуњив до неког слободног $\mathcal{A}$-модула и алгебарски коначно генерисан;*

(б) *M је коначно генерисан пројективан модул;*

(в) *M је изоморфан као модул затвореном и алгебарски коначно генерисаном подмодулу модула $H_{\mathcal{A}}$;*

(г) *M је изоморфан са $Q(H_{\mathcal{A}})$ за неки „компактан” пројектор $Q \in K(H_{\mathcal{A}})$.*

Доказ: (а)$\Rightarrow$(б): Нека је $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ скуп генератора модула M таквих да је подмодул $\mathcal{A}$-линеарних сума једнак модулу M. Дефинишимо пресликавање $\pi\colon \mathcal{A}^n \to M$, $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ и утапање $\varepsilon\colon \ker\pi \to \mathcal{A}^n$. Модул M је ортогонално допуњив до неког слободног $\mathcal{A}$-модула, па постоји модул N тако да $M \oplus N$ има базу $\{b_i\}_{i\in I}$.

Нека је p пројектор са $M \oplus N$ на M. С обзиром да је пресликавање π сурјективно, за свако b_i постоји a_i тако да је $\pi(a_i) = p(b_i)$. Тиме је дефинисано $\mathcal{A}$-линеарно пресликавање $h\colon M \oplus N \to \mathcal{A}^n$ за које важи $h(b_i) = a_i$, $i \in I$. Нека је $\phi\colon M \to \mathcal{A}^n$ рестрикција пресликавања h на M. Подмодули $\ker \pi$ и $\phi(M)$ су ортогонални и важи $\ker \pi \oplus \phi(M) = \mathcal{A}^n$.

(б)$\Rightarrow$(в): Нека је $\mathcal{A}^n$ изоморфан директној суми модула M и неког $\mathcal{A}$-модула F и нека је $i\colon \mathcal{A}^n \to M \oplus F$ изоморфизам. Означимо са $P_M^{'}$ пројектор са $M \oplus F$ на M. Тада је $P_M\colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$, $P_M = i^{-1} \circ P_M^{'} \circ i$ пројектор на $\mathcal{A}^n$ коме одговара матрица у $M_n(\mathcal{A}) \simeq B(\mathcal{A}^n)$, па је P_M непрекидно пресликавање. Одавде следи да је и $P_M^{'} = i \circ P_M \circ i^{-1}$ непрекидно пресликавање.

Нека низ (x_n) у M конвергира ка x. Тада $P_M^{'} x_n \to x$ јер је $P_M^{'} x_n = x_n$. Из непрекидности пресликавања $P_M^{'}$, имамо $P_M^{'} x_n \to P_M^{'} x$, одакле је $P_M^{'} x = x$, односно $x \in M$. Доказали смо да је M затворен. Модул M је генерисан помоћу $P_M^{'}(e_1), P_M^{'}(e_2), \dots, P_M^{'}(e_n)$, где је $\{e_i\}_{i=1}^n$ стандардна ортонормирана база за $\mathcal{A}^n$. Према томе, M можемо посматрати као алгебарски коначно генерисан затворен подмодул модула $H_{\mathcal{A}}$.

(в)$\Rightarrow$(г): Посматрајмо стандардну ортонормирану базу $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ за $H_{\mathcal{A}}$. За $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ скуп генератора за M, дефинисаћемо „компактан” (чак коначног ранга) оператор са

$$K = \sum_{i=1}^{k} \Theta_{\eta_i, e_i}.$$

Сваки елемент $a \in \mathcal{A}$ може да се запише као $a = \sum_{n=1}^{\infty} e_n a_n$, где је $a_n = \langle e_n, a \rangle \in \mathcal{A}$, а одатле

$$K(a) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \langle e_i, a \rangle = \sum_{i=1}^{k} \eta_i a_i.$$

Добили смо $M = K(H_{\mathcal{A}}) = K(\mathcal{A}^k)$, па K има затворену слику. Нека је $K = V|K|$ поларно разлагање оператора K. Оно постоји зато што је слика оператора K модул M који је ортогонално допуњив, а слика оператора $|K|$ је $\mathcal{A}^n$. Тада је $V^*V \leqslant P_n$, па је $V^* = V^*VV^*$ „компактан”, а тиме и $Q = VV^*$. Одавде следи

$$\operatorname{ran} Q = \operatorname{ran} V = \operatorname{ran} K = M.$$

(г)⇒(а): Нека је M изоморфан са $Q(H_{\mathcal{A}})$ за неки „компактан” пројектор $Q \in K(H_{\mathcal{A}})$. Применом Леме 1.4 добијамо „компактан” пројектор $Q_1 = UQU^*$, где је U унитаран, за који важи $Q_1 \leqslant P_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Важи $M \simeq Q_1(H_{\mathcal{A}}) = U^*(\mathcal{A}^n)$. С обзиром да је U унитаран и $\mathcal{A}^n$ слободан и алгебарски коначно генерисан, модул M је алгебарски коначно генерисан. Декомпозиција $Q_1(H_{\mathcal{A}}) \oplus (I - Q_1)(H_{\mathcal{A}}) = H_{\mathcal{A}}$ нам даје да је $Q_1(H_{\mathcal{A}}) \simeq M$ пројективан. ■

Лема 1.5. *Позитиван оператор $T \in K(M)$ је строго позитиван ако и само ако оператор T има густу слику.*

Доказ: Доказ леме се може наћи у књизи [66, Лема 15.4.5]. ■

Теорема 1.20. *[66, Теорема 15.4.6](Каспаровљева теорема о стабилизацији) Нека је $\mathcal{A}$ произвољна C^*-алгебра и M пребројиво генерисан Хилбертов $\mathcal{A}$-модул. Тада је $M \oplus H_{\mathcal{A}} \cong H_{\mathcal{A}}$.*

Доказ: Нека C^*-алгебра $\mathcal{A}$ има јединицу и $H_{\mathcal{A}}$ има стандардну базу $\{e_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, где је $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ са јединичним елементом на i-том месту. Нека се низ (η_k) састоји од генератора модула M тако да се сваки генератор јавља пребројиво много пута. Дефинишимо оператор $T\colon H_{\mathcal{A}} \to M \oplus H_{\mathcal{A}}$ са

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \Theta_{\eta_k \oplus 2^{-k} e_k, e_k},$$

где је Θ оператор дефинисан са (1.3.1). Очигледно је T елемент скупа $K(H_{H_{\mathcal{A}}}, M \oplus H_{\mathcal{A}})$ и важи

$$T(e_k) = 2^{-k} \eta_k \oplus 4^{-k} e_k.$$

Прво ћемо показати да оператори T и $|T|$ имају густу слику.

Фиксирајмо $k \in \mathbb{N}$. На основу дефиниције оператора T елемент $\eta_k \oplus 2^{-j}e_j$ припада слици оператора T за свако j за које је $\eta_k = \eta_j$. С обзиром да низ (η_k) сваки генератор садржи пребројиво много пута и $2^{-j}e_j \to 0$ када $j \to \infty$, елемент $\eta_k \oplus 0$ припада затворењу слике оператора T. Одавде следи $M \oplus \{0\} \subset \overline{T(H_\mathcal{A})}$. Такође, важи $\{0\} \oplus H_\mathcal{A} \subset \overline{T(H_\mathcal{A})}$, јер је $0 \oplus e_j = 4^j T(e_j) - 2^j \eta_j \oplus 0$. Доказали смо $M \oplus H_\mathcal{A} = (M \oplus 0) + (0 \oplus H_\mathcal{A}) \subset \overline{T(H_\mathcal{A})}$, односно да T има густу слику.

Да бисмо доказали да $|T|$ има густу слику, довољно је доказати да T^*T има густу слику (зато што $T^*T(H_\mathcal{A}) \subset |T|(H_\mathcal{A})$). Нека је

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-4k} \Theta_{e_k, e_k}.$$

Тада је

$$\begin{aligned}
T^*T(x) &= \sum_{k,j} 2^{-j-k} \Theta_{e_k, \eta_k \oplus 2^{-k} e_k} \cdot \Theta_{\eta_j \oplus 2^{-j} e_j, e_j}(x) \\
&= \sum_{k,j} 2^{-j-k} e_k \left\langle \eta_k \oplus 2^{-k} e_k, \eta_j \oplus 2^{-j} e_j \right\rangle \langle e_j, x \rangle \\
&= \sum_{k,j} 2^{-j-k} e_k \langle \eta_k, \eta_j \rangle \langle e_j, x \rangle + S(x) \\
&= \left(\sum_k 2^{-k} \Theta_{\eta_k \oplus 0, e_k} \right)^* \left(\sum_k 2^{-k} \Theta_{\eta_k \oplus 0, e_k} \right) + S(x).
\end{aligned}$$

Одавде видимо да је $T^*T \geqslant S$. Оператор S је строго позитиван, па је и T^*T строго позитиван. На основу Леме 1.5 следи да T^*T има густу слику.

Доказаћемо да оператор T има поларно разлагање $T = V|T|$, где је $V \colon H_\mathcal{A} \to M \oplus H_\mathcal{A}$ унитаран оператор. Оператори T и $|T|$ имају густу слику, па је задовољен услов (в) Теореме 1.3, одакле важи T има поларно разлагање $T = V|T|$, где је $V \in B^a(M)$ парцијална изометрија за коју важи

$$V(M) = M \oplus H_\mathcal{A}, \ V^*(M) = H_\mathcal{A}.$$

Одавде следи да је V унитаран и да постоји изоморфизам између $H_\mathcal{A}$ и

$M \oplus H_{\mathcal{A}}$.

Нека C^*-алгебра $\mathcal{A}$ нема јединицу. Означимо са $\mathcal{A}^{\sim}$ њену унитализацију. Тада је $M \oplus H_{\mathcal{A}^{\sim}} \cong H_{\mathcal{A}^{\sim}}$. На основу Леме 1.2 имамо $\overline{M \cdot \mathcal{A}} = M$ и $\overline{H_{\mathcal{A}^{\sim}} \cdot \mathcal{A}} = H_{\mathcal{A}}$, одакле је

$$M \oplus H_{\mathcal{A}} = \overline{M \cdot \mathcal{A}} \oplus \overline{H_{\mathcal{A}^{\sim}} \cdot \mathcal{A}} = \overline{(M \oplus H_{\mathcal{A}^{\sim}}) \cdot \mathcal{A}} \cong \overline{H_{\mathcal{A}^{\sim}} \cdot \mathcal{A}} = H_{\mathcal{A}}.$$

■

У случају када је стандардан Хилбертов модул над јединичном C^*-алгебром даћемо још један геометријски опис „компактних” оператора. За ограничен подскуп S скупа $H_{\mathcal{A}}$ кажемо да је $\mathcal{A}$-*„преткомпактан”* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји слободан коначно генерисан $\mathcal{A}$-модул $N \cong \mathcal{A}^n, N \subset H_{\mathcal{A}}$, такав да важи $d(S, N) := \sup_{x \in S} d(x, N) < \varepsilon$.

Тврђење 1.6. *Нека је $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$. Тада су еквивалентни следећи услови:*

(а) $T \in K(H_{\mathcal{A}})$;

(б) *слика $T(B_1(H_{\mathcal{A}}))$ јединичне лопте $B_1(H_{\mathcal{A}})$ је $\mathcal{A}$-„преткомпактан” скуп.*

Доказ: Доказ тврђења се може наћи у књизи [44, Тврђење 2.6.2]. ■

1.3.4 Дуалност Хилбертових C^*-модула

Нека је M Хилбертов $\mathcal{A}$-модул. Означимо са M' скуп свих ограничених $\mathcal{A}$-линеарних пресликавања из M у $\mathcal{A}$. Структура векторског простора над пољем $\mathbb{C}$ уведена је помоћу формуле $(\lambda \cdot f)(x) = \overline{\lambda} f(x)$, где је $\lambda \in \mathbb{C}, f \in M', x \in M$. Формулом $(f \cdot a)(x) = a^* f(x)$, где је $a \in \mathcal{A}$, уводи се структура десног $\mathcal{A}$-модула на M'. Овај модул је комплетан у односу на норму $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$ и зове се *дуални (Банахов) модул*. Елементи модула M' се називају *функционали* на Хилбертовом модулу M. Модул M се може утопити у M' помоћу $M \ni y \mapsto \Lambda_y \in M'$, $\Lambda_y(x) = \langle y, x \rangle$. Ако је ово утапање „на”, модул M се назива *самодуалним.*

Тврђење 1.7. *Нека је M самодуални Хилбертов $\mathcal{A}$-модул, N произвољан Хилбертов $\mathcal{A}$-модул и $T\colon M \to N$ ограничен оператор. Тада постоји оператор $T^*\colon N \to M$ такав да једнакост $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ важи за свако $x \in M, y \in N$.*

Доказ: Доказ тврђења се може наћи у раду [53]. ■

Последица 1.2. *Нека је M самодуалан Хилбертов $\mathcal{A}$-модул. Тада је $B(M) = B^a(M)$.*

Тврђење 1.8. *Нека је M самодуалан Хилбертов $\mathcal{A}$-модул и нека је $M \subset N$. Тада је $N = M \oplus M^{\perp}$.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Тврђење 2.5.4]. ■

Ако је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра, онда је Хилбертов модул $\mathcal{A}^n$ самодуалан. За произвољан Хилбертов C^*-модул ово није тачно. Дуални модул стандардног Хилбертовог модула $H_{\mathcal{A}}$ описан је у следећем тврђењу.

Тврђење 1.9. *[44, Тврђење 2.5.5] Нека је S скуп низова $f = (f_i)$, $f_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, таквих да су норме парцијалних сума $\left\|\sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i\right\|$ униформно ограничене. Ако је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра, онда је овај скуп изоморфан са $H'_{\mathcal{A}}$, при чему се изоморфизам $I\colon S \to H'_{\mathcal{A}}$ остварује формулом*

$$I(f)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^* x_i, \quad x = (x_i) \in H_{\mathcal{A}}, \tag{1.3.3}$$

а норма елемента f је дата као

$$\|f\|^2 = \sup_N \left\|\sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i\right\|. \tag{1.3.4}$$

Доказ: Нека је $f \in H'_{\mathcal{A}}$, $\{e_i\}$ стандардна база у $H_{\mathcal{A}}$ и $f_i = (f(e_i))^*$. Доказаћемо да низ (f_i) одређује функционал f на јединствен начин. Претпоставимо да постоји функционал g, који је различит од f, такав да је $g(e_i) = f(e_i)$. Изаберимо $x \in H_{\mathcal{A}}$ такво да важи $\|f(x) - g(x)\| = C \neq 0$ и означимо низ са $x^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} e_i x_i = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$. Нека је број N такав да је

$$\|x - x^N\| = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} x_i^* x_i \right\|^{1/2} < \frac{C}{2(\|f\| + \|g\|)}.$$

Из $f(x^{(N)}) = g(x^{(N)})$ следи $\left\|f(x - x^{(N)}) - g(x - x^{(N)})\right\| = C$. Међутим, са друге стране имамо

$$\begin{aligned} \left\|f(x - x^{(N)}) - g(x - x^{(N)})\right\| &\leqslant (\|f\| + \|g\|) \left\|x - x^{(N)}\right\| \\ &< (\|f\| + \|g\|) \frac{C}{2(\|f\| + \|g\|)} \leqslant \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Дошли смо до контрадикције, па је $f = g$. Коши-Буњаковскова неједнакост

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} f_i^* x_i \right\|^2 \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i \right\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i^* x_i \right\| \tag{1.3.5}$$

нам даје

$$\|f\|^2 \leqslant \sup_N \left\| \sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i \right\|. \tag{1.3.6}$$

Приметимо да ако узмемо $x_i = f_i / \| \sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i \|^{1/2}$ добијамо да важи једнакост у (1.3.5). Ставимо $f^{(N)} = (f_1, \ldots, f_N, 0, \ldots), f^{(N)} \in (\mathcal{A}^n)' \cong \mathcal{A}^n$. Очигледно је

$$\|f\|^2 \geqslant \|f^{(N)}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i \right\| \tag{1.3.7}$$

и из (1.3.6) и (1.3.7) следи (1.3.4). С обзиром да за свако $\varepsilon > 0$ можемо наћи број N такав да процена

$$\left\| \sum_{i=N}^{N+n} f_i^* x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=N}^{N+n} f_i^* f_i \right\| \cdot \left\| \sum_{i=N}^{N+n} x_i^* x_i \right\| \leqslant \|f\|^2 \left\| \sum_{i=N}^{N+n} x_i^* x_i \right\| < \|f\|^2 \varepsilon$$

важи за свако $n > 0$, следи да ред на десној страни једнакости (1.3.3) конвергира. ■

Напомена 1.2. Вреди напоменути да је самодуалност, чак и случају када је полазна алгебра $\mathcal{A}$ комутативна, још актуелан проблем. Видети [23, Теорема 3.3-2] и [55, Теореме 4.5 и 4.6].

Напомена 1.3. Читајући пажљиво доказ Тврђења 1.9, можемо видети да се ништа неће променити ако заменимо $l^2(\mathcal{A})$ са $l^2(\mathcal{A})'$. Заиста, цео доказ не зависи од конвергенције у норми реда $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \xi_j$. Другим речима, $l^2(\mathcal{A})'$ је самодуалан.

Навешћемо један интересантан пример дуалног модула.

Пример 17. Нека је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на сепарабилном Хилбертовом простору H. Посматрајмо међусобно ортогоналне пројекторе $p_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$, такве да ред $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ конвергира σ-слабо ка $1 \in \mathcal{A}$ и сваки пројектор p_i је еквивалентан са 1. Можемо посматрати $H = \bigoplus_i H_i$ као ортогоналну суму Хилбертових простора изоморфних са H, при чему су $u_i \colon H \to H_i$ изометрије, тако да важи

$$p_i = u_i u_i^*, \quad 1 = u_i^* u_i.$$

На основу Тврђења 1.9,

$$H'_{\mathcal{A}} = \left\{ (a_i) \mid a_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N},\ \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i a_i^* \right\| < \infty \right\}$$

је Хилбертов C^*-модул над $\mathcal{A}$ у односу на производ

$$\langle (a_i), (b_i) \rangle = \sigma \text{ слабо-} \lim \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^*.$$

Пресликавање

$$S \colon \mathcal{A} \to H'_{\mathcal{A}}, \quad S \colon a \mapsto a \cdot (u_i),$$

$$S^{-1} \colon H'_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}, \quad S^{-1} \colon \{a_i\} \mapsto \sigma \text{ слабо-} \lim \sum_i a_i u_i^*$$

дефинише изометрички изоморфизам између $\mathcal{A}$ и $H'_{\mathcal{A}}$.

1.3.5 Ортогонални системи и базе Хилбертових C^*-модула

Једна од интересантних тема Хилбертових C^*-модула јесте постојање ортогоналног система и базе, као и однос између различитих система и база. Код Хилбертових модула ситуација је тежа него код Хилбертових простора и постоји потреба за посматрањем различитих особина ситема и база. Навешћемо неке резултате и интересантне примере из рада [39].

Дефиниција 1.20. Нека је $\{e_i\}_{i\in I}$ ортогоналан систем Хилбертовог C^*-модула M над алгебром $\mathcal{A}$, тј. $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ за $i \neq j$. Дефинишимо следеће особине.

(а) Систем $\{e_i\}$ *генерише* M над $\mathcal{A}$ ако је

$$M = \overline{\operatorname{span}_{\mathcal{A}}\{e_i \mid i \in I\}}.$$

(б) Систем $\{e_i\}$ *потпуно генерише* M над $\mathcal{A}$ ако за свако $x \in M$ постоје елементи $a_i \in \mathcal{A}$ такви да важи

$$x = \sum_{i\in I} e_i a_i,$$

при чему се мисли на следећу конвергенцију

$$\sum_{i\in I} e_i a_i = \lim_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i\in F} e_i a_i,$$

где граничну вредност узимамо по коначним подскуповима скупа I који су уређени инклузијом.

(в) Систем $\{e_i\}_{i\in I}$ је *затворен* ако за свако $x \in M$ ред

$$\sum_{i\in I} (2\langle x, e_i\rangle \langle e_i, x\rangle - \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_i\rangle \langle e_i, x\rangle)$$

конвергира у норми ка $\langle x, x\rangle$. (Ова особина је еквивалентна особини да за свако $x \in M$, $\langle x - S_F(x), x - S_F(x)\rangle$ конвергира ка нули, где је

$S_F(x) = \sum_{i\in F} e_i \langle e_i, x\rangle$ парцијална сума Фуријеовог реда елемента x која одговара коначном подскупу F скупа I. Граничну вредност узимамо по коначним подскуповима скупа I који су уређени инклузијом.)

(г) Систем $\{e_i\}$ је *комплетан* ако не постоји не-нула вектор $x \in M$ такав да важи $\langle e_i, x\rangle = 0$ за свако $i \in I$.

Из особине (б) следи особина (а). Следећи пример показује да не мора да важи обратно.

Пример 18. Нека је $\mathcal{A} = C_0(0,1] \cong \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$ и нека је $M = \mathcal{A}$ Хилбертов $\mathcal{A}$-модул у односу на унутрашњи производ

$$\langle a, b\rangle = a^*b, \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Тада једночлани скуп $\{f\}$, где је $f(x) = x$ за $x \in [0,1]$, јесте ортогоналан и комплетан систем модула M. Означимо са $\mathcal{B}$ затворење алгебре

$$\{fg \mid g \in C_0(0,1]\}.$$

Тада, C^*-алгебра $\mathcal{B}$ садржи f као граничну вредност $f = \lim_i fg_i$, где је $\{g_i\}$ апроксимативна јединица у $\mathcal{A}$. Као последица, $\mathcal{B}$ раздваја тачке интервала $(0,1]$ и на основу Стоун[26]-Вајерштраусове[27] теореме једнака је алгебри $C_0(0,1]$. Према томе, систем $\{f\}$ задовољава особину (а), али не задовољава особину (б), јер на пример f се не може записати као производ fg за неко $g \in C_0(0,1]$.

Следећи пример показује да комплетан ортогоналан систем не мора да задовољава особину (а).

Пример 19. Слично као у Примеру 18, нека је $\mathcal{A} = C_0(0,1]$ и $M = \mathcal{A}$, а за систем узмемо $\{g\}$, где је

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1/2]; \\ 1-x, & x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

[26]Marshall Harvey Stone (1903–1989) амерички математичар
[27]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) немачки математичар

Очигледно је да је $\{g\}$ комплетан ортогоналан систем за M, али не задовољава особину (а), јер затворење скупа $\{gh \mid h \in C_0(0,1]\}$ припада суспензији $S\mathcal{A} = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ алгебре $\mathcal{A}$, а не припада самој алгебри $\mathcal{A}$.

Следећи пример показује да постоји ортогонална база која није ортонормирана, а не задовољава јединственост у разлагању поменутом у особини (б).

Пример 20. Посматрајмо $\mathcal{A} = L^\infty[0,1]$ и модул $M = \mathcal{A}$ са унутрашњим производом $\langle f, g\rangle = \overline{f} \cdot g$. Нека је ортогоналан систем дат са $\{f_1, f_2\}$ где је

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1/2]; \\ 0, & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/2]; \\ 1, & x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Тада је $g = f_1 g + f_2 g$ за свако $g \in \mathcal{A}$, па $\{f_1, f_2\}$ формира базу у смислу особине (б). Међутим, јединственост записа не важи, на пример функцију $f(x) = 1$ можемо записати као

$$f = f_1 \cdot f + f_2 \cdot f \quad \text{и} \quad f = f_1 \cdot f_1 + f_2 \cdot f_2.$$

Дефиниција 1.21. Дефинишимо следеће појмове:

(а) ортогоналан систем $\{e_i\}_{i\in I}$ модула M формира *ортогоналну Шаудерову базу* за M (над $\mathcal{A}$) ако $\{e_i\}_{i\in I}$ задовољава (б) из Дефиниције 1.20 и коефицијенти у декомпозицији (б) су јединствени за сваки вектор $x \in M$;

(б) рећи ћемо да ортогоналан систем $\{e_i\}$ модула M јесте *ортогонална стандардна Рисова*[28] *база* ако задовољава особину (а) из Дефиниције 1.20 и има додатну особину да је $\mathcal{A}$-линеарна комбинација $\sum_{j\in S} e_j a_j$, где су $a_j \in \mathcal{A}$ и $S \subset I$, једнака нули ако и само ако $e_j a_j = 0$ за свако $j \in S$.

[28]Frigyes Riesz (1880–1956) мађарски математичар

Хилбертов модул из Примера 20 нема Шаудерову базу.

Теорема 1.21. *Нека је* $\{e_i\}_{i\in I}$ *ортонормиран систем у Хилбертовом модулу* M *над јединичном* C^**-алгебром* $\mathcal{A}$*. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(а) *систем* $\{e_i\}_{i\in I}$ *је Шаудерова база;*

(б) *систем* $\{e_i\}_{i\in I}$ *је Рисова база;*

(в) *систем* $\{e_i\}_{i\in I}$ *задовољава неку од особина (а)-(в) из Дефиниције 1.20.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [39, Последица 2.11]. ■

Дефиниција 1.22. *Ортонормирана* база Хилбертовог C^*-модула M над јединичном C^*-алгебром је ортонормиран систем који задовољава особину (б).

Теорема 1.22. *Хилбертов* C^**-модул* M *над јединичном* C^**-алгебром* $\mathcal{A}$ *има ортонормирану базу ако и само ако је* M *изоморфан стандардном Хилбертовом модулу* $H_{\mathcal{A}}$*.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у раду [39]. ■

Затворени ортонормирани системи Хилбертовог модула над јединичном C^*-алгебром имају исту кардиналност. Следећи пример нам показује да постоје ортонормирани системи у стандардном Хилбертовом C^*-модулу који се не могу проширити до комплетног ортонормираног система.

Пример 21. Нека је $\mathcal{A} = L^\infty[0,1]$, $M = H_{\mathcal{A}}$ и f_1 и f_2 као у Примеру 20. Тада ортонормиран систем $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i = f_1 e_i + f_2 e_{i+1}$ није комплетан и не може се продужити до комплетног ортонормираног система.

Следећи пример нам показује да постоји комплетан ортонормиран систем у стандардном Хилбертовом C^*-модулу који није затворен, што представља једну од важних особина по којој се разликују Хилбертови C^*-модули и Хилбертови простори.

Пример 22. Нека је $\mathcal{A} = L^\infty[0,1]$, $M = H_\mathcal{A}$ и низ $c_i = 1 - \frac{1}{2^i}$, $i \in \mathbb{N}$. Посматрајмо систем $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, где је $e_i = (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, \ldots)$ конструисан на следећи начин

$$f_{ij} = \begin{cases} \chi_{[c_{i-1},c_i]}, & j = 1, i \geqslant 1; \\ \chi_{[c_i,1]}, & j = i+1, i \geqslant 1; \\ \chi_{[0,c_{i-1}]}, & j = i, i > 1; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

при чему је $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b]; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

Систем $\{e_i\}$, где је $e_i = (f_{i,1}, f_{i,2}, f_{i,3}, \ldots,)$, јесте комплетан али није затворен. Наиме, за вектор $x = (1, 0, 0, \ldots)$ ред $\sum_{i=1}^\infty \langle x, e_i\rangle \langle e_i, x\rangle = \sum_{i=1}^\infty \varphi_{[c_{i-1},c_i]}$ не конвергира у норми јер $\left\|\sum_{i=1}^m \varphi_{[c_{i-1},c_i]} - 1\right\|_{L^\infty} = 1$ за свако m.

1.3.6 Топологије на Хилбертовом W^*-модулу

Подсетимо се како се дефинишу слаба и слаба* топологија у Банаховим просторима. *Слаба* топологија* $\sigma(E^*, E)$ на дуалном простору (на скупу функционала) E^* Банаховог простора E дефинише се полунормама $p_x(f) = |f(x)|, f \in E^*, x \in E$, а *слаба топологија* $\sigma(E, E^*)$ на E се дефинише помоћу система полунорми $q_f(x) = |f(x)|, x \in E, f \in E^*$.

Дефиниција 1.23. Хилбертов модул над W^*-алгебром зваћемо Хилбертов W^*-модул.

Познато је да $B^a(M)$ јесте C^*-алгебра када је M Хилбертов C^*-модул. У случају када је M Хилбертов W^*-модул, $B^a(M)$ не мора бити W^*-алгебра. Уз додатну претпоставку да је M самодуалан, важи да је $B^a(M)$ W^*-алгебра.

Теорема 1.23. *Нека је M Хилбертов C^*-модул над алгебром $\mathcal{A}$. Тада се унутрашњи производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ може проширити на M', при чему добијамо самодуалан Хилбертов C^*-модул M'. Проширени унутрашњи производ задовољава једнакост $\langle f, \widehat{x}\rangle = f(x)$ за свако $f \in M'$ и $x \in M$, где је $\widehat{x}$ утапање елемента x у M'.*

Доказ: Доказ теореме се може наћи у књизи [44, Тврђење 3.2.1]. ■

Нека је M самодуални Хилбертов W^*-модул над W^*-алгебром $\mathcal{A}$. Пред-дуал алгебре $\mathcal{A}$ је простор нормалних функционала на $\mathcal{A}$ и тај пред-дуал означимо са $\mathcal{A}_*$. Означимо са M^o Хилбертов модул посматран као Банахов простор где је множење скаларом дефинисано са $\lambda \cdot x := \overline{\lambda} x$, $x \in M^o$.

Лема 1.6. *Нека је M самодуални Хилбертов W^*-модул. Тада је M дуал Банаховог простора $\mathcal{A}_* \otimes M^o$ са максималном нормом.*

Доказ: Доказ леме се може наћи у књизи [44, Тврђење 3.3.3]. ■

На произвољном Хилбертовом W^*-модулу M, Франк[29] [22] и Пашке [53], [54] увели су две топологије, τ_1 и τ_2. Прва од њих је генерисана функционалима $x \mapsto \varphi(\langle y, x\rangle)$, $y \in M$, φ-нормално стање, а друга помоћу полунорми $p(x) = \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2}$, φ-нормално стање. У случају када је $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ и када је M Хилбертов простор, топологија τ_2 је управо топологија индукована нормом, а топологија τ_1 се поклапа са слабом топологијом, па се ове две топологије разликују.

Теорема 1.24. *[22, Теорема 3.2] Нека је M Хилбертов W^*-модул. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(а) *модул M је самодуалан;*

(б) *јединична лопта $B_1(M)$ је комплетна у односу на топологију τ_1;*

(в) *јединична лопта $B_1(M)$ је комплетна у односу на топологију τ_2.*

Доказ: Докажимо импликацију (а)⇒(б). Претпоставимо да важи тврђење (а), а да јединична лопта $B_1(M)$ није комплетна у односу на топологију τ_1. Означимо са L линеарни омотач комплетирања лопте $B_1(M)$ у односу на топологију τ_1. За проширење полунорми од M до L употребићемо исту нотацију. На основу претпоставке, постоји елемент $r \in L \setminus M$ и ограничена мрежа $\{y_\alpha\}, \alpha \in \Lambda$ такви да за свако $\varphi \in P$ и за

[29] Michael Frank (1960–) немачки математичар

свако $\varepsilon > 0$ постоји неко $\alpha \in \Lambda$, за које је $\varphi(\langle r - y_\beta, r - y_\beta\rangle) < \varepsilon$ за свако $\beta \in \Lambda, \beta \geqslant \alpha$. За произвољно $x \in M$ имамо

$$\begin{aligned}|\varphi(\langle y_\beta, x\rangle) - \varphi(\langle y_\gamma, x\rangle)| &= |\varphi(\langle y_\beta - y_\gamma, x\rangle)|\\ &\leqslant \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2}\varphi(\langle y_\beta - y_\gamma, y_\beta - y_\gamma\rangle)^{1/2}\\ &\leqslant (2\varepsilon\varphi(\langle x, x\rangle))^{1/2}\end{aligned}$$

за свако $\beta, \gamma \geqslant \alpha$. Према томе, постоји гранична вредност (у односу на $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-топологију)

$$R(x) = \lim_\alpha \langle y_\alpha, x\rangle \in \mathcal{A}$$

у W^*-алгебри $\mathcal{A}$ за свако $x \in M$. Неједнакост

$$|\varphi(\langle y_\beta, x\rangle)| \leqslant \|x\| \sup_\alpha\{\|y_\alpha\| \mid \alpha \in \Lambda\}$$

нам даје непрекидност пресликавања $R\colon M \to \mathcal{A},\ x \mapsto R(x)$. Очигледно је да је R пресликавање на $\mathcal{A}$-модулу, па је R функционал на M. Претпоставили смо да је M самодуалан, па постоји елемент $z \in M$ такав да је $R(x) = \langle z, x\rangle$. Тада важи $\lim_\alpha \langle y_\alpha, x\rangle = \langle z, x\rangle$ (где се гранична вредност узима у $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-топологији). Одавде мрежа $\{y_\alpha\}$ конвергира ка $z \in M$ у топологији τ_1 и $r = z$. Добили смо да је $r \in M$, одакле смо добили контрадикцију.

Докажимо импликацију (б)$\Rightarrow$(а). Проширење унутрашњег производа на дуални модул M' означићемо исто са $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Лако је уочити да је идеал $\langle M, M\rangle \subset \mathcal{A}$ густ (у норми) у идеалу $\langle M', M'\rangle \subset \mathcal{A}$, одакле је $\langle M, M\rangle \subset \mathcal{A} = \langle M', M'\rangle \subset \mathcal{A}$. Посматрајмо прво случај када је W^*-алгебра $\mathcal{A}$ σ-јединична. Тада постоји тачно нормално стање $\psi \in \mathcal{A}_*$ (видети [14, Тврђење 2.5.6]), којем одговара циклична репрезентација $\{H, \pi, \xi\}$, где је вектор $\xi \in H$ цикличан и раздвајајући. Линеаран простор M са унутрашњим производом $(\cdot,\cdot) = \psi(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ постаје пред-Хилбертов простор и пресликавање $\psi(f(\cdot))\colon M \to \mathbb{C}$, где је $f \in M'$, постаје линеарни функционал на M. Можемо наћи елемент f_ψ у комплетирању простора M у односу на норму $\psi(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{1/2}$ такав да је $(f_\psi, x) = \psi(f(x))$ за свако

$x \in M$. Ово значи да постоји низ $(x_i), x_i \in M, i \in \mathbb{N}$, такав да је

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i\to\infty}(x_i - f_\psi, x_i - f_\psi) = \lim_{i\to\infty}\psi(\langle\widehat{x_i} - f, \widehat{x_i} - f\rangle) \\ &= \lim_{i\to\infty}\|(\pi(\langle\widehat{x_i} - f, \widehat{x_i} - f\rangle))^{1/2}\xi\|^2, \end{aligned}$$

где је $\widehat{x}$ ознака за слику елемента x при инклузији $M \subset M'$. С обзиром да је вектор ξ цикличан и раздвајајући, важи $\lim_i \langle\widehat{x_i} - f, \widehat{x_i} - f\rangle = 0$ у $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-топологији на $\mathcal{A}$ (видети [14, Лема 2.5.38 и Лема 2.5.39]). Према томе, $f \in M$ и модул M је самодуалан.

Докажимо сада општи случај. Ако W^*-алгебра $\mathcal{A}$ није σ-јединична, онда можемо изабрати потпун ортогоналан систем пројектора $\{p_\alpha\}, \alpha \in \Lambda, p_\alpha \in \mathcal{A}$, таквих да за сваки $\alpha \in \Lambda$, алгебра $p_\alpha\mathcal{A}p_\alpha$ је σ-јединична W^*-алгебра и важи $\lim_\alpha p_\alpha = 1$, где граничну вредност узимамо у $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$-топологији. Функционал fp_α на Хилбертовом $p_\alpha\mathcal{A}p_\alpha$-модулу $p_\alpha M$ је елемент модула $p_\alpha M$ за свако $\alpha \in \Lambda$. Тада постоји гранична вредност (у τ_1-топологији) мреже $\{fp_\alpha\}$, која припада M и једнака је f, па је тиме доказана самодуалност модула M.

Остало је да докажемо још еквиваленцију тврђења (б) и (в). Ако је $B_1(M)$ комплетан у односу на топологију τ_1, онда је M самодуалан. На основу Леме 1.6, M је дуал Банаховог простора у односу на топологију τ_2, одакле је $B_1(M)$ комплетна у односу на топологију τ_2. Претпоставимо да је јединична лопта $B_1(M)$ комплетна у односу на топологију τ_2 и $\{x_\alpha\}, \alpha \in \Lambda$ је ограничена Кошијева τ_1-мрежа. За свако $y \in M, \beta, \gamma \in \Lambda, \varphi \in P$ имамо

$$|\varphi(\langle y, x_\beta\rangle - \varphi(\langle y, x_\gamma\rangle)|^2 \leqslant \varphi(\langle y, y\rangle)\varphi(\langle x_\beta - x_\gamma, x_\beta - x_\gamma\rangle). \tag{1.3.8}$$

Нека је L линеарни омотач τ_1-комплетирања лопте $B_1(M)$. Постоји гранична вредност $\lim_\alpha x_\alpha = t \in L$ (у односу на топологију τ_1). Из неједнакости (1.3.8) следи да је $\{x_\alpha\}$ Кошијева мрежа у односу на топологију τ_2. С обзиром да је топологија τ_2 слабија од топологије τ_1, онда је $L \subseteq M$. Према томе, граничне вредности $\lim_i x_i$ у односу на топологију τ_1 и τ_2 поклапају се и једнаке су $t \in M$, одакле следи комплетност модула M у односу на топологију τ_1. ■

Стандардан Хилбертов модул $M = l^2(\mathcal{A})$ није комплетан ни у τ_1 ни у τ_2, јер $l^2(\mathcal{A})$ није самодуалан, осим у случају када је C^*-алгебра $\mathcal{A}$ коначно димензионална (видети [22]).

Глава 2

Компактност у Хилбертовим модулима

У овом поглављу увешћемо локално конвексну топологију на $l^2(\mathcal{A})$, где је за почетак $\mathcal{A}$ јединична W^*-алгебра а касније и C^*-алгебра, такву да сваки „компактан” оператор слика ограничен скуп (у топологији индукованој нормом) у тотално ограничен у уведеној топологији. У специјалном случају, када је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на Хилбертовом простору, показаћемо да је тачан и супротан смер. Наиме, доказаћемо да сваки оператор $T \in B^a(l^2(\mathcal{A}))$ који слика ограничен у тотално ограничен скуп јесте „компактан”. Према томе, у овом случају, слободно говорећи, можемо склонити знаке наводника и тиме изједначити појмове компактан и „компактан”. Резултати изложени у овом поглављу могу се наћи у радовима [32] и [40].

2.1 Компактност у стандардном Хилбертовом W^*-модулу

За дату W^*-алгебру $\mathcal{A}$ са јединицом 1 посматрајмо стандардан десни Хилбертов модул $l^2(\mathcal{A})$. У одељку 1.3.6 дефинисали смо две топологије на Хилбертовом W^*-модулу $l^2(\mathcal{A})$. Топологију τ_1 генерисану функционалима $x \mapsto \varphi(\langle y, x\rangle)$ ($y \in l^2(\mathcal{A})$, φ-нормално стање) и топологију τ_2 помоћу фамилије полунорми $p(x) = \varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2}$ (φ-нормално стање).

Нама је потребна топологија τ на $l^2(\mathcal{A})$ таква да јединична лопта у $\mathcal{A}^n$ буде компактна у односу на топологију $\tau|_{\mathcal{A}^n}$, а јединична лопта у $l^2(\mathcal{A})$ не буде тотално ограничена у односу на τ. Топологије τ_1 и τ_2 не задовољавају те особине и треба нам топологија која је између τ_1 и τ_2 топологије.

2.1.1 Топологија τ на $l^2(\mathcal{A})$

На стандардном Хилбертовом модулу $l^2(\mathcal{A})$, где је $\mathcal{A}$ јединична W^*-алгебра, дефинишемо локално конвексну топологију τ помоћу фамилије полунорми

$$p_{\varphi,y}(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^*\xi_j)|^2}, \quad x = (\xi_j) \in l^2(\mathcal{A}), \tag{2.1.1}$$

где је φ нормално стање и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ је низ елемената у $\mathcal{A}$ такав да важи

$$\sup_{j\geqslant 1} \varphi(\eta_j^*\eta_j) = 1. \tag{2.1.2}$$

Напоменимо да низ y не мора припадати простору $l^2(\mathcal{A})$.

Тврђење 2.1. *Полунорме облика (2.1.1) су добро дефинисане и важи* $\tau_1 \subset \tau \subset \tau_2$.

Доказ: С обзиром да је $(\xi, \eta) \mapsto \varphi(\eta^*\xi)$ полускаларни производ, имамо $|\varphi(\eta_j^*\xi_j)|^2 \leqslant \varphi(\xi_j^*\xi_j)\varphi(\eta_j^*\eta_j)$, па на основу (2.1.2) добијамо

$$\begin{aligned} p_{\varphi,y}^2(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^*\xi_j)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\xi_j^*\xi_j)\varphi(\eta_j^*\eta_j). \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\xi_j^*\xi_j) = \varphi(\langle x, x\rangle). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Овим смо доказали да су полунорме (2.1.1) добро дефинисане и да важи $\tau \subset \tau_2$.

Да бисмо доказали $\tau_1 \subset \tau$, фиксирајмо $y \in l^2(\mathcal{A})$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$. Низ ζ_j дат са

$$\zeta_j = \begin{cases} \eta_j / \varphi(\eta_j^* \eta_j)^{1/2}, & \varphi(\eta_j^* \eta_j) \neq 0; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

задовољава услов (2.1.2). Одавде

$$\begin{aligned} |\varphi(\langle y, x \rangle)| &= \left| \varphi \left(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^* \xi_j \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\eta_j^* \eta_j)^{1/2} \varphi(\zeta_j^* \xi_j) \right| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\eta_j^* \eta_j) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\zeta_j^* \xi_j)|^2 \right)^{1/2} = \varphi(\langle y, y \rangle)^{1/2} p_{\varphi,z}(x), \end{aligned}$$

где је $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$, чиме је доказано тврђење. ■

Напомена 2.1. Подсетимо се да се модул $\mathcal{M}$ може утопити у дуални $\mathcal{M}'$ помоћу $\mathcal{M} \ni y \mapsto \Lambda_y \in \mathcal{M}'$, $\Lambda_y(x) = \langle y, x \rangle$. Ако је ово утапање „на”, модул $\mathcal{M}$ се назива самодуалним. Познато је да $l^2(\mathcal{A})$ није самодуалан, осим када је алгебра $\mathcal{A}$ коначно димензионална. Наиме, $l^2(\mathcal{A})'$ се може описати као модул свих низова $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ таквих да је низ сума $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* \xi_j$ ограничен у норми (видети Тврђење 1.9).

Тврђење 2.2. *Јединична лопта у $l^2(\mathcal{A})$ није комплетна у односу на топологију τ. Њено комплетирање је јединична лопта у дуалном модулу $l^2(\mathcal{A})'$.*

Доказ: Прво ћемо доказати да је јединична лопта у $l^2(\mathcal{A})$ τ-густа у јединичној лопти у $l^2(\mathcal{A})'$.

Нека је $x \in l^2(\mathcal{A})'$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Низ сума $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* \xi_j$ је ограничен, па конвергира у јакој (или слабој, или ултраслабој) топологији. Због нормалности φ имамо

$$\varphi \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \xi_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\xi_j^* \xi_j),$$

одакле $\varphi \left(\sum_{j=n}^{\infty} \xi_j^* \xi_j \right) \to 0$, када $n \to \infty$.

Према томе, из неједнакости (2.1.3) имамо да $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) \to x$ у свакој полунорми облика (2.1.1).

Затим, докажимо да је јединична лопта у $l^2(\mathcal{A})'$ комплетна. Нека је $x^\alpha = (\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \ldots)$ Кошијева мрежа у јединичној лопти у $l^2(\mathcal{A})'$. Избором произвољног нормалног стања и $\eta_k = 1$, $\eta_j = 0$ за $j \neq k$, добијамо да је ξ_k^α Кошијева мрежа у слабој*-топологији у јединичној лопти алгебре $\mathcal{A}$. Одавде, мрежа ξ_k^α конвергира ка ξ_k у слабој*-топологији.

С обзиром да је множење слабо непрекидно, за свако $n \in \mathbb{N}$ и за свако η_j који задовољавају (2.1.2), имамо

$$\sum_{j=1}^{k} |\varphi(\eta_j^* \xi_j^\alpha)|^2 \to \sum_{j=1}^{k} |\varphi(\eta_j^* \xi_j)|^2.$$

Избором

$$\eta_j = \begin{cases} \xi_j / \varphi(\xi_j^* \xi_j)^{1/2}, & \varphi(\xi_j^* \xi_j) \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

добијамо

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi(\xi_j^* \xi_j) = \sum_{j=1}^{k} |\varphi(\eta_j^* \xi_j)|^2 = \lim_{\alpha} \sum_{j=1}^{k} |\varphi(\eta_j^* \xi_j^\alpha)|^2 \leqslant \|x\| \leqslant 1.$$

Узимањем граничне вредности када $k \to \infty$ добијамо да елемент $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ припада $l^2(\mathcal{A})'$. Да је x гранична вредност Кошијеве мреже x^α можемо видети када узмемо граничну вредност по β у

$$\sum_{j=1}^{k} |\varphi(\eta_j^* \xi_j^\alpha) - \varphi(\eta_j^* \xi_j^\beta)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^* \xi_j^\alpha) - \varphi(\eta_j^* \xi_j^\beta)|^2 < \varepsilon$$

и на крају узмемо граничну вредност када $k \to \infty$. ■

Даље, посматраћемо рестрикцију топологије τ на модул $\mathcal{A}^n$, којег ћемо посматрати као подмодул модула $l^2(\mathcal{A})$, односно, састоји се од оних x за који је $\xi_j = 0$ за свако $j > n$.

Тврђење 2.3. (a) *Топологија τ_1 и топологија τ се поклапају на $\mathcal{A}^n$, тј. имамо $\tau_1|_{\mathcal{A}^n} = \tau|_{\mathcal{A}^n}$.*

(б) *Утапање* $i\colon \mathcal{A}^n \to l^2(\mathcal{A})$, $i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$ *је непрекидно у односу на* $(\tau|_{\mathcal{A}^n}, \tau)$.

Доказ: (а) Доказали смо да је $\tau_1 \subset \tau$. Докажимо да важи и обратно. На произвољној полунорми облика (2.1.1) рестрикција на $\mathcal{A}^n$ има облик

$$p_{\varphi,y}(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(\eta_j^* \xi_j)|^2}. \tag{2.1.4}$$

Посматрајмо вектор $y_j = (0, \ldots, 0, \eta_j, 0, \ldots, 0)$, где је η_j на j-том месту. Тада важи

$$p_{\varphi,y}(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(\langle y_j, x\rangle)|^2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\varphi(\langle y_j, x\rangle)|,$$

одакле закључујемо да је полунорма $p_{\varphi,y}$ непрекидна у односу на τ_1.
(б) Лако се може проверити да за $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ важи

$$i^{-1}\left(\{x \in l^2(\mathcal{A}) \mid p_{\varphi,y}(x) < \varepsilon\}\right) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid p_{\varphi,(\eta_1,\ldots,\eta_n)}(\xi_1, \ldots, \xi_n) < \varepsilon\},$$

одакле је утапање непрекидно у односу на $(\tau|_{\mathcal{A}^n}, \tau)$. ■

Тврђење 2.4. *Јединична лопта у* $\mathcal{A}^n$ *је компактна у односу на топологију* $\tau|_{\mathcal{A}^n}$. *Затим, она је комплетна и тотално ограничена у* $\tau|_{\mathcal{A}^n}$.

Доказ: У случају $n = 1$, обе топологије τ и τ_1 су генерисане полунормама $\xi \mapsto |\varphi(\eta^*\xi)|$, $\eta \in \mathcal{A}$, φ-нормално стање, одакле следи да се поклапају са слабом*-топологијом на $\mathcal{A}$. Према томе, у овом случају закључак следи из Банах-Алаоглуове[1] теореме.

Да бисмо добили резултат у општем случају, посматрајмо производ топологију на $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}$. Базне околине тачке нула имају облик

$$\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid |\varphi_j(\eta_j^* \xi_j)| < \varepsilon_j, \forall j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

[1] Leonidas Alaoglu (1914–1981) амерички математичар грчког порекла

Из неједнакости

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\varphi(\eta_j^*\xi_j)| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|\varphi(\eta_j^*\xi_j)|^2} \leqslant \sqrt{n}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\varphi(\eta_j^*\xi_j)|,$$

следи да је топологија τ слабија од производ топологије. На основу тога што је производ јединичних лопти компактан у јачој, производ топологији, и на основу тога што је τ Хауздорфова, закључујемо да се τ подудара са производ топологијом на производу јединичних лопти.

Дакле, остаје да се докаже да јединична лопта B у $\mathcal{A}^n$ је затворена у производ топологији n јединичних лопти у $\mathcal{A}$, тј. да је њен комплемент отворен.

Узмимо произвољно $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathcal{A}^n$, $\|z\| > 1$. Нека је ε позитиван број мањи од $(\|z\|^2 - \|z\|)/(2\sqrt{n})$ и нека је φ нормално стање које достиже норму у $\langle z, z\rangle = \zeta_1^*\zeta_1 + \ldots + \zeta_n^*\zeta_n$ до на $\varepsilon\sqrt{n}$, то јест, $\varphi(\langle z, z\rangle) > \|z\|^2 - \varepsilon\sqrt{n}$. Посматрајмо полунорму

$$p_{\varphi,z}(x) = \sqrt{|\varphi(\zeta_1^*\xi_1)|^2 + \ldots + |\varphi(\zeta_n^*\xi_n)|^2}, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Отворен скуп

$$G = \{x \mid p_{\varphi,z}(x - z) < \varepsilon\}$$

има непразан пресек са јединичном лоптом B.

Заиста, нека је $x \in G$. Тада из Коши-Шварцове[2] неједнакости имамо

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 > p_{\varphi,z}^2(x - z) &= |\varphi(\zeta_1^*\xi_1) - \varphi(\zeta_1^*\zeta_1)|^2 + \ldots + |\varphi(\zeta_n^*\xi_n) - \varphi(\zeta_n^*\zeta_n)|^2\\ &\geqslant \frac{1}{n}|\varphi(\zeta_1^*\xi_1) + \ldots + \varphi(\zeta_n^*\xi_n) - \varphi(\zeta_1^*\zeta_1) - \ldots - \varphi(\zeta_n^*\zeta_n)|^2,\end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned}\varepsilon\sqrt{n} &> |\varphi(\zeta_1^*\xi_1 + \ldots + \zeta_n^*\xi_n) - \|z\|^2 + \varepsilon\sqrt{n}|\\ &\geqslant \|z\|^2 - \varepsilon\sqrt{n} - |\varphi(\zeta_1^*\xi_1 + \ldots + \zeta_n^*\xi_n)|,\end{aligned}$$

[2]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) немачки математичар

а одатле

$$\|z\|^2 - 2\varepsilon\sqrt{n} < |\varphi(\zeta_1^*\xi_1 + \ldots + \zeta_n^*\xi_n)| = |\varphi(\langle z, x\rangle)|. \qquad (2.1.5)$$

Међутим, $\varphi(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ је полускаларни производ и задовољава Коши-Шварцову неједнакост

$$|\varphi(\langle z, x\rangle)|^2 \leqslant \varphi(\langle z, z\rangle)\varphi(\langle x, x\rangle) \leqslant \|z\|^2 \cdot \|x\|^2. \qquad (2.1.6)$$

Из (2.1.5) и (2.1.6) добијамо

$$\|z\| \cdot \|x\| > \|z\|^2 - 2\varepsilon\sqrt{n},$$

и узимајући у обзир како смо изабрали ε, имамо

$$\|x\| > \frac{1}{\|z\|}(\|z\|^2 - 2\varepsilon\sqrt{n}) > 1.$$

Према томе, $x \notin B$. Добили смо да је B затворен скуп и тиме смо комплетирали доказ.

Због самодуалности модула $\mathcal{A}^n$, јединична лопта је и комплетна, а одавде и тотално ограничена. ■

Тврђење 2.5. *Јединична лопта у $l^2(\mathcal{A})$ није тотално ограничена у τ.*

Доказ: Нека је $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где је 1 јединица алгебре $\mathcal{A}$ која се налази на j-том месту. За произвољно нормално стање φ посматрајмо полунорму $p = p_{\varphi,(1,1,\ldots)}$ дату са $p^2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\xi_j)|^2$.

Доказаћемо да је низ e_j тотално дискретан у p. Заиста, $p^2(e_i - e_j) = |\varphi(1)|^2 + |\varphi(-1)|^2 = 2$, тј. $p(e_i - e_j) = \sqrt{2}$. Одавде, скуп $\{e_j \mid j \geqslant 1\}$ није тотално ограничен у p, па одатле није ни у τ. Исто важи и за већи скуп, јединичну лопту. ■

2.1.2 Компактан и „компактан" оператор

Рећи ћемо да је $T \in B^a(l^2(\mathcal{A}))$ *компактан* ако је слика сваког ограниченог (у норми) скупа тотално ограничен скуп у топологији τ, која је дата помоћу полунорми облика (2.1.1). За оператор $T \in B^a(l^2(\mathcal{A}))$ довољно је да слика јединичну лопту у тотално ограничен скуп да би био компактан. Овде се појам компактности оператора разликује од појма „компактности” оператора уведеног у одељку 1.3.3.

Напомена 2.2. Тотално ограничен и релативно компактан скуп се разликују у општем случају (кадгод јединична лопта није комплетна). Такође, у литератури се преплићу термини **потпуно непрекидан**, **компактан** и **преткомпактан** оператор. Иако се чини да су термини *потпуно непрекидан* и *преткомпактан* прецизнији, ми смо се одлучили за термин *компактан*, јер више одговара нашим потребама.

Пре него што докажемо да је сваки „компактан” оператор компактан, потребно је доказати неколико лема.

Лема 2.1. *За S, $T \subseteq l^2(\mathcal{A})$ и полунорму p дефинишимо*

$$d_p(S,T) = \sup_{x\in S}\inf_{y\in T} p(x-y)$$

(напоменимо да d_p не мора бити симетрична). Ако за сваку полунорму p облика (2.1.1) и за свако $\varepsilon > 0$ постоји тотално ограничен скуп $S_{p,\varepsilon}$ такав да важи

$$d_p(S, S_{p,\varepsilon}) < \varepsilon, \tag{2.1.7}$$

онда је S такође тотално ограничен.

Доказ: Означимо

$$B_p(x;\varepsilon) = \{y \in l^2(\mathcal{A}) \mid p(x-y) < \varepsilon\}.$$

Услов (2.1.7) нам даје

$$S \subseteq \bigcup_{x\in S_{p,\varepsilon/2}} B_p(x;\varepsilon/2), \tag{2.1.8}$$

за свако $\varepsilon > 0$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Скуп $S_{p,\varepsilon/2}$ је тотално ограничен у p и одавде постоји коначан скуп $\{c_1, \ldots, c_m\}$ такав да унија лопти $B_p(c_j; \varepsilon/2)$ покрива $S_{p,\varepsilon/2}$. На основу (2.1.8), унија лопти $B_p(c_j; \varepsilon)$ покрива S. ■

Лема 2.2. *Нека је $T_\alpha\colon l^2(\mathcal{A}) \to l^2(\mathcal{A})$ мрежа компактних оператора таква да је $T_\alpha x \to Tx$ у τ униформно у односу на $\|x\| < 1$. Тада је и T компактан.*

Доказ: За свако $\varepsilon > 0$ и за сваку полунорму p облика (2.1.1) постоји α такав важи $\sup_{\|x\|<1} p(Tx - T_\alpha x) < \varepsilon$. Према томе, важи

$$d_p(T(B_{\|\cdot\|}(0;1)), T_\alpha(B_{\|\cdot\|}(0;1))) \leqslant \varepsilon$$

и закључак следи из претходне леме. ■

Последица 2.1. *Нека је скуп $S \subseteq l^2(\mathcal{A})$ такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји тотално ограничен (у τ) скуп S_ε за којег важи*

$$d(S, S_\varepsilon) = \sup_{x\in S} \inf_{y\in S_\varepsilon} \|x - y\| < \varepsilon. \tag{2.1.9}$$

Тада је S такође тотално ограничен у τ.

Затим, ако је $T_n\colon l^2(\mathcal{A}) \to l^2(\mathcal{A})$ низ компактних оператора који у операторској норми конвергирају ка T, онда је и T компактан оператор.

Доказ: Оба закључка следе из чињенице да је τ слабија од топологије индуковане нормом. ■

За оператор T на $l^2(\mathcal{A})$ и за $u \in \mathcal{A}$, означимо са Tu оператор $Tu(x) = T(x)u$.

Лема 2.3. *Нека су T_1 и T_2 компактни оператори и нека су $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$. Тада је $T_1u_1 + T_2u_2$ компактан.*

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Из компактности оператора T_1 и T_2 постоји коначна $\varepsilon/(2\|u_1\|)$-мрежа за $T_1(B_{\|\cdot\|}(0;1))$ (означимо је са $c_1, c_2, \ldots, c_n$), и коначна $\varepsilon/(2\|u_2\|)$-мрежа за $T_2(B_{\|\cdot\|}(0;1))$ (означимо је са $d_1, \ldots, d_m$). Онда је скуп $\{c_iu_1 + d_ju_2 \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ коначна ε-мрежа за $(T_1u_1 + T_2u_2)(B_{\|\cdot\|}(0;1))$. Заиста, ако $x \in B_{\|\cdot\|}(0;1)$, онда постоје

i и j такви важи $\|T_1x - c_i\| < \varepsilon/(2\|u_1\|)$ и $\|T_2x - d_j\| < \varepsilon/(2\|u_2\|)$. Одавде

$$\|(T_1xu_1 + T_2xu_2) - (c_iu_1 + d_ju_2)\| \leqslant \|T_1x - c_i\| \cdot \|u_1\| + \|T_2x - d_j\| \cdot \|u_2\| < \varepsilon.$$

Доказали смо да за произвољно $\varepsilon > 0$ скуп $(T_1u_1 + T_2u_2)(B_{\|\cdot\|}(0;1))$ има коначну ε-мрежу, односно $T_1u_1 + T_2u_2$ је компактан оператор. ■

Теорема 2.1. *Нека је $T\colon l^2(\mathcal{A}) \to l^2(\mathcal{A})$ „компактан" оператор. Тада је T компактан.*

Доказ: Имајући у виду Лему 2.2 и Лему 2.3, довољно је доказати да су оператори облика $x \mapsto \Theta_{y,z}(x) = y\langle z, x\rangle$ компактни.

У специјалном случају, када је $z = e_j\zeta$, $\zeta \in \mathcal{A}$, следи непосредно из Тврђења 2.4. Заиста, онда је слика $\Theta_{y,e_j\zeta}(B_{\|\cdot\|}(0;1))$ садржана у лопти полупречника $\|y\| \cdot \|\zeta\|$ у $\mathcal{A}^1$ која је тотално ограничена.

У општем случају, нека је $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$. Онда је $z = \sum_{j=1}^{\infty} e_j\zeta_j$, при чему ред конвергира у норми. Због $\|\Theta_{y,z} - \Theta_{y,z'}\| \leqslant \|y\| \cdot \|z - z'\|$, важи

$$\Theta_{y,z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \Theta_{y,e_j\zeta_j}$$

и доказ следи на основу специјалног случаја Леме 2.2 и Леме 2.3. ■

Напомена 2.3. У случају када је $\mathcal{A}$ C^*-алгебра а није W^*-алгебра, не можемо применити Тврђење 2.4, јер се оно заснива на чињеници да $\mathcal{A}$ има пред-дуал. Штавише, дефиниција топологије τ постаје неприкладна јер се користи нормално стање. Наравно, ми можемо заменити нормално стање општим стањем, али у том случају стања (које не морају бити нормална) припадају дуалу, а не пред-дуалу, па не генеришу слаба*-топологију на полазној алгебри, одакле као резултат немамо однос компактности. Наредно потпоглавље посвећено је овом проблему.

Обратно важи у специјалном случају када је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра свих ограничених линерних оператора на Хилбертовом простору H. Пре него што докажемо такав резултат потребна нам је једна техничка лема.

Лема 2.4. *Нека је $\mathcal{A} = B(H)$ и нека су $a_j \in \mathcal{A}$, $j \geqslant 1$ позитивни елементи за које важи $\|a_j\| > \delta$. Тада постоји нормално стање φ и унитарни елементи $u_j, v_j \in \mathcal{A}$ такви да важи $|\varphi(v_j^* a_j u_j)| > \delta$. Штавише, можемо изабрати φ тако да буде векторско стање и можемо изабрати $u_j = v_j$.*

Доказ: Нека је $\psi \in H$ јединични вектор и нека је φ одговарајуће векторско стање, тј. $\varphi(a) = \langle a\psi, \psi\rangle$. За свако a_j, узмемо јединични вектор h_j такав да је $\langle a_j h_j, h_j\rangle > \delta$. Познато је да постоје унитарни елементи u_j такви да је $u_j\psi = h_j$. Према томе, имамо $\varphi(u_j^* a_j u_j) = \left\langle u_j^* a_j u_j \psi, \psi\right\rangle = \langle a_j h_j, h_j\rangle > \delta$. ■

Теорема 2.2. *Нека је $\mathcal{A} = B(H)$ и нека је $T\colon l^2(\mathcal{A}) \to l^2(\mathcal{A})$ компактан. Тада је T „компактан”.*

Доказ: Означимо са P_k пројекцију на првих k координата, то јест $P_k(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots)$. Очигледно је да су P_k „компактни”.

Претпоставимо да T није „компактан”. Тада је

$$\delta = \inf_{n\geqslant 1} \|(I - P_k)T\| > 0.$$

Заиста, у супротном или постоји неко k такво да је $(I-P_k)T = 0$ и одавде $T = P_k T$ је „компактан”, или постоји позитиван низ целих бројева k_n такав да је $\|T - P_{k_n}T\| \to 0$, одакле би, на основу Тврђења 1.5, T био „компактан”.

Без умањења општости, претпоставићемо да је $\|T\| = 1$. Тада је $\delta \leqslant 1$.

Дефинишимо низ пројектора $Q_n \in \{P_1, P_2, \ldots\}$ и низ вектора x_n, y_n и $z_n \in l^2(\mathcal{A})$ на следећи начин. Нека је $Q_0 = 0$ и нека је Q_{n-1} дефинисан. Тада постоји $x_n \in l^2(\mathcal{A})$ такво да важи

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{и} \quad \|(I - Q_{n-1})Tx_n\| > \delta/2.$$

Означимо $y_n = Tx_n$. Онда, због $\|I - Q_{n-1}\| = 1$, важи

$$\|y_n\| \geqslant \|(I - Q_{n-1})y_n\| > \frac{\delta}{2}.$$

На основу граничне вредности $\lim_{k\to\infty}\|(I-P_k)(I-Q_{n-1})y_n\|=0$, постоји растући низ природних бројева k_n, таквих да важи

$$\|(I-P_{k_n})(I-Q_{n-1})y_n\| < \delta^2/8 \leqslant \delta/8.$$

Дефинишимо $Q_n = P_{k_n}$ и

$$z_n = Q_n(I-Q_{n-1})y_n. \tag{2.1.10}$$

Навешћемо неке особине низова y_n и z_n. Прво, на основу дефиниције оператора Q_n, важе следеће неједнакости

$$\|(I-Q_n)(I-Q_{n-1})y_n\| < \frac{\delta^2}{8} \leqslant \frac{\delta}{8}, \tag{2.1.11}$$

$$\|z_n\| \leqslant \|y_n\| \leqslant \|T\|\cdot\|x_n\| = 1, \tag{2.1.12}$$

$$\|z_n\| \geqslant \|(I-Q_{n-1})y_n\| - \|(I-Q_n)(I-Q_{n-1})y_n\| > \frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{8}=\frac{3\delta}{8}. \tag{2.1.13}$$

Друго, важи

$$\langle z_n, y_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle\,. \tag{2.1.14}$$

Наиме, због $z_n = Q_n(I-Q_{n-1})y_n$ и због тога што су Q_n и $I-Q_n$ пројектори, имамо

$$\begin{aligned}\langle z_n, y_n\rangle &= \langle Q_n(I-Q_{n-1})y_n, y_n\rangle \\ &= \langle Q_n(I-Q_{n-1})y_n, (I-Q_{n-1})Q_n y_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle\,.\end{aligned}$$

Треће, за $m>n$ важи

$$\|\,\langle z_m, y_n\rangle\,\| < \frac{\delta^2}{8}. \tag{2.1.15}$$

Заиста, за такво m и n имамо $Q_{n-1}\leqslant Q_n \leqslant Q_{m-1}$, то јест, $I-Q_{m-1}\leqslant I-Q_n \leqslant I-Q_{n-1}$, одакле је

$$I-Q_{m-1} = (I-Q_{m-1})(I-Q_n)(I-Q_{n-1}),$$

па важи

$$\begin{aligned}\langle z_m, y_n\rangle &= \langle (I-Q_{m-1})z_m, y_n\rangle\\ &= \langle (I-Q_{m-1})(I-Q_n)(I-Q_{n-1})z_m, y_n\rangle\\ &= \langle z_m, (I-Q_{m-1})(I-Q_n)(I-Q_{n-1})y_n\rangle\\ &= \langle z_m, (I-Q_n)(I-Q_{n-1})y_n\rangle .\end{aligned}$$

Према томе, из (2.1.12) и (2.1.13) следи

$$\| \langle z_m, y_n\rangle \| \leqslant \|z_m\| \cdot \|(I-Q_n)(I-Q_{n-1})y_n\| \leqslant \frac{\delta^2}{8}.$$

Конструишимо полунорму p која је непрекидна у τ и тотално дискретан низ у $T(\overline{B_{\|\cdot\|}(0;1)})$. На основу (2.1.13) важи

$$\|z_n\|^2 = \|\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \nu_n\| > (3\delta/8)^2,$$

па према Леми 2.4 можемо изабрати φ и $\upsilon_j, \nu_j \in \mathcal{A}$, такве да важи

$$\varphi(\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \nu_n) > \frac{9\delta^2}{64}. \tag{2.1.16}$$

Посматрајмо полунорму p дефинисану на следећи начин

$$p(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\langle z_j \upsilon_j, x\rangle)|^2}.$$

Због (2.1.10) постоји низ $\zeta_j \in \mathcal{A}$ такав да је

$$z_k = (0, \ldots, 0, \zeta_{k_{n-1}+1}, \ldots, \zeta_{k_n}, 0, \ldots).$$

Нека је $\omega_n = \zeta_n \upsilon_n / \varphi(\upsilon_n^* \zeta_n^* \zeta_n \upsilon_n)^{1/2}$. За такве ω_n важи

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_n^* \omega_n) &= \varphi\left(\frac{\upsilon_n^* \zeta_n^*}{\varphi(\upsilon_n^* \zeta_n^* \zeta_n \upsilon_n)^{1/2}} \cdot \frac{\zeta_n \upsilon_n}{\varphi(\upsilon_n^* \zeta_n^* \zeta_n \upsilon_n)^{1/2}}\right)\\ &= \varphi\left(\upsilon_n^* \zeta_n^* \zeta_n \upsilon_n / \varphi(\upsilon_n^* \zeta_n^* \zeta_n \upsilon_n)\right) = 1.\end{aligned}$$

За $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ важи

$$\begin{aligned}
|\varphi(\langle z_n \upsilon_n, x\rangle)|^2 &= \left| \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} \varphi(\upsilon_n^* \zeta_j^* \zeta_j \upsilon_n)^{1/2} \varphi(\omega_j^* \xi_j) \right|^2 \\
&\leqslant \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} \varphi(\upsilon_n \zeta_j^* \zeta_j \upsilon_n) \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} |\varphi(\omega_j^* \xi_j)|^2 \\
&= \varphi(\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \upsilon_n) \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} |\varphi(\omega_j^* \xi_j)|^2.
\end{aligned}$$

Узевши у обзир (2.1.12) добијамо

$$\varphi(\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \upsilon_n) \leqslant \|\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \upsilon_n\| = \|z_n\|^2 \leqslant 1$$

и одавде

$$p^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\langle z_n, x\rangle)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\omega_j^* \xi_j)|^2 = p^2_{\varphi,(\omega_1,\dots,\omega_n,\dots)}(x).$$

Према томе, закључујемо да је полунорма p добро дефинисана и да је непрекидна у односу на τ.

Такође, $\|x_n \nu_n\| = \|x_n\|$, то јест, $y_n \nu_n = T x_n \nu_n \in T(\overline{B(0;1)})$. На крају ћемо доказати да је $y_n \nu_n$ тотално дискретан низ. Заиста, за $m > n$ имамо

$$\begin{aligned}
p(y_m \nu_m - y_n \nu_n) &\geqslant |\varphi(\langle z_m \upsilon_m, y_m \nu_m - y_n \nu_n\rangle)| \\
&\geqslant |\varphi(\upsilon_m^* \langle z_m, y_m\rangle \nu_m)| - |\varphi(\upsilon_m^* \langle z_m, y_n\rangle \nu_n)|.
\end{aligned}$$

Међутим, из (2.1.14) и (2.1.16) следи

$$|\varphi(\upsilon_m \langle z_m, z_m\rangle \nu_m)| > \frac{9\delta^2}{64},$$

а из (2.1.15) следи

$$|\varphi(\upsilon_m^* \langle z_m, y_n\rangle \nu_n)| \leqslant \| \langle z_m, y_n\rangle \| < \frac{\delta^2}{8}.$$

Према томе,

$$p(y_m\nu_m - y_n\nu_n) > \frac{9\delta^2}{64} - \frac{\delta^2}{8} = \frac{\delta^2}{64}.$$

Дакле, уз претпоставку да T није „компактан” оператор, нашли смо тотално дискретан низ $y_n\nu_n \in T(\overline{B(0;1)})$, одакле $T(\overline{B(0;1)})$ није тотално ограничен, па T није компактан. Добили смо контрадикцију, што значи да је претпоставка нетачна и да је T „компактан”. ■

2.1.3 Пример и коментар

Доказ Теореме 2.2 зависи од Леме 2.4, па Теорема 2.2 важи за све јединичне W^*-алгебре које задовољавају претходну лему. Тренутно нам није познат опис оваквих алгебри, али напоменућемо да Лема 2.4 не важи за бесконачно димензионалне комутативне W^*-алгебре.

Пример 23. У било којој бесконачно димензионалној комутативној W^*-алгебри $\mathcal{A}$, постоји низ p_j нетривијалних међусобно ортогоналних пројектора. Низ $\sum_{j=1}^{n} p_j$ је растући, одакле је $p = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \in \mathcal{A}$. Према томе, за произвољно нормално стање φ ред $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(p_j)$ је конвергентан, а с обзиром да је алгебра комутативна, за све унитарне елементе υ_j, ν_j имамо

$$|\varphi(\upsilon_j p_j \nu_j)| = |\varphi(p_j \upsilon_j \nu_j)| \leqslant \varphi(p_j)^{1/2} \varphi(\nu_j^* \upsilon_j^* \upsilon_j \nu_j)^{1/2} \to 0.$$

Дакле, Лема 2.4 не важи за бесконачно димензионалне комутативне W^*-алгебре.

Штавише, можемо искористити претходно изабрани низ пројектора да конструишемо оператор који је компактан, а није „компактан”. Нека је $T\colon l^2(\mathcal{A}) \to l^2(\mathcal{A})$ оператор дефинисан са

$$Tx = T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (p_1\xi_1, p_2\xi_2, \ldots). \tag{2.1.17}$$

Оператор T није „компактан”. Заиста, претпоставимо да је „компактан”, онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји оператор $S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Theta_{y_j, z_j}$ такав да важи $\|T - S\| < \varepsilon/3$. Нека је $P_k(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots)$. На основу граничне вредности $P_k z_j - z_j \to 0$, када $k \to \infty$ за свако $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, имамо $\|P_k S - S\| \to 0$, па постоји довољно велико k такво да важи $\|P_k S - S\| < \varepsilon/3$ и важи $\|T - P_k T\| \leqslant \|T - S\| + \|S - P_k S\| + \|P_k(S - T)\| < \varepsilon$. Међутим, важи и $\|T - P_k T\| \geqslant \|Te_{k+1} - P_k T e_{k+1}\| = \|p_{k+1}\| = 1$, где је $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ са јединичним елементом на k-том месту. Тиме смо дошли до контрадикције.

С друге стране, за произвољну полунорму облика (2.1.1) имамо да $p((T - P_k T)x)$ конвергира ка нули равномерно у односу на $x \in B_{\|\cdot\|}(0, 1)$. Наиме, $\mathcal{A}$ је комутативна, па је $\xi_j^* \xi_j \eta_j^* \eta_j \leqslant \|\xi_j\|^2 \eta_j^* \eta_j$, а због $\|x\| < 1$ и (2.1.2) важи $\varphi(\xi_j^* \xi_j \eta_j^* \eta_j) \leqslant \|\xi_j\|^2 \sup_j \varphi(\eta_j^* \eta_j) \leqslant 1$. Према томе, имамо

$$p^2((T - P_k T)x) = \sum_{j=k+1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^* p_j \xi_j)|^2 \leqslant \sum_{j>k} \varphi(p_j) \varphi(\xi_j^* \xi_j \eta_j^* \eta_j) \leqslant \sum_{j>k} \varphi(p_j) \to 0.$$

Одавде, T је компактан на основу Леме 2.2.

Напомена 2.4. Топологија τ, коју смо дефинисали у овом раду, зависи од координата, па је неприкладна за Хилбертове модуле различите од $l^2(\mathcal{A})$. Желимо да дефинишемо топологију помоћу полунорми

$$p_{\varphi, z_j}(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\langle z_j, x \rangle)|^2}, \tag{2.1.18}$$

где је φ нормално стање, а z_j је ортогоналан низ у $H_{\mathcal{A}}$ који задовољава $\sup_{j \geqslant 1} \varphi(\langle z_j, z_j \rangle) = 1$. Ове полунорме су уопштење оних датих са (2.1.1). Заиста, полунорма (2.1.18) постаје (2.1.1) избором $z_j = e_j \eta_j$.

Међутим, таква нова топологија у случају $l^2(\mathcal{A})$ је већа од τ, чак и ако претпоставимо да су z_j ортонормирани. Наиме, ако је $\mathcal{A} = B(H)$, где је H бесконачно димензионалан, онда постоји Кунцов[3] низ, односно, низ изометрија v_j које задовољавају $v_j^* v_j = 1$ и $\sum_{j=1}^{\infty} v_j v_j^* = 1$. Низ $x_j = (v_j, 0, 0, \dots)$ је ортонормиран, али у полунорми p_{φ, x_j} облика (2.1.18) низ x_j је тотално дискретан.

[3]Joachim Cuntz (1948–) немачки математичар

2.2 Компактност у стандардном Хилбертовом C^*-модулу

У претходном потпоглављу доказали смо да на Хилбертовом модулу $H_{\mathcal{A}}$, при чему је $\mathcal{A}$ јединична W^*-алгебра, постоји локално конвексна топологија таква да је сваки „компактан” оператор компактан.

У овом потпоглављу конструисаћемо топологију на Хилбертовом модулу $H_{\mathcal{A}}$ над јединичном C^*-алгебром и топологију на $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ (раширење модула $H_{\mathcal{A}}$ помоћу алгебре $\mathcal{A}^{**}$) такве да сваки „компактан” оператор, (то јест сваки оператор који припада затворењу у норми линеарног омотача оператора облика $z \mapsto x\langle y, z\rangle$, $x, y \in H_{\mathcal{A}}$ (или $x, y \in H_{\mathcal{A}}^{\#}$)) слика ограничене скупове у тотално ограничене скупове.

Нека су $\mathcal{A}$ произвољна C^*-алгебра, A^{**} њена W^* овојница и M Хилбертов $\mathcal{A}$-модул. Посматрајмо алгебарски тензорски производ $M \otimes \mathcal{A}^{**}$ (над $\mathbb{C}$). Овај тензорски производ се може снабдети структуром десног $\mathcal{A}^{**}$-модула помоћу следеће формуле $(x \otimes a) \cdot b := x \otimes ab$, $x \in M$, a, $b \in \mathcal{A}^{**}$. Дефинишимо унутрашњи производ

$$[\cdot,\cdot]\colon M \otimes \mathcal{A}^{**} \times M \otimes \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{A}^{**}$$

помоћу формуле

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i, \sum_{j=1}^{m} y_j \otimes b_j\right] = \sum_{i,j} a_i^* \langle x_i, y_j\rangle\, b_j,$$

где x_i, $y_j \in M$, $a_i, b_j \in \mathcal{A}^{**}$. Сесквилинеарност и особине $[z, w]^* = [w, z]$ и $[z, w \cdot a] = [z, w]a$ такође важе.

Нека је $\mathcal{A}$ нека C^*-алгебра. Означимо са $M_n(\mathcal{A})$ скуп свих $n \times n$ матрица $a = [a_{i,j}]$, $a_{i,j} \in \mathcal{A}$. Добијамо инволутивну алгебру у којој важи

$$(\lambda a + \mu b)_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j},$$

$$(ab)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j},$$

$$(a^*)_{i,j} = a^*_{j,i},$$

за $a = [a_{i,j}]$, $b = [b_{i,j}] \in \mathcal{A}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Нека је (π, H) верна репрезентација алгебре $\mathcal{A}$ и H_n n-димензионални Хилбертов простор са ортонормираном базом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Дефинишимо репрезентацију $(\widetilde{\pi}, \widetilde{H})$ алгебре $M_n(\mathcal{A})$ на следећи начин

$$\widetilde{H} = H \otimes H_n,$$

$$\widetilde{\pi}(a)(\varepsilon \otimes e_j) = \sum_{i=1}^{n} \pi(a_{i,j})\varepsilon \otimes e_i, \quad a = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{A}),\ \varepsilon \in H,\ e_j \in H_n.$$

Лако је проверити да је $\widetilde{\pi}$ верна репрезентација и да на $\widetilde{H} = H \otimes H_n$ важи $\widetilde{\pi}(M_n(\mathcal{A})) = \pi(\mathcal{A}) \otimes B(H_n)$. Дефинишимо $U_i\varepsilon = \varepsilon \otimes e_i$, $\varepsilon \in H$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Важи $\pi(a_{i,j}) = U_i^*\widetilde{\pi}(a)U_j$ за свако $a = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{A})$, одакле је

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \|\pi(a_{i,j})\| \leqslant \|\widetilde{\pi}(a)\| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|\pi(a_{i,j})\|.$$

Према томе, $\widetilde{\pi}(M_n(\mathcal{A}))$ је затворен у норми у $B(\widetilde{H})$, при чему је $M_n(\mathcal{A})$ C^*-алгебра са нормом $\|a\| = \|\widetilde{\pi}(a)\|$, $a \in M_n(\mathcal{A})$. С обзиром да је свака верна репрезентација C^*-алгебре изометрија, норма у $M_n(\mathcal{A})$ не зависи од избора верне репрезентације π алгебре $\mathcal{A}$.

Следеће две леме и теорема посвећене су неким познатим резултатима из ове области.

Лема 2.5. *[65, Лема 3.1]. Елемент алгебре $M_n(\mathcal{A})$ је позитиван ако и само ако је једнак збиру матрица облика $[a_i^*a_j]$, где је $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.*

Доказ: Ако је матрица $c = [a_i^*a_j] \in M_n(\mathcal{A})$, онда је $c = a^*a$ за матрицу $a = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{A})$, $a_{1,j} = a_j, 1 \leqslant i \leqslant n$ и $a_{i,j} = 0, 2 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$ и важи $c \geqslant 0$.

Ако је матрица $a = [a_{i,j}]$ позитиван елемент алгебре $M_n(\mathcal{A})$, онда постоји елемент $b = [b_{i,j}] \in M_n(\mathcal{A})$ такав да је $a = b^*b$. Одавде имамо

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b^*_{k,i}b_{k,j}.$$

Стављајући $c_k = [b_{k,i}^* b_{k,j}] \in M_n(\mathcal{A})$, имамо $a = \sum_{k=1}^n c_k$. ■

Лема 2.6. *[65, Лема 3.2] Матрица $a = [a_{i,j}] \in M_n(A)$ је позитивна ако и само ако је $\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_{i,j} x_j \geqslant 0$ за свако $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}$.*

Доказ: Претпоставимо да је $a \geqslant 0$. Користећи Лему 2.5 можемо претпоставити $a_{i,j} = a_i^* a_j$ за неке $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$. Имамо

$$\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_{i,j} x_j = \sum_{i,j=1}^n x_i^* a_i^* a_j x_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^* \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right) \geqslant 0.$$

Докажимо други смер. Претпоставимо да је $\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_{i,j} x_j \geqslant 0$ за свако $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$. Нека је (π, H, ε_0) произвољна циклична репрезентација алгебре $\mathcal{A}$. За сваки вектор $\varepsilon = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \otimes e_j \in \widetilde{H} = H \otimes H_n$ имамо

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\pi}(a)\varepsilon, \varepsilon \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle \pi(a)(\varepsilon_j \otimes e_j), \varepsilon_i \otimes e_i \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \langle \pi(a_{k,j})\varepsilon_j \otimes e_k, \varepsilon_i \otimes e_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \pi(a_{i,j})\varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle .\end{aligned}$$

С обзиром да је $\varepsilon_0 \in H$ цикличан вектор за репрезентацију (π, H), скуп свих вектора облика $\pi(a)\varepsilon_0$, $a \in \mathcal{A}$ је густ у H, одакле постоје низови $\{x_i^m \mid m = 1, 2, \dots\}$ у $\mathcal{A}$ такви да је $\varepsilon_i = \lim_{m\to\infty} \pi(x_i^m)\varepsilon_0$. Добијамо

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\pi}(a)\varepsilon, \varepsilon \rangle &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \pi(a_{i,j})\pi(x_j^m)\varepsilon_0, \pi(x_i^m)\varepsilon_0 \right\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \left\langle \pi\left(\sum_{i,j=1}^n (x_i^m)^* a_{i,j} x_j^m\right)\varepsilon_0, \varepsilon_0 \right\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

Одавде $\widetilde{\pi}(a)$ је позитиван за било коју цикличну репрезентацију π. На основу $\left(\sum_\alpha^\otimes \pi_\alpha\right)^\sim = \sum_\alpha^\otimes \widetilde{\pi}_\alpha$ и на основу особине да је свака недегенерисана репрезентација неке C^*-алгебре директна сума цикличних репрезентација, имамо да је $\widetilde{\pi}(a)$ позитиван за било коју репрезентацију π. Одавде је $a \geqslant 0$. ■

С обзиром да за свако $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ важи

$$\sum_{i,j} a_i^* \langle x_i, x_j \rangle a_j = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_i, \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_i \right\rangle \geqslant 0,$$

матрица $[\langle x_i, x_j \rangle] \in M_n(\mathcal{A})$ је позитивна. Према томе, за било које $b_i \in \mathcal{A}^{**}$, елемент $\sum_{i,j} b_i^* \langle x_i, x_j \rangle b_j$ је позитиван, па је $[z, z] \geqslant 0$ за било које $z \in M \otimes \mathcal{A}^{**}$. Нека је $N = \{z \in M \otimes \mathcal{A}^{**} \mid [z, z] = 0\}$. Тада је N $\mathcal{A}^{**}$-подмодул у $M \otimes \mathcal{A}^{**}$ и количнички модул $M \otimes \mathcal{A}^{**}/N$ је пред-Хилбертов $\mathcal{A}^{**}$-модул. Означимо са $M^{\#}$ комплетирање модула $M \otimes \mathcal{A}^{**}/N$ у односу на норму дату помоћу унутрашњег производа $[\cdot, \cdot]$. То је један Хилбертов $\mathcal{A}^{**}$-модул. Овај модул ћемо звати *раширење* модула M помоћу алгебре $\mathcal{A}^{**}$. W^*-алгебра $\mathcal{A}^{**}$ садржи јединични елемент и за свако $x \in M$, $a \in \mathcal{A}$ имамо $(x \cdot a) \otimes 1 - x \otimes a \in N$. Према томе, $\mathcal{A}$-модуларно пресликавање $i \colon M \to M^{\#}$, $i(x) = x \otimes 1 + N$ је добро дефинисано. Због једнакости $[x \otimes 1 + N, y \otimes 1 + N] = \langle x, y \rangle$, пресликавање је изометричка инклузија.

Означимо са $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}^{**})$ скуп свих ограничених $\mathcal{A}$-линеарних пресликавања из модула M у $\mathcal{A}^{**}$. На овом скупу пресликавања можемо увести структуру векторског простора над $\mathbb{C}$ помоћу формуле $(\lambda\phi)(x) = \overline{\lambda}\phi(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in M$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}^{**})$ и можемо увести структуру десног $\mathcal{A}^{**}$-модула помоћу формуле $(\phi \cdot b)(x) = b^*\phi(x)$, $b \in \mathcal{A}^{**}$. За ограничен $\mathcal{A}$-линеаран функционал $f \in (M^{\#})'$, можемо дефинисати пресликавање $f_R \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}^{**})$ као рестрикцију пресликавања f „на” M, $f_R(x) = f(x \otimes 1 + N)$. Очигледно, $\|f_R\| \leqslant \|f\|$.

Теорема 2.3. *[53, Поглавље 4] За било коју C^*-алгебру $\mathcal{A}$ и за било који Хилбертов $\mathcal{A}$-модул M, пресликавање $f \mapsto f_R$ је изометрија из $(M^{\#})'$ „на” $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}^{**})$.*

Доказ: Нека матрица $[c_{i,j}] \in M_n(\mathcal{A}^{**})$, за свако $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, задовољава неједнакост $\sum_{i,j=1}^n a_i^* c_{i,j} a_j \geqslant 0$. За почетак докажимо позитивност матрице $[c_{i,j}]$, односно,

$$\sum_{i,j} b_i^* c_{i,j} b_j \geqslant 0 \tag{2.2.1}$$

за свако $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathcal{A}^{**}$. Без умањења општости можемо претпоставити да су елементи b_i у јединичној лопти $B_1(\mathcal{A}^{**})$ W^*-алгебре $\mathcal{A}^{**}$. Јединична лопта $B_1(\mathcal{A})$ C^*-алгебре $\mathcal{A}$ је густа у $B_1(\mathcal{A}^{**})$ у односу на јаку* топологију, одакле можемо наћи мреже $a_{i,\lambda} \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \Lambda$ које конвергирају ка елементима $b_i \in \mathcal{A}^{**}$ у односу на јаку* топологију. Тада мрежа $\sum_{i,j} a_{i,\lambda}^* c_{i,j} a_{j,\lambda}$ конвергира ка $\sum_{i,j} b_i^* c_{i,j} b_j$ у односу на слабу топологију, одакле неједнакост (2.2.1) важи.

Даље, докажимо да било које пресликавање $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}^{**})$, при чему је $\|\phi\| \leqslant 1$, можемо продужити до јединственог функционала $f \in \left(M^{\#}\right)'$ за којег важи $\|f\| \leqslant 1$. Посматрајмо функционал

$$f_0 \colon M \otimes \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{A}^{**}$$

задат формулом

$$f_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) a_i.$$

Очигледно је да је f_0 пресликавање између $\mathcal{A}^{**}$-модула. За $a_i \in \mathcal{A}$, имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} a_i^* \phi(x_i)^* \phi(x_j) a_j &= \sum_{i,j} \phi(x_i \cdot a_i)^* \phi(x_j \cdot a_j) \\
&= \left(\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i\right)\right)^* \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i\right) \\
&\leqslant \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i \right\rangle = \sum_{i,j} a_i^* \left\langle x_i, x_j \right\rangle a_j.
\end{aligned}$$

Према томе, за било које $b_i \in \mathcal{A}^{**}$ важи следећа неједнакост

$$\sum_{i,j} b_i^* \phi(x_i)^* \phi(x_j) b_j \leqslant \sum_{i,j} b_i^* \left\langle x_i, x_j \right\rangle b_j,$$

то јест

$$f_0(z)^* f_0(z) \leqslant [z, z]$$

за свако $z \in M \otimes \mathcal{A}^{**}$.

Дакле, функционал $f\colon M^{\#} \to \mathcal{A}^{**}$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i + N\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)a_i,$$

јесте добро дефинисан формулом и задовољава неједнакост

$$f(y)^* f(y) \leqslant [y, y]$$

за свако $y \in M^{\#}$, где је $\|f\| \leqslant 1$. Добили смо $f \in \left(M^{\#}\right)'$. Из једнакости $f(x \otimes 1 + N) = \phi(x)$ следи да је $f_R = \phi$, а одатле и $\|f_R\| = \|f\|$. С обзиром да смо произвољно $\|\phi\| \leqslant 1$ продужили до јединственог функционала $f \in \left(M^{\#}\right)'$ за којег важи $\|f\| \leqslant 1$, имамо $\|f\| \leqslant \|\phi\|$. Према томе, $\|f\| \leqslant \|f_R\|$. Користећи познату неједнакост $\|f\| \leqslant \|f_R\|$, доказали смо да је пресликавање $f \mapsto f_R$ изометрија и „на". ■

Напомена 2.5. У доказу претходне теореме користили смо чињеницу да је јединична лопта $B_1(\mathcal{A})$ C^*-алгебре $\mathcal{A}$ густа у $B_1(\mathcal{A}^{**})$ у односу на јаку* топологију. То следи на основу Капланскове теореме (видети [49, Теорема 4.3.3]). Наиме, имамо да је скуп самоадјунгованих елемената лопте $B_1(\mathcal{A})$ јако густ у скупу самоадјунгованих елемената лопте $B_1(\mathcal{A}^{**})$, а одатле следи и јако* густ јер су елементи самоадјунговани. Нека је $a \in B_1(\mathcal{A}^{**})$ и $a = v|a|$ његово поларно разлагање. За произвољно $\varepsilon > 0$ и векторе $x_1, x_2, \dots, x_n$ постоји самоадјунгован елемент $c \in B_1(\mathcal{A})$ такав да је $\|(|a| - c)x_j\| < \varepsilon$. Ако узмемо $b = vc$, имамо да је $\|(a - b)x_j\| < \varepsilon$ и $\|(a^* - b^*)x_j\| < \varepsilon$. Други начин да се докаже да је $B_1(\mathcal{A})$ јако* густа у $B_1(\mathcal{A}^{**})$ јесте помоћу Теореме [62, Теорема 1.9.1], коришћењем Мекијеве топологије.

Последица 2.2. *Нека је M Хилбертов C^*-модул, над произвољном C^*-алгебром $\mathcal{A}$. Тада се $\mathcal{A}$-вредносни унутрашњи производ на M може продужити до $\mathcal{A}^{**}$-вредносног унутрашњег производа на скуп пресликавања* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{A}^{**})$*, који га чини самодуалним Хилбертовим $\mathcal{A}^{**}$-модулом.*

Последица 2.3. *Нека је M самодуални Хилбертов C^*-модул, над C^*-алгебром $\mathcal{A}$. Тада је Хилбертов $\mathcal{A}^{**}$-модул $M^{\#}$ такође самодуалан.*

У наставку, сматрамо да је C^*-алгебра јединична.

Дефиниција 2.1. Нека је M Хилбертов C^*-модул. Тополошки простор (M,τ) је *„непрекидан"* ако је сваки „компактан" оператор компактан, односно, слика јединичну лопту у норми из M у тотално ограничен скуп у (M,τ). Хилбертов C^*-модул M је *„непрекидан"* ако постоји топологија τ на M таква да је (M,τ) „непрекидан".

Бесконачно димензионална C^*-алгебра $\mathcal{A}$, као Хилбертов C^*-модул над самом собом са топологијом индукованом нормом, није „непрекидна", зато што је идентички оператор $\Theta_{e,e}$ ($\Theta_{e,e}(x) = e\langle e,x\rangle = x$) „компактан", али слика јединичне лопте није тотално ограничена у Банаховом смислу. Стандардан Хилбертов W^*-модул $H_{\mathcal{A}}$ је „непрекидан" на основу Теореме 2.1.

Лема 2.7. *Нека је $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ „компактан" оператор. Тада постоји „компактан" оператор $T^{\#} \in B^a(H_{\mathcal{A}}^{\#})$, такав да је дијаграм*

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{A}}^{\#} & \xrightarrow{T^{\#}} & H_{\mathcal{A}}^{\#} \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ H_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{T} & H_{\mathcal{A}} \end{array}$$

комутативан.

Доказ: За почетак узмимо да је „компактан" оператор управо оператор коначног ранга, односно $T = \Theta_{x,y}$ за $x,y \in H_{\mathcal{A}}$. Дефинишимо оператор $\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}$ на $H_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}^{**}/N$ са

$$\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(z\otimes b+N) = (x\otimes 1+N)[y\otimes 1+N, z\otimes b+N] \qquad (2.2.2)$$

и његово продужење на $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ као

$$\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(z) = \lim_{n\to\infty} \Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(z_n),$$

за $z \in H_{\mathcal{A}}^{\#}$ где је $H_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}^{**}/N \ni z_n \to z \in H_{\mathcal{A}}^{\#}$. Овај оператор је

„компактан” на $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ и важи

$$\begin{aligned}\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(i(z)) = \Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}&(z\otimes 1+N)\\ &= (x\otimes 1+N)[y\otimes 1+N, z\otimes 1+N] = (x\otimes 1+N)\langle y,z\rangle\\ &= x\langle y,z\rangle\otimes 1+N = i(x\langle y,z\rangle) = i(\Theta_{x,y}(z))\end{aligned}$$

за свако $z\in H_{\mathcal{A}}$. Према томе, за $z\in H_{\mathcal{A}}^{\#}$ имамо

$$\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(i(z)) = i(\Theta_{x,y}(z)).$$

Даље,

$$\begin{aligned}\|\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}\| &= \sup_{\substack{z\in H_{\mathcal{A}}^{\#}\\ \|z\|\leqslant 1}}\|\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(z)\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{z_n\in H_{\mathcal{A}},b_n\in\mathcal{A}^{**}\\ \|z_n\otimes b_n+N\|\leqslant 1}}\|(x\otimes 1+N)[y\otimes 1+N, z_n\otimes b_n+N]\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{z_n\in H_{\mathcal{A}},b_n\in\mathcal{A}^{**}\\ \|z_n\otimes b_n+N\|\leqslant 1}}\|(x\otimes 1+N)\langle y,z_n\rangle b_n\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{z_n\in H_{\mathcal{A}},b_n\in\mathcal{A}^{**}\\ \|z_n\otimes b_n+N\|\leqslant 1}}\|x\langle y,z_n\rangle\otimes b_n+N\|.\end{aligned}$$

С обзиром да је

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{z_n\in H_{\mathcal{A}},b_n\in\mathcal{A}^{**}\\ \|z_n\otimes b_n+N\|\leqslant 1}}\|x\langle y,z_n\rangle\otimes b_n+N\| = \lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{z_n\in H_{\mathcal{A}},\|z_n\|\leqslant 1\\ b_n\in\mathcal{A}^{**},\|b_n\|\leqslant 1}}\|x\langle y,z_n\rangle\|\cdot\|b_n\|,$$

имамо

$$\begin{aligned}\|\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}\| &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{z_n\in H_{\mathcal{A}},\|z_n\|\leqslant 1\\ b_n\in\mathcal{A}^{**},\|b_n\|\leqslant 1}}\|x\langle y,z_n\rangle\|\cdot\|b_n\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{z_n\in H_{\mathcal{A}},\|z_n\|\leqslant 1}\|x\langle y,z_n\rangle\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{z_n\in H_{\mathcal{A}},\|z_n\|\leqslant 1}\|\Theta_{x,y}(z_n)\| = \|\Theta_{x,y}\|.\end{aligned}$$

За збир n оператора облика (2.2.2) важи

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\Theta_{x_1\otimes 1+N,y_1\otimes 1+N}+\Theta_{x_2\otimes 1+N,y_2\otimes 1+N}+\ldots+\Theta_{x_n\otimes 1+N,y_n\otimes 1+N}\right)(z\otimes b+N)\right\|\\
=\ &\left\|(x_1\langle y_1,z\rangle+x_2\langle y_2,z\rangle+\ldots+x_n\langle y_n,z\rangle)\otimes b+N)\right\|\\
=\ &\left\|x_1\langle y_1,z\rangle+x_2\langle y_2,z\rangle+\ldots+x_n\langle y_n,z\rangle\right\|\cdot\|b\|\\
=\ &\left\|\left(\Theta_{x_1,y_1}+\Theta_{x_2,y_2}+\ldots+\Theta_{x_n,y_n}\right)(z)\right\|\cdot\|b\|.
\end{aligned}$$

Када узмемо супремум по $z\otimes b+N\in H_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{A}^{**}/N$, добијамо

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i\otimes 1+N,y_i\otimes 1+N}\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i,y_i}\right\|$$

на $H_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{A}^{**}/N$. С обзиром да су ови ограничени линеарни оператори непрекидни и да имају исту норму на густом скупу $H_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{A}^{**}/N$ скупа $H_{\mathcal{A}}^{\#}$, онда имају исту норму и на $H_{\mathcal{A}}^{\#}$, односно

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i\otimes 1+N,y_i\otimes 1+N}\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i,y_i}\right\|. \tag{2.2.3}$$

Ако је $T_n=\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i,y_i}$, онда је $T_n^{\#}=\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i\oplus 1+N,y_i\oplus+N}$, па због (2.2.3) имамо

$$\|T_n^{\#}\|=\|T_n\|$$

и

$$\|T_n^{\#}-T_m^{\#}\|=\|T_n-T_m\|. \tag{2.2.4}$$

У случају да је T произвољан „компактан" оператор, постоји низ оператора $T_n=\sum_{i=1}^{n}\Theta_{x_i,y_i}$, који конвергира у норми ка оператору T. Одавде, низ (T_n) је Кошијев, па на основу једнакости 2.2.4 и низ оператора $(T_n^{\#})$ Кошијев. Из комплетности простора $B^a(H_{\mathcal{A}}^{\#})$, имамо да низ оператора $(T_n^{\#})$ конвергира ка „компактном" оператору $T^{\#}$. Из чињенице

$$\Theta_{x\otimes 1+N,y\otimes 1+N}(i(z))=i\left(\Theta_{x,y}(z)\right)\text{ за свако } z\in H_{\mathcal{A}}^{\#}$$

и да низ оператора $T_n^{\#}=\sum\limits_{i=1}^{n}\Theta_{x_i\oplus 1+N,y_i\oplus 1+N}$ конвергира ка $T^{\#}$, имамо да је $T^{\#}(i(z)) = i(T^{\#}(z))$, што нам даје комутативност дијаграма. ■

Лема 2.8. *Нека је $T^{\#} \in B^a(H_{\mathcal{A}}^{\#})$ „компактан" оператор и нека је j пресликавање дефинисано као $j\colon H_{\mathcal{A}}^{\#} \to H_{\mathcal{A}^{**}}, j(x \otimes a + N) = (x_1 a, x_2 a, \ldots)$ за $x = (x_1, x_2, \ldots) \in H_{\mathcal{A}}, a \in \mathcal{A}^{**}$. Тада постоји „компактан" оператор $T_{**} \in B^a(H_{\mathcal{A}^{**}})$, такав да је дијаграм*

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{A}^{**}} & \xrightarrow{T_{**}} & H_{\mathcal{A}^{**}} \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & {\scriptstyle j}\uparrow \\ H_{\mathcal{A}}^{\#} & \xrightarrow{T^{\#}} & H_{\mathcal{A}}^{\#} \end{array}$$

комутативан.

Доказ: За почетак доказаћемо да пресликавање $j\colon H_{\mathcal{A}}^{\#} \to H_{\mathcal{A}^{**}}, j(x \otimes a + N) = (x_1 a, x_2 a, \ldots)$, где је $x = (x_1, x_2, \ldots) \in H_{\mathcal{A}}$, $a \in \mathcal{A}^{**}$, изометрички изоморфизам. Пресликавање j је добро дефинисано и инјективно јер важи

$$\begin{aligned}
[x \otimes a - y \otimes b, x \otimes a - y \otimes b] &= a^* \langle x, x\rangle a - a^* \langle x, y\rangle b - b^* \langle y, x\rangle a + b^* \langle y, y\rangle b \\
&= a^* \langle x, x\rangle a - a^* \langle x, y\rangle b - b^* \langle y, x\rangle a + b^* \langle y, y\rangle b \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (x_i a)^* x_i a - \sum_{n=1}^{\infty} (x_i a)^* y_i b - \sum_{n=1}^{\infty} (y_i b)^* x_i a + \sum_{n=1}^{\infty} (y_i b)^* y_i b \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (x_i a - y_i b)^* (x_i a - y_i b).
\end{aligned}$$

С обзиром да је $\mathcal{A}$ јединична алгебра, постоје базни вектори $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. За произвољно $x = (x_1, x_2, \ldots) \in H_{\mathcal{A}^{**}}$ важи $j(\sum_{i=1}^{\infty} e_i \otimes x_i) = x$, одакле следи да је пресликавање j сурјективно.

Из једнакости унутрашњих производа

$$\begin{aligned}
[x \otimes a + N, y \otimes b + N] = a^* \langle x, y\rangle b = a^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_i^* y_i \right) b = \sum_{n=1}^{\infty} (x_i a)^* y_i b \\
= \langle j(x \otimes a + N), j(y \otimes b + N) \rangle,
\end{aligned}$$

добијамо да је j изометрички изоморфизам.

Према томе, за произвољан „компактан" оператор $T^{\#}$ из $B^a(H_{\mathcal{A}}^{\#})$, постоји „компактан" оператор $T_{**} \in B^a(H_{\mathcal{A}^{**}})$ такав да је $T_{**} = j \circ T^{\#} \circ j^{-1}$ (за $T^{\#} = \Theta_{x\otimes a, y\otimes b}$ имамо $T_{**} = \Theta_{xa,yb}$). ■

Теорема 2.4. *Стандардан Хилбертов C^*-модул $H_{\mathcal{A}}$ и Хилбертов W^*-модул $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ јесу „непрекидни".*

Доказ: Нека је T „компактан" на $H_{\mathcal{A}}$. Тада постоје „компактни" оператори $T^{\#} \in B^a(H_{\mathcal{A}}^{\#})$ и $T_{**} \in B^a(H_{\mathcal{A}^{**}})$, такви да је дијаграм

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{A}^{**}} & \xrightarrow{T_{**}} & H_{\mathcal{A}^{**}} \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & {\scriptstyle j}\uparrow \\ H_{\mathcal{A}}^{\#} & \xrightarrow{T^{\#}} & H_{\mathcal{A}}^{\#} \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & {\scriptstyle i}\uparrow \\ H_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{T} & H_{\mathcal{A}} \end{array}$$

комутативан.

Нека је $H_{\mathcal{A}^{**}}$ Хилбертов $\mathcal{A}^{**}$-модул, где је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра. Дефинишимо локално конвексну топологију τ_{**} на $H_{\mathcal{A}^{**}}$ (облика (2.1.1)) помоћу фамилије полунорми

$$p_{\varphi,y}(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^* \xi_j)|^2}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots), \tag{2.2.5}$$

где је φ ограничен линеаран функционал на $\mathcal{A}$ (нормално стање на $\mathcal{A}^{**}$ је ограничен линеаран функционал на $\mathcal{A}$) и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ низ елемената у $\mathcal{A}^{**}$, такав да је

$$\sup_{j\geqslant 1} \varphi(\eta_j^* \eta_j) = 1. \tag{2.2.6}$$

Дефинишимо топологију $\tau^{\#}$ као топологију индуковану на модулу $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ помоћу τ_{**}, то јест, $A \in \tau^{\#}$ ако $i(A) \in \tau_{**}$ и дефинишимо топологију τ као топологију индуковану на модулу $H_{\mathcal{A}}$ помоћу τ_{**}, односно, $\tau = (i^{-1} \circ j^{-1})(\tau_{**})$.

На основу Теореме 2.1, из „компактности" оператора T_{**}, следи његова компактност, па је $T_{**}(B)$ тотално ограничен. С обзиром да је

$j(B_1) \subset B$ и $(j \circ i)(B_2) \subset B$, где су B_1 и B_2 јединичне лопте у $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ и $H_{\mathcal{A}}$, редом, скупови $T_{**}(j(B_1)) = j(T^{\#}(B_1))$ и $T_{**}((j \circ i)(B_2)) = (j \circ i)(T(B))$ су тотално ограничени у $(H_{\mathcal{A}^{**}}, \tau^{**})$. Одавде, $T^{\#}(B_1)$ је тотално ограничен у $(H_{\mathcal{A}}^{\#}, j^{-1}(\tau_{**})) = (H_{\mathcal{A}}^{\#}, \tau^{\#})$ и $T(B)$ је тотално ограничен у $(H_{\mathcal{A}}, i^{-1} \circ j^{-1}(\tau_{**})) = (H_{\mathcal{A}}, \tau)$. Тиме смо доказали да су Хилбертови модули $H_{\mathcal{A}}$ и $H_{\mathcal{A}}^{\#}$ „непрекидни". ■

Глава 3

Мере „некомпактности” на стандардном Хилбертовом W^*-модулу

У првом поглављу навели смо неке познате мере некомпактности на метричким и униформним просторима и показали смо њихове особине. Да бисмо дефинисали мере некомпактности на стандардном Хилбертовом C^*-модулу $l^2(\mathcal{A})$, морамо се прво одлучити коју некомпактност у $l^2(\mathcal{A})$ желимо да меримо. С обзиром да се и овде термин компактност разликује од класичног термина у Банаховим просторима, користићемо наводнике. Резултати изложени у овом поглављу могу се наћи у раду [33].

3.1 Мера „некомпактности” λ

На датој јединичној W^*-алгебри $\mathcal{A}$ посматраћемо стандардан Хилбертов модул $l^2(\mathcal{A})$.

За почетак докажимо две леме које ће нам бити од користи у даљем раду.

Лема 3.1. *Нека је* $z_1 \perp z_2, z_1, z_2 \in H_{\mathcal{A}}$. *Тада је* $\|z_1 + z_2\| \geqslant \|z_1\|$.

Доказ: Имамо

$$\langle z_1 + z_2, z_1 + z_2 \rangle = \langle z_1, z_1 \rangle + \langle z_2, z_2 \rangle \geqslant \langle z_1, z_1 \rangle .$$

Према томе,

$$\|z_1 + z_2\|^2 = \| \langle z_1 + z_2, z_1 + z_2 \rangle \| \geqslant \| \langle z_1, z_1 \rangle \| = \|z_1\|^2.$$

■

Лема 3.2. *Нека је M пројективан коначно генерисан подмодул модула $H_{\mathcal{A}}$ и нека је $x \in H_{\mathcal{A}}$ произвољан елемент. Тада је*

$$d(x, M) = \|x - P_M x\|,$$

где је P_M ортогоналан пројектор на M са језгром $M^{\perp}$.

Доказ: На основу Теореме 1.13 M је ортогонално допуњив, $H_{\mathcal{A}} = M \oplus M^{\perp}$ и постоји $P_M \colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}$ такав да је $P_M^2 = P_M^* = P_M$, слика пројектора P_M је M и језгро од P_M је $M^{\perp}$. Нека је $y \in M$ произвољан. На основу Леме 3.1 и на основу $x - P_M x \in M^{\perp}$ и $P_M x - y \in M$, следи да је

$$\|x - y\| = \|(x - P_M x) + (P_M x - y)\| \geqslant \|x - P_M x\|.$$

■

Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих ограничених подскупова скупа $H_{\mathcal{A}}$. Дефинишимо функцију $d \colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ са

$$d(E, F) = \sup_{x \in E} d(x, F) = \sup_{x \in E} \inf_{y \in F} \|x - y\|, \quad E, F \in \mathcal{P}.$$

Функција d није симетрична, односно не мора важити једнакост $d(E, F) = d(F, E)$ за произвољне подскупове $E, F \subset H_{\mathcal{A}}$.

Подсетимо се да смо дефинисали $\mathcal{A}$-*„преткомпактан”* скуп као ограничен скуп E такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји слободан коначно генерисан модул $M \cong \mathcal{A}^n$ такав да је $d(E, M) < \varepsilon$.

Овај појам можемо уопштити на следећи начин.

Дефиниција 3.1. Нека је $E \subseteq H_{\mathcal{A}}$ скуп ограничен у норми. Мера „некомпактности” скупа E, у ознаци $\lambda(E)$, јесте највеће доње ограничење свих $\eta > 0$ за које постоји слободан коначно генерисан модул $M \leqslant H_{\mathcal{A}}$ такав да је $d(E, M) < \eta$.

Тврђење 3.1. *Нека је $E \subset H_{\mathcal{A}}$. Мера „некомпактности” $\lambda(E)$ може се рачунати на следећи начин:*

(a) $\lambda(E) = \inf_{M \in \mathcal{F}} \sup_{x \in E} d(x, M)$*, где је $\mathcal{F}$ скуп свих слободних коначно генерисаних модула;*

(б) $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \|x - P_n x\| = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{x\in E} \|x - P_n x\|$*, где је* $P_n \colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}$*,* $P_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

Доказ: Тврђење (*a*) је очигледно. Докажимо тврђење (б). Низ оператора $I - P_n$ је опадајући у поретку C^*-алгебре $B^a(M)$. Одавде је $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \|x - P_n x\| = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{x\in E} \|x - P_n x\|$. С обзиром да је $P_n H_{\mathcal{A}}$ слободан коначно генерисан модул, имамо

$$\lambda(E) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \sup_{x\in E} \|x - P_n x\|.$$

Докажимо супротну неједнакост. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји слободан коначно генерисан модул M такав да је $d(x, M) < \lambda(E) + \varepsilon$. Означимо пројектор на M са Q. На основу Тврђења 1.5 важи $\|Q - P_n Q\| \to 0$ када $n \to \infty$. Из $P_n Qx \in P_n(H_{\mathcal{A}})$ и Леме 3.2 следи

$$\begin{aligned}\|x - P_n x\| =& d(x, P_n(H_{\mathcal{A}})) \leqslant \|x - P_n Qx\| \\ \leqslant& \|x - Qx\| + \|Qx - P_n Qx\| \leqslant \lambda(E) + \varepsilon + K\|Q - P_n Q\|,\end{aligned}$$

где је $\|x\| \leqslant K$ за свако $x \in E$ (E је ограничен). Према томе,

$$\sup_{x\in E} \|x - P_n x\| \leqslant \lambda(E) + \varepsilon + K\|Q - P_n Q\|,$$

а када $n \to \infty$ имамо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \|x - P_n x\| \leqslant \lambda(E) + \varepsilon,$$

чиме је завршен доказ. ■

Тврђење 3.2. *Нека је λ мера „некомпактности” и $E, F \subset H_{\mathcal{A}}$.*

(а) *Ако је $E \subseteq F$, онда је $\lambda(E) \leqslant \lambda(F)$.*

(б) $\lambda(E \cap F) \leqslant \min\{\lambda(E), \lambda(F)\}$.

(в) $\lambda(E \cup F) \leqslant \max\{\lambda(E), \lambda(F)\}$.

(г) $\lambda(E + F) \leqslant \lambda(E) + \lambda(F)$.

(д) *Важи $\lambda(Ea) \leqslant \lambda(E)\|a\|$, где је $a \in \mathcal{A}$. Додатно, ако је елемент a инвертибилан, онда је $\|a^{-1}\|^{-1}\lambda(E) \leqslant \lambda(Ea)$. Специјално, ако је a унитаран, тада је $\lambda(Ea) = \lambda(E)$.*

(ђ) $\lambda(\operatorname{co} E) = \lambda(E)$, *где је* $\operatorname{co} E = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid 0 \leqslant t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, x_i \in E\}$ *конвесни омотач скупа E.*

(е) *За произвољан позитиван број c важи $\lambda(cE) = c\lambda(E)$.*

Доказ: Особина (а) је очигледна, а особина (б) следи из (а).

(в) Нека је $d = \max\{\lambda(E), \lambda(F)\}$. Онда за свако $x \in E \cup F$ и за свако $\varepsilon > 0$ постоји довољно велико n такво да важи $\|x - P_n x\| \leqslant d + \varepsilon$. Одавде је $\lambda(E \cup F) \leqslant \max\{\lambda(E), \lambda(F)\}$, чиме смо доказали особину (в).

(г) Нека је $z \in E + F$. Тада је $z = x + y$ за неко $x \in E$ и $y \in F$, па је

$$\|z - P_n z\| \leqslant \|x - P_n x\| + \|y - P_n y\| \leqslant \lambda(E) + \varepsilon + \lambda(F) + \varepsilon,$$

за довољно велико n. Према томе, важи особина (г).

(д) Било које $z \in Ea$ је облика $z = ya$ за неко $y \in E$. Према томе, $\|z - P_n z\| \leqslant \|y - P_n y\| \cdot \|a\|$ и неједнакост следи узимањем лимеса. Ако a има инверз a^{-1}, онда је $E = (Ea)a^{-1}$ и помоћу претходног $\lambda(E) \leqslant \lambda(Ea)\|a\|^{-1}$. Доказали смо особину (д).

(ђ) Нека је $x \in \operatorname{co} E$. Тада је $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ за неке $x_i \in E$ и позитивне t_i, за које је $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Важи

$$\|x - P_n x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - P_n x_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i \|x_i - P_n x_i\| \leqslant \sup_{x \in E} \|x - P_n x\|.$$

Према томе, $\sup_{x\in \operatorname{co} E}\|x-P_nx\| \leqslant \sup_{x\in E}\|x-P_nx\|$.

На основу Тврђења 3.1 следи неједнакост

$$\sup_{x\in E}\|x-P_nx\| \leqslant \sup_{x\in \operatorname{co} E}\|x-P_nx\|,$$

чиме смо доказали особину (ђ).

(е) На основу Тврђења 3.1 и једнакости

$$\sup_{x\in cE}\|x-P_nx\| = c\sup_{x\in E}\|x-P_nx\|$$

за сваки позитиван број c, важи $\lambda(cE)=c\lambda(E)$. ■

Тврђење 3.3. *Нека је B јединична лопта у $H_{\mathcal{A}}$. Тада је $\lambda(B)=1$.*

Доказ: Сваки подмодул садржи 0. Одавде је $\lambda(B)\leqslant 1$. Нека је $0<\delta<1$ и нека је M неки слободан коначно генерисан подмодул модула $H_{\mathcal{A}}$. Постоји нетривијалан $y\in M^{\perp}$. Тада је $\delta\|y\|^{-1}y\in B\cap M^{\perp}$ и имамо

$$d(B,M)\geqslant d(\delta\|y\|^{-1}y,M).$$

С обзиром да је $\delta\|y\|^{-1}y\perp M$, за свако $x\in M$ важи

$$\|\delta\|y\|^{-1}y-x\|^2=\delta^2+\|x\|^2\geqslant\delta^2.$$

Одавде је $d(B,M)\geqslant\delta$, па је $\lambda(B)\geqslant\delta$. Доказали смо да је $\lambda(B)=1$. ■

Последица 3.1. *Ако за неке скупове $E,F\subset H_{\mathcal{A}}$ важи инклузија $E\subseteq F+\delta B$, онда је $\lambda(E)\leqslant\lambda(F)+\delta$.*

Доказ: Непосредно следи из Тврђења 3.2-(г) и Тврђења 3.3. ■

Тврђење 3.4. *Мера „некомпактности” λ има следеће особине:*

(а) $|\lambda(E)-\lambda(F)|\leqslant d_H(E,F)=\max\{d(E,F),d(F,E)\}$ *за произвољне скупове $E,F\subset H_{\mathcal{A}}$ (d_H је тзв. Хауздорфово растојање);*

(б) $\lambda(E)=\lambda(\overline{E})$, *где је $\overline{E}$ затворење скупа $E\subset H_{\mathcal{A}}$ у норми;*

(в) $\lambda(E) = 0$ *акко* $E \subset H_{\mathcal{A}}$ *је* A-*„преткомпактан”;*

(г) $\lambda(E) \leqslant \sup_{x\in E} \|x\|$ *за произвољан скуп* $E \subset H_{\mathcal{A}}$.

Доказ: (а) Нека је $d = d_H(E, F)$. Тада је $E \subseteq F + dB$ и на основу Последице 3.1 имамо

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(F) + d, \qquad \text{односно, } \lambda(E) - \lambda(F) \leqslant d.$$

Слично, из $F \subseteq E + dB$ следи $\lambda(F) - \lambda(E) \leqslant d$.

(б) С обзиром да је $d_H(E, \overline{E}) = 0$, можемо применити претходан део тврђења и добијамо $\lambda(E) = \lambda(\overline{E})$.

(в) Следи директно из дефиниције.

(г) Тврђење следи директно из $E \subseteq (\sup_{x\in E} \|x\|) \cdot B$. ■

Пример 24. У особини (д) Тврђења 3.2 може важити строга неједнакост. Заиста, нека алгебра $\mathcal{A}$ садржи нетривијалан пројектор p и $\mathcal{A}(1-p)$ је изоморфна са $\mathcal{A}$. (На пример $\mathcal{A} = L^{\infty}(0,1)$ и $p = \chi_{[0,1/2]}$.) Нека је

$$E = \left\{ (a_1 p + b_1(1-p), a_2 p + b_2(1-p), \ldots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* a_n \leqslant 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* b_n \leqslant 4 \right\}$$

и нека је $a = p$. Онда је $\|p\| = 1$ и $\lambda(E) \geqslant 2$ јер E садржи лопту полупречника 2 у $H_{\mathcal{A}}$ (када $a_j = 0$). Са друге стране, Ep је садржан у јединичној лопти у $H_{\mathcal{A}}$, па је $\lambda(Ep) \leqslant 1$.

Можемо дефинисати меру некомпактности λ_o оператора $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$.

Дефиниција 3.2. Нека је $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ оператор који допушта адјунговање. *Меру некомпактности* λ_o оператора T рачунамо као

$$\lambda_o(T) = \lambda(T(B)),$$

где је B јединична лопта у $H_{\mathcal{A}}$.

Тврђење 3.5. *Функција* λ_o *има следеће особине:*

(а) λ_o *је субадитивна, односно,*

$$\lambda_o(T_1 + T_2) \leqslant \lambda_o(T_1) + \lambda_o(T_2);$$

(б) λ_o *је позитивно хомогена, односно,*

$$\lambda_o(cT) = c\lambda_o(T),$$

за свако $c > 0$ *и за свако* $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$*;*

(в) $\lambda_o(T) \leqslant \|T\|$, *за свако* $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$.

Доказ: (а) На основу Тврђења 3.2-(г) имамо

$$\begin{aligned}\lambda_o(T_1 + T_2) &= \lambda((T_1 + T_2)(B)) \leqslant \lambda(T_1(B) + T_2(B)) \\ &\leqslant \lambda(T_1(B)) + \lambda(T_2(B)) = \lambda_o(T_1) + \lambda_o(T_2).\end{aligned}$$

(б) Применом Тврђења 3.2-(е) добијамо

$$\lambda_o(cT) = \lambda((cT)(B)) = \lambda(cT(B)) = c\lambda(T(B)) = c\lambda_o(T).$$

(в) Из инклузије $T(B) \subset \|T\|B$ и претходног дела под (б) имамо

$$\lambda_o(T) = \lambda(T(B)) \leqslant \lambda(\|T\|B) = \|T\|\lambda(B) = \|T\|.$$

Последња једнакост следи на основу Тврђења 3.3. ■

3.2 Мере „некомпактности” Куратовског, Истрцескуа и Хауздорфа

У одељку 2.1.1 конструисали смо локално конвексну топологију τ на $l^2(\mathcal{A})$ такву да ако је $T \in B^a(l^2(\mathcal{A}))$ „компактан” онда је слика јединичне лопте тотално ограничен скуп у односу на топологију τ. Ова топологија је дефинисана помоћу фамилије полунорми $p_{\varphi,y}$

$$p_{\varphi,y}(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^* \xi_j)|^2}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2(\mathcal{A}), \tag{3.2.1}$$

где је $\varphi \in \mathcal{A}_*$ нормално стање а $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ низ елемената у $\mathcal{A}$ такав да је

$$\sup_{j \geqslant 1} \varphi(\eta_j^* \eta_j) = 1. \tag{3.2.2}$$

Такође, у специјалном случају када је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H, доказали смо да важи и други смер, то јест, било који оператор $T \in B^a(l^2(\mathcal{A}))$ чија је слика јединичне лопте тотално ограничен скуп у односу на топологију τ мора бити „компактан”.

Стандардан Хилбертов модул $l^2(\mathcal{A})$, у односу на топологију τ, јесте локално конвексан и тиме униформан. Подсетимо се Теореме 1.9, где смо показали да су мере Куратовског, Хауздорфа и Истрцескуа мере некомпактности на униформним просторима. Када применимо то на наш случај, када је простор $(l^2(\mathcal{A}), \tau)$, имамо следеће мере „некомпактности” Куратовског, Хауздорфа и Истрцескуа (скупови Υ и A су дефинисани у Дефиницији 1.9),

$$\alpha, \chi, I \colon \Upsilon \to A,$$

$$[\alpha(E)](p_{\varphi,y}) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i,\ p_{\varphi,y}(x' - x'') < \varepsilon,\ \forall x', x'' \in S_i \right\},$$

$$[\chi(E)](p_{\varphi,y}) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{p_{\varphi,y}}(x_i, \varepsilon), x_i \in l^2(\mathcal{A}) \right\},$$

где је $B_{p_{\varphi,y}}(x_i, \varepsilon) = \{y \mid p_{\varphi,y}(y - x_i) < \varepsilon\}$, и

$$[I(E)](p_{\varphi,y}) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \text{(постоји бесконачан скуп } S \subset E)\ (\forall x', x'' \in S)\ p_{\varphi,y}(x' - x'') \geqslant \varepsilon\}.$$

Функције α, χ и I зависе од полунорме $p_{\varphi,y}$ и можемо их посматрати као функције две промењиве у односу на ограничен скуп E и у односу на полунорму $p_{\varphi,y}$. Ако желимо да мере „некомпактности” не зависе од полунорме, можемо посматрати функције $\chi^*,\ \alpha^*,\ I^* \colon \Upsilon \to [0, +\infty)$

дефинисане са

$$\begin{aligned}\chi^*(E) &= \sup_{p_{\varphi,y}\in P}[\chi(E)](p_{\varphi,y}),\\ \alpha^*(E) &= \sup_{p_{\varphi,y}\in P}[\alpha(E)](p_{\varphi,y}),\\ I^*(E) &= \sup_{p_{\varphi,y}\in P}[I(E)](p_{\varphi,y})\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

за сваки $E \in \Upsilon$, где је P скуп свих полунорми облика (3.2.1). Ово су мере некомпактности у смислу Дефиниције 1.10 (видети Теорему 1.11). У сваком униформном простору који је дефинисан помоћу система полунорми, за сваки ограничен скуп E, важи (видети Теорему 1.10-(ж))

$$\chi(E) \leqslant I(E) \leqslant \alpha(E) \leqslant 2\chi(E). \tag{3.2.4}$$

Одавде имамо

$$\chi^*(E) \leqslant I^*(E) \leqslant \alpha^*(E) \leqslant 2\chi^*(E). \tag{3.2.5}$$

С обзиром да смо упоредили мере „некомпактности” χ^*, I^* и α^*, поставља се логично питање да ли се може и мера „некомпактности” λ упоредити са њима.

Тврђење 3.6. *За сваки ограничен скуп $E \subseteq l^2(\mathcal{A})$, имамо*

$$\chi^*(E) \leqslant \lambda(E).$$

Доказ: Нека је E ограничен скуп и нека са P_n означимо пројекцију на првих n координата у $l^2(\mathcal{A})$, односно,

$$P_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots).$$

Из $E \subseteq P_nE + (I - P_n)E$ и из субадитивности мере χ^*, имамо

$$\chi^*(E) \leqslant \chi^*(P_nE) + \chi^*((I - P_n)E).$$

Међутим, на основу Тврђења 2.3, скуп P_nE је тотално ограничен, па је

$\chi^*(P_n E) = 0$. Одавде

$$\chi^*(E) \leqslant \chi^*((I - P_n)E) \leqslant \sup_{x \in E} \|(I - P_n)x\|,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. На основу Тврђења 3.1-(б) имамо $\chi^*(E) \leqslant \lambda(E)$. ∎

Претходно тврђење нам даје доњу границу за λ. Пре него што нађемо горње ограничење, дефинишимо уравнотежене скупове.

Дефиниција 3.3. Нека је $E \subset l^2(\mathcal{A})$ ограничен скуп.

(а) Рећи ћемо да је E $\mathcal{A}$-*уравнотежен* ако $x \cdot u \in E$ кадгод $x \in E$ и $u \in \mathcal{A}$ је унитаран.

(б) За $\mathcal{A}$-*уравнотежен омотач* скупа E узимамо минимални уравнотежен скуп који садржи E, односно, $\bigcup Eu$, где се унија узима по свим унитарним елементима $u \in \mathcal{A}$.

Напомена 3.1. Дефиниција 3.3 је мотивисана појмом уравнотеженог скупа у тополошком векторском простору над пољем $\mathbb{C}$. Наиме, за подскуп E тополошког векторског простора X над пољем $\mathbb{C}$ кажемо да је уравнотежен ако $\lambda E \subset E$ за сваки комплексан број λ за који важи $|\lambda| = 1$.

У Тврђењу 3.2-(д) доказали смо $\lambda(Eu) = \lambda(E)$. Даћемо два уопштења овог тврђења, где се прво односи на појам уравнотеженог скупа.

Тврђење 3.7. *Нека је $E \subseteq l^2(\mathcal{A})$ ограничен скуп и нека је F његов $\mathcal{A}$-уравнотежен омотач. Тада је $\lambda(F) = \lambda(E)$.*

Доказ: За свако $x \in E$ и за сваки унитаран u, имамо $\|u\| = 1$, одакле је $\|xu - P_n xu\| \leqslant \|x - P_n xu\|$. Према томе, на основу Тврђења 3.1-(б), имамо

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x \in E, \\ u-\text{унитаран}}} \|xu - P_n xu\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in E} \|x - P_n x\| = \lambda(E).$$

Супротна неједнакост $\lambda(E) \leqslant \lambda(F)$ следи из $E \subseteq F$. ∎

Тврђење 3.8. *Нека са μ означимо неку од мера Куратовског, Хауздорфа или Истрцескуа. Нека је $u \in \mathcal{A}$ унитаран и $E \subseteq l^2(\mathcal{A})$ ограничен скуп. Тада важи*

$$\mu^*(Eu) = \mu^*(E).$$

Доказ: На почетку, доказаћемо да за дато нормално стање φ на $\mathcal{A}$ и унитаран $u \in \mathcal{A}$, пресликавање $\varphi^u \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $\varphi^u(x) = \varphi(u^*xu)$ јесте такође нормално стање. Очигледно, $\varphi^u(1) = \varphi(u^*u) = \varphi(1) = 1$, одакле је $\|\varphi\| = 1$. Ако је $x \geqslant 0$, онда постоји a такво да је $x = a^*a$, па је $\varphi^u(x) = \varphi(u^*xu) = \varphi(u^*a^*au) = \varphi((au)^*(au)) \geqslant 0$, јер је φ позитиван функционал. Доказали смо да је φ^u позитиван функционал. Остало је још да докажемо да је φ^u нормалан.

Нека је x_α растућа мрежа са најмањим горњим ограничењем x. Онда је $u^*x_\alpha u$ такође растућа мрежа ограничена са u^*xu. Дакле, њено најмање горње ограничење је мање или једнако од u^*xu. Ако је $u^*x_\alpha u \leqslant y$, онда је $x_a \leqslant uyu^*$, одакле је $x \leqslant uyu^*$. За произвољно горње ограничење y добили смо $u^*xu \leqslant y$, па је u^*xu најмање горње ограничење за мрежу $u^*x_a u$. Према томе,

$$\sup_\alpha \varphi^u(x_\alpha) = \sup \varphi(u^*x_\alpha u) = \varphi(u^*xu) = \varphi^u(x).$$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу (3.2.3) постоји полунорма $p_{\varphi,y} \in P$ таква да је $[\mu(Eu)](p_{\varphi,y}) > \mu^*(Eu) - \varepsilon$. Даље, имамо $p_{\varphi,y}(xu) = p_{\varphi^u,yu}$, где је $yu^* = (\eta_1 u^*, \eta_2 u^*, \ldots)$. Заиста,

$$p^2_{\varphi,y}(xu) = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\eta_j^*\xi_j u)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(u^*(\eta_j u^*)^*\xi_j u)|^2 = p^2_{\varphi^u,yu^*}(x).$$

Важи

$$\begin{aligned}\sup_{j\geq 1} \varphi^u((\eta_j u^*)^*(\eta_j u^*)) &= \sup_{j\geq 1} \varphi^u(u\eta_j^*\eta_j u^*) = \sup_{j\geq 1} \varphi(u^*u\eta_j^*\eta_j u^*u)\\ &= \sup_{j\geq 1} \varphi(\eta_j^*\eta_j) = 1,\end{aligned}$$

одакле пар (φ^u, yu^*) задовољава услов (3.2.2).

Према томе,

$$[\mu(E)](p_{\varphi^u, yu^*}) = [\mu(Eu)](p_{\varphi,y}) > \mu^*(Eu) - \varepsilon$$

и одавде

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(Eu).$$

Супротна неједнакост следи из једнакости $E = (Eu)u^{-1}$. ■

Напомена 3.2. У тренутку писања ове дисертације није нам познато да ли се мере Куратовског, Хауздорфа и Истрцескуа мењају када се пређе на уравнотежени омотач.

3.3 Мере „некомпактности” на стандардном модулу $l^2(B(H))$

У специјалном случају, када је $\mathcal{A} = B(H)$, можемо одозго проценити меру „некомпактности” λ за уравнотежене скупове, тако што ћемо наћи однос између мере λ и мере $I^*(E)$.

Теорема 3.1. *Нека је $\mathcal{A} = B(H)$ и нека је $E \subseteq l^2(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}$-уравнотежени скуп. Тада је*

$$\lambda(E) \leqslant \sqrt{\|E\| I^*(E)},$$

где је $\|E\| = \sup_{x \in E} \|x\|$.

Доказ: Означимо са P_k пројектор на првих k координата, односно, $P_k(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots)$. Познато је да су сви P_k „компактни”. Ако је $\inf_{n \geqslant 1} \|(I - P_k)E\| = 0$, онда на основу Тврђења 2.3 и (3.2.5) следи $\lambda^*(E) = \chi^*(E) = 0$. Нека је

$$\delta = \inf_{k \geqslant 1} \|(I - P_k)E\| > 0$$

и нека је $\delta^2 > \varepsilon > 0$. Очигледно је $\delta \leqslant \|E\|$. Дефинишимо низ пројектора $Q_n \in \{P_1, P_2, \ldots\}$ и низове вектора x_n и $z_n \in l^2(\mathcal{A})$ на следећи начин. Нека је $Q_0 = 0$. Ако је Q_{n-1} дефинисан, онда постоји $x_n \in E$ такав да је

$\|x_n\| \leqslant \|E\|$ и $\|x_n\| \geqslant \|(I-Q_{n-1})x_n\| \geq \delta > \frac{1}{2}\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{\varepsilon}{2}}\right) = C_1$. Због $\lim_{k\to\infty} \|(I-P_k)(I-Q_{n-1})x_n\| = 0$, постоји природан број k_n такав да је

$$\|(I-P_{k_n})(I-Q_{n-1})x_n\| < C_2,$$

где је $C_2 = \min\{\frac{\varepsilon}{2\|E\|}, \frac{1}{2}\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{\varepsilon}{2}}\right)\}$. Дефинишимо $Q_n = P_{k_n}$ и

$$z_n = Q_n(I-Q_{n-1})x_n. \tag{3.3.1}$$

Доказаћемо неке особине низова x_n и z_n.

Прво, на основу дефиниције, важе неједнакости

$$\|(I-Q_n)(I-Q_{n-1})x_n\| < C_2, \tag{3.3.2}$$

$$\|z_n\| \leqslant \|x_n\| \leqslant \|E\|, \tag{3.3.3}$$

$$\|z_n\| \geqslant \|(I-Q_{n-1})x_n\| - \|(I-Q_n)(I-Q_{n-1})x_n\| > C_1 - C_2. \tag{3.3.4}$$

Затим, знамо да су Q_n и $I-Q_n$ пројектори за свако $n \in \mathbb{N}$, одакле за $z_n = Q_n(I-Q_{n-1})x_n$ важи

$$\begin{aligned}\langle z_n, x_n\rangle &= \langle Q_n(I-Q_{n-1})x_n, x_n\rangle \\ &= \langle Q_n(I-Q_{n-1})x_n, (I-Q_{n-1})Q_n x_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle.\end{aligned}$$

Доказали смо

$$\langle z_n, x_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle. \tag{3.3.5}$$

Даље, за $m > n$ имамо

$$\|\langle z_m, x_n\rangle\| < C_2\|E\|. \tag{3.3.6}$$

Заиста, за такве m и n имамо $Q_{n-1} \leqslant Q_n \leqslant Q_{m-1}$, односно, $I - Q_{m-1} \leqslant I - Q_n \leqslant I - Q_{n-1}$, одакле је

$$I - Q_{m-1} = (I-Q_{m-1})(I-Q_n)(I-Q_{n-1}),$$

па је

$$\begin{aligned}\langle z_m, x_n\rangle &= \langle (I-Q_{m-1})z_m, x_n\rangle\\ &= \langle (I-Q_{m-1})(I-Q_n)(I-Q_{n-1})z_m, x_n\rangle\\ &= \langle z_m, (I-Q_{m-1})(I-Q_n)(I-Q_{n-1})x_n\rangle\\ &= \langle z_m, (I-Q_n)(I-Q_{n-1})x_n\rangle .\end{aligned}$$

Према томе, на основу (3.3.2) и (3.3.3) важи

$$\|\langle z_m, x_n\rangle\| \leqslant \|z_m\|\cdot\|(I-Q_n)(I-Q_{n-1})x_n\| \leqslant C_2\|E\|.$$

Конструисаћемо полунорму p која је непрекидна у τ и конструисаћемо тотално дискретан низ у E. На основу неједнакости (3.3.4) важи

$$\|z_n\|^2 = \|\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \nu_n\| > (C_1 - C_2)^2,$$

па можемо изабрати нормално стање φ и υ_j, $\nu_j \in \mathcal{A}$ (Лема 2.4), такве да је

$$\varphi(\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \nu_n) > (C_1 - C_2)^2. \tag{3.3.7}$$

Посматрајмо полунорму p дату са

$$p(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\langle z_j\upsilon_j, x\rangle)|^2}.$$

Из (3.3.1) постоји низ $\zeta_j \in \mathcal{A}$ такав да је

$$z_k = (0,\ldots,0,\zeta_{k_{n-1}+1},\ldots,\zeta_{k_n},0,\ldots).$$

Дефинишимо низ $\omega_j = \zeta_j\upsilon_n/\varphi(\upsilon_n^*\zeta_j^*\zeta_j\upsilon_n)^{1/2}$ за $k_{n-1}+1 \leqslant j \leqslant k_n$. За такав низ важи

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_j^*\omega_j) &= \varphi\left(\frac{\upsilon_n^*\zeta_j^*}{\varphi(\upsilon_n^*\zeta_j^*\zeta_j\upsilon_n)^{1/2}}\cdot\frac{\zeta_j\upsilon_n}{\varphi(\upsilon_n^*\zeta_j^*\zeta_j\upsilon_n)^{1/2}}\right)\\ &= \varphi\left(\upsilon_n^*\zeta_j^*\zeta_j\upsilon_n/\varphi(\upsilon_n^*\zeta_j^*\zeta_j\upsilon_n)\right) = 1.\end{aligned}$$

Такође, за $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ имамо

$$\begin{aligned}|\varphi(\langle z_n \upsilon_n, x\rangle)|^2 &= \left|\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} \varphi(\upsilon_n^* \zeta_j^* \zeta_j \upsilon_n)^{1/2} \varphi(\omega_j^* \xi_j)\right|^2 \\ &\leqslant \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} \varphi(\upsilon_n \zeta_j^* \zeta_j \upsilon_n) \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} |\varphi(\omega_j^* \xi_j)|^2 \\ &= \varphi(\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \upsilon_n) \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} |\varphi(\omega_j^* \xi_j)|^2.\end{aligned}$$

Узимајући у обзир (3.3.3) имамо да је $\varphi(\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \upsilon_n) \leqslant \|\upsilon_n^* \langle z_n, z_n\rangle \upsilon_n\| = \|z_n\|^2 \leqslant \|E\|^2$ и одавде

$$p^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\langle z_n \upsilon_n, x\rangle)|^2 \leqslant \|E\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\omega_j^* \xi_j)|^2 = \|E\|^2 p^2_{\varphi,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots}(x).$$

Према томе, долазимо до закључка да је p добро дефинисана и да је непрекидна у односу на топологију τ.

Такође, E је $B(H)$-уравнотежен, па је $x_n \nu_n \in E$. На крају ћемо показати да је $x_n \nu_n$ тотално дискретан низ. Заиста, за $m > n$ имамо

$$\begin{aligned}p(x_m \nu_m - x_n \nu_n) &\geqslant |\varphi(\langle z_m \upsilon_m, x_m \nu_m - x_n \nu_n\rangle)| \\ &\geqslant |\varphi(\upsilon_m^* \langle z_m, x_m\rangle \nu_m)| - |\varphi(\upsilon_m^* \langle z_m, x_n\rangle \nu_n)|.\end{aligned}$$

Међутим, из (3.3.5) и (3.3.7) имамо

$$|\varphi(\upsilon_m \langle z_m, z_m\rangle \nu_m)| > (C_1 - C_2)^2,$$

а из (3.3.6) имамо

$$|\varphi(\upsilon_m^* \langle z_m, x_n\rangle \nu_n)| \leqslant \| \langle z_m, x_n\rangle \| < C_2 \|E\|.$$

Из претходног следи

$$p(x_m \nu_m - x_n \nu_n) > (C_1 - C_2)^2 - C_2 \|E\| \geqslant \delta^2 - \varepsilon$$

и

$$p_{\varphi,\omega_1,\dots,\omega_n,\dots}(x_m\nu_m - x_n\nu_n) > \frac{\delta^2-\varepsilon}{\|E\|}.$$

За $\varepsilon \in (0,\delta^2)$ имамо $I^*(E) \geqslant \frac{\delta^2-\varepsilon}{\|E\|}$, одакле је $I^*(E) \geqslant \frac{\delta^2}{\|E\|} = \frac{\lambda(E)^2}{\|E\|}$. Према томе, $\lambda(E) \leqslant \sqrt{\|E\| I^*(E)}$. ■

Напомена 3.3. Ако упоредимо формулације и доказе Теореме 2.2 и Теореме 3.1, можемо видети да је Теорема 2.2 специјалан случај Теореме 3.1, као и да докази имају исту идеју. Међутим, Теорема 2.2 је прва доказана, а и послужила је као мотивација за Теорему 3.1, чији је доказ, иако сложенији, настао прерадом доказа Теореме 2.2.

3.4 Мере „некомпактности" оператора

У овом потпоглављу наћи ћемо везу између мере „некомпактности" λ_o произвољног оператора који допушта адјунговање која је уведена у Дефиницији 3.2 и одговарајућих мера „некомпактности" оператора које следе из α^*, χ^* и I^*.

Дефиниција 3.4. Нека је $\mathcal{A}$ произвољна W^*-алгебра и нека је $T \in B^a(l^2(\mathcal{A}))$ оператор који допушта адјунговање. Функције α_o^*, χ_o^*, I_o^*: $B^a(l^2(\mathcal{A})) \to [0,+\infty)$ дефинисане са

$$\alpha_o^*(T) = \alpha^*(T(B_1)), \quad I_o^*(T) = I^*(T(B_1)), \quad \chi_o^*(T) = \chi^*(T(B_1))$$

зовемо, редом, *мера Куратовског*, *мера Истрцескуа* и *Хауздорфова мера* „некомпактности" оператора T који допушта адјунговање.

Тврђење 3.9. *Нека је $\mathcal{A}$ произвољна W^*-алгебра и нека је T, $S \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ (са μ означимо било коју од мера „некомпактности" α, χ, I).*

(a) *Функције α_o^*, χ_o^* и I_o^* су субадитивне и позитивно хомогене, то јест, важи*

$$\mu_o^*(T+S) \leqslant \mu_o^*(T) + \mu_o^*(S), \quad \mu_o^*(cT) = c\mu^*(T), \quad \textit{за свако } c > 0.$$

(б) *Функције* α_o^*, χ_o^* *и* I_o^* *су еквивалентне једна другој, односно,*

$$\chi_o^*(T) \leqslant I_o^*(T) \leqslant \alpha_o^*(T) \leqslant 2\chi_o^*(T).$$

Такође, важи $\chi_o^*(T) \leqslant \lambda_o(T)$.

(в) $\chi_o^*(T)$, $\lambda_o(T) \leqslant \|T\|$ *и* $\alpha_o^*(T)$, $I_o^*(T) \leqslant 2\|T\|$.

(г) *Ако је* T *„компактан”, односно,* T *припада затвореном линеарном простору генерисаног* $x \mapsto z\,\langle y, x\rangle$, *онда је*

$$\lambda_o(T) = \chi_o(T) = \alpha_o(T) = I(T) = 0.$$

У општем случају, супротан смер не мора да важи.

(д) $\mu_o^*(T+K) = \mu_o^*(T)$, *као и* $\lambda_o(T+K) = \lambda_o(T)$ *за сваки „компактан” оператор* K.

Доказ: Тврђење (а) следи из Теореме 1.10-(г), док тврђење (б) следи из (3.2.5) и Тврђења 3.6.

Због $T(B_1) \subseteq B(0; \|T\|) = \|T\| B_1$ и Тврђења 3.3 имамо $\lambda_o(T) \leqslant \|T\|$. Друге неједнакости из тврђења под (в) следе из тврђења под (а).

Ако је T „компактан”, онда је T гранична вредност у норми оператора коначног ранга. Одавде, $T(B_1)$ је $\mathcal{A}$-преткомпактан и важи $\lambda_o(T) = 0$. На основу тврђења под (б) добијамо $\lambda_o(T) = \chi_o(T) = \alpha_o(T) = I(T) = 0$. Доказали смо тврђење под (г). Супротан смер не важи увек (погледати Пример 23).

На крају, (д) следи из (г) и (а). ■

У случају када је $\mathcal{A} = B(H)$, можемо доказати и јача тврђења.

Тврђење 3.10. *Нека је* $\mathcal{A} = B(H)$ *и нека је* $T \in B^a(H_{B(H)})$. *Тада важи:*

(а)

$$\chi_o^*(T) \leqslant \lambda_o(T) \leqslant \sqrt{\|T\| I_o^*(T)} \leqslant \sqrt{\|T\| \alpha_o^*(T)} \leqslant \sqrt{2\|T\| \chi_o^*(T)};$$

(б) $\mu_o^*(T) = 0$, $\mu \in \{\alpha, \chi, I\}$ *акко* $\lambda_o(T) = 0$ *акко* T *је „компактан” оператор.*

Доказ: Тврђење (а) следи из Тврђења 3.9-(б) и Теореме 3.1, имајући у виду да је $T(B_1)$ уравнотежен скуп, јер из $y = Tx \in T(B_1)$, следи $yu = T(xu) \in T(B_1)$).

Тврђење (б) следи из тврђења (а) и Тврђења 3.9-(г). Заиста, ако се било која од ове четири мере „некомпактности" анулира за T, онда, на основу дела под (а), $\alpha_o^*(T) = 0$, одакле је $T(B_1)$ тотално ограничен у топологији τ. На основу Теореме 2.2, T је „компактан". ■

Последица 3.2. *Нека је $B(H)$ алгебра свих ограничених линеарних оператора на Хилбертовом простору H. На стандардном Хилбертовом модулу $H_{B(H)}$, важи*

$$\chi^*(E) \leqslant \lambda(E) \leqslant \sqrt{\|E\| I^*(E)} \leqslant \sqrt{\|E\| \alpha^*(E)} \leqslant \sqrt{2\|E\| \chi^*(E)},$$

за било који уравнотежен скуп E.

Напомена 3.4. У случају да је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра ограничених линеарних оператора на сепарабилном Хилбертовом простору, сва нормална стања се могу описати као $\varphi(B) = \mathrm{sp}(AB), B \in B(H)$, где су A позитивни оператори из $L^1(H)$ норме 1. У овом случају локално конвексна топологија $\tau_{B(H)}$ на стандардном Хилбертовом модулу $H_{B(H)}$ дата је помоћу фамилије полунорми

$$p_{C,B}(A) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\mathrm{sp}(CB_j^* A_j)|^2},$$

где је $C \in L^1(H)$ позитиван оператор норме 1 и $B = (B_1, B_2, \ldots)$ је низ оператора у $B(H)$ такав да је

$$\sup_{j \geqslant 1} \mathrm{sp}(B_j^* B_j) = 1.$$

3.5 Проблеми за даљи рад

У току истраживања наишли смо на неке проблеме који нама нису били једноставни. Навешћемо неке од њих у овом одељку.

Питање 1. Лако је доказати следеће: Нека је $E \subseteq H_{\mathcal{A}}$ ограничен. За било које $\varepsilon > 0$ постоји $\mathcal{A}$-преткомпактан скуп C_ε такав да је $E \subseteq C_\varepsilon + (\lambda(E) + \varepsilon)B$, где је B јединична лопта. (На пример $C_\varepsilon = E \cap M$ за одговарајући слободно коначно генерисан подмодул M.)

Поставља се питање да ли се може доказати јаче тврђење, да постоји $\mathcal{A}$-преткомпактан скуп C такав да је $E \subseteq C + \lambda(E) \cdot B$.

Питање 2. Међу свим особинама мера некомпактности на Банаховом простору, може се издвојити да је најважнија $\mu(\operatorname{co} E) = \mu(E)$. Она се у овом раду доказује када су „скалари” λ из скупа реалних бројева, односно, за $\operatorname{co} E = \{\sum_{j=1}^n c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n c_j = 1, c_j \in \mathbb{R}, x_j \in E\}$. Међутим, можемо посматрати и $\mathcal{A}$-конвексни омотач (видети [41])

$$\operatorname{co}_{\mathcal{A}} E = \Big\{ \sum_{j=1}^n a_j^* x_j a_j \mid x_j \in E, a_j \in \mathcal{A}, \sum_{j=1}^n a_j^* a_j = 1 \Big\}.$$

Да ли се може доказати $\lambda(\operatorname{co}_{\mathcal{A}} E) = \lambda(E)$?

Питање 3. Као што смо навели у Напомени 3.2, можемо поставити следеће питање: Да ли за сваки скуп E важи једнакост $\mu^*(E) = \mu^*(F)$, где F означава уравнотежен омотач скупа E, то јест $F = \bigcup_u Eu$ (унија пролази кроз све унитарне елементе u), и μ означава неку од мера Куратовског, Хауздорфа или Истрцескуа?

Глава 4

Фредхолмови оператори

Фредхолмови оператори се истражују дуги низ година. У почетку, то су били оператори на Банаховом простору са коначно димензионалним језгром и којезгром, код којих се индекс дефинисао као разлика димензија језгра и којезгра. Најважније особине Фредхолмових оператора су следеће.

1. Теорема о индексу. Она тврди да је за два Фредхолмова оператора T и S, оператор TS такође Фредхолмов и да важи $\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$.

2. Аткинсонова теорема. Она тврди да је оператор T Фредхолмов ако и само ако је инвертибилан у Калкиновој[1] алгебри $B(H)/C(H)$, где $C(H)$ означава алгебру компактних оператора.

3. Теорема о пертурбацији. Ако је T Фредхолмов оператор, онда је оператор $T + K$ Фредхолмов, за сваки компактан оператор K, при чему је $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.

4. Непрекидност индекса. Фредхолмови оператори чине отворен скуп у топологији индукованој нормом а индекс је константан у свакој компоненти повезаности овог скупа.

Прво уопштење Фредхолмове теорије на фон Нојмановој алгебри урадио је Бројер[2] [15], а касније се тиме бавио Атија[3] [6].

[1] John Williams Calkin (1909–1964) амерички математичар

[2] Manfred Breuer (1929–2011) немачки математичар

[3] Sir Michael Francis Atiyah енглеско-либански математичар

Да би уопштио свој и Сингеров[4] ранији резултат о индексу на некомпактну многострукост, Атија је посматрао операторе са језгром и којезгром који не припадају коначно димензионалним потпросторима, већ су придружени некој фон Нојмановој алгебри. Дефинисао је димензију ових потпростора као траг одговарајућих пројектора у одговарајућој фон Нојмановој алгебри (видети [6]). Убрзо су Мишченко[5] и Фоменко[6] увели појам Фредхолмовог оператора на Хилбертовом C^*-модулу, (видети [47]), а затим је и Минго[7] дао другачији приступ (видети [46]). Пре неколико деценија чинили су се покушаји да се аксиоматски представи Фредхолмова теорија у оквиру фон Нојманове алгебре $\mathcal{A}$ у односу на идеал $\mathcal{I}$. Тада су Фредхолмови оператори дефинисани као инвертибилни елементи у количничком простору $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, док је индекс дефинисан као елемент алгебре $C(\Omega)$, односно скупа свих непрекидних функција на Ω, при чему је $C(\Omega)$ изоморфан са центром $Z(\mathcal{A})$, (видети [18], [67]). Постоје и други покушаји да се уопшти Фредхолмова теорија, на пример [2].

У овом поглављу издвојићемо особине оператора коначног ранга које нам омогућавају да развијемо Фредхолмову теорију. Другим речима, даћемо аксиоматску основу теорије Фредхолмових оператора. Бавићемо се јединичном C^*-алгебром $\mathcal{A}$ и њеном верном репрезентацијом $\rho\colon \mathcal{A} \to B(H)$ као подалгебром $\rho(\mathcal{A})$ алгебре свих ограничених оператора на неком Хилбертовом простору H. Даље, доказаћемо да су стандардни Фредхолмови оператери, Фредхолмови оператори у смислу Атије и Сингера на II_∞ факторима и Фредхолмови оператори у смислу Мишченка и Фоменка специјални случајеви наше теорије. Резултати изложени у овом поглављу могу се наћи у раду [34].

[4] Isadore Manuel Singer (1924–) амерички математичар

[5] Мищенко Александр Сергеевич (1941–) руски математичар

[6] Анатолий Тимофеевич Фоменко (1945–) руски математичар

[7] James Mingo-канадски математичар

4.1 Фредхолмови оператори на C^*-алгебри

У овом потпоглављу уопштићемо појам Фредхолмовог оператора на произвољну C^*-алгебру. Наиме, аксиоматски дефинишемо елементе „коначног типа”, а затим дефинишемо елементе „Фредхолмовог типа”.

У овом потпоглављу претпоставићемо да је дата C^*-алгебра јединична, чак и када није експлиципно наведено. Означићемо са ker језгро, а са coker којезгро неког оператора. Ако је X затворен потпростор неког Хилбертовог простора H, са P_X означићемо ортогоналан пројектор на X. Некада ћемо намерно изоставити реч ортогоналан, то јест, када се каже пројектор подразумеваће се да се ради о пројектору који је ортогоналан. Симбол 1 означаваће јединични елемент у апстрактној алгебри, док ће I означавати идентичан оператор на неком Хилбертовом простору. Слично, употребљаваћемо мала слова a, b, t, $\ldots$ да означимо елементе апстрактне алгебре, док ћемо са великим словима A, B, T, $\ldots$ означавати операторе на датом Хилбертовом простору.

Дефиниција 4.1. Нека је M Абелов моноид. Посматрајмо директан производ $M \times M$ и његов количнички моноид у односу на следећу релацију еквиваленције

$$(m,n) \sim (m',n') \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p,q:\ (m,n)+(p,p) = (m',n')+(q,q).$$

Може се доказати да је количнички моноид Абелова група коју ћемо означити са $S(M)$ и назвати је *симетризација* моноида M.

Посматрајмо адитивну категорију $P(\mathcal{A})$ пројективних модула над јединичном C^*-алгебром $\mathcal{A}$ и означимо са $[M]$ класу изоморфизама објеката M из $P(\mathcal{A})$. Скуп класа $\Phi(P(\mathcal{A}))$ има структуру Абеловог моноида у односу на операцију $[M]+[N] = [M \oplus N]$. У овом случају групу $S(\Phi(P(\mathcal{A})))$ означићемо са $K(\mathcal{A})$ или $K_0(\mathcal{A})$ и назваћемо је *K-група* алгебре $\mathcal{A}$ или *Гротендикова група* категорије $P(\mathcal{A})$.

За више информација о K теорији читаоцу се препоручују [66] и [30].

Дефиниција 4.2. Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и нека је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ подалгебра која задовољава следеће услове:

(а) $\mathcal{F}$ је самоадјунговани идеал у $\mathcal{A}$, односно, за свако $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{F}$ важи ab, $ba \in \mathcal{F}$ и из $a \in \mathcal{F}$ следи $a^* \in \mathcal{F}$;

(б) постоји апроксимативна јединица p_α за $\mathcal{F}$, сачињена од пројектора;

(в) ако су $p, q \in \mathcal{F}$ пројектори, онда постоји $v \in \mathcal{A}$, такво да је $vv^* = q$ и $v^*v \perp p$, односно, $v^*v + p$ је пројектор.

Елементе идеала $\mathcal{F}$ зовемо *„елементи коначног типа”*.

Дефиниција 4.3. Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и нека је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ идеал „елемената коначног типа”. На скупу $\mathrm{Proj}(\mathcal{F}) = \{p \in \mathcal{F} \mid p = p^2 = p^*\}$ дефинисаћемо следећу релацију еквиваленције

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in \mathcal{A} \;\; vv^* = p, \;\; v^*v = q,$$

то јест *Мареј фон Нојманову* еквиваленцију. Скуп $S(\mathcal{F}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{F})/_\sim$ је комутативна полугрупа у односу на сабирање, а скуп $K(\mathcal{F}) = G(S(\mathcal{F}))$ је комутативна група, где G означава Гротендиков функтор.

Ово потпоглавље смо поделили на четири одељка. Прва три, *Познате леме у Хилбертовом простору*, *„Скоро инвертибилан” елемент* и *Техника апроксимативне јединице*, садрже уводни материјал неопходан за последњи одељак, а *Индекс и његове особине* садржи главне резултате.

4.1.1 Познате леме у Хилбертовом простору

Прво ћемо навести и доказати три елементарна тврђења о операторима на Хилбертовом простору.

Прва лема нам каже да два пројектора која су „близу” један другом јесу унитарно еквивалентни и да је при овој еквиваленцији унитаран елемент близу јединичном елементу.

Лема 4.1. *Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и нека су $p, q \in \mathcal{A}$ пројектори такви да је $\|p - q\| < 1$. Тада постоје парцијалне изометрије $v, w \in \mathcal{A}$ такве да је*

$$vv^* = p, \qquad v^*v = q, \tag{4.1.1}$$

$$ww^* = 1 - p, \qquad w^*w = 1 - q.$$

Штавише, постоји унитаран елемент $u \in \mathcal{A}$ такав да је

$$u^*pu = q, \qquad u^*(1-p)u = 1 - q.$$

У случају да је $\|p - q\| < 1/2$, имамо процену

$$\|1 - u\| \leqslant C\|p - q\|, \tag{4.1.2}$$

где је C константа која не зависи ни од p ни од q.

Доказ: Ако је $\mathcal{A} = B(H)$, егзистенција $v \in B(H)$ доказана је у [52, §105, страна 268], где је $v = p(1 + p(q-p)p)^{-1/2}q$. У општем случају, можемо алгебру $\mathcal{A}$ посматрати као подалгебру алгебре $B(H)$ (Гељфанд-Најмаркова теорема) и приметити да v припада минималној алгебри $C^*(1, p, q)$ која садржи 1, p и q, која је очигледно подалгебра алгебре $\mathcal{A}$. Заиста, $C^*(1,p,q)$ садржи $p(q-p)p$ јер је затворена у односу на алгебарске операције. Одавде садржи и $(1 + p(q-p)p)^{-1/2}$ имајући у виду да је C^*-алгебра затворена у односу на непрекидан функционални рачун, чиме смо добили $v \in C^*(1,p,q)$.

С обзиром да је $\|(1-p) - (1-q)\| = \|p - q\|$, можемо применити претходно тврђење на $1-p$ и $1-q$, одакле добијамо w са особинама (4.1.1). Тражени унитаран оператор је $u = v + w$.

На крају, да бисмо доказали (4.1.2), имамо

$$\|q - v\| = \|q - p(1 + p(q-p)p)^{-1/2}q\| \leqslant \|q - p(1 + p(q-p)p)^{-1/2}\|.$$

Нека су α_n коефицијенти у Тејлоровом развоју функције $t \mapsto (1+t)^{-1/2}$. Важи $(1 + p(q-p)p)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (p(q-p)p)^n$ и одавде

$$\begin{aligned}\|q - v\| &\leqslant \|q - p - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (p(q-p)p)^n\| \leqslant \|q-p\| + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\, \|q-p\|^n \\ &= \|q-p\|(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\, \|q-p\|^{n-1}) \leqslant C_1\|q-p\|,\end{aligned}$$

где је $C_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|/2^{n-1} < +\infty$. Примењујући претходни резултат на пројекторе $1-p$ и $1-q$ добијамо $\|1-q-w\| \leqslant C_1\|(1-q)-(1-p)\|$. Према томе,

$$\|1-u\| = \|1-q+q-w-v\| \leqslant \|q-v\| + \|1-q-w\| \leqslant 2C_1\|q-p\|.$$

■

У следећој леми бавимо се пројекторима који су „скоро ортогонални”.

Лема 4.2. *Нека су $P, Q \in B(H)$ пројектори и нека за свако $\xi \in P(H)$ и за свако $\eta \in Q(H)$ важи*

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leqslant c\|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Тада је $\|PQ\| \leqslant c$.

Доказ: Нека су $\xi, \eta \in H$. Онда је $P\xi \in P(H)$, $Q\eta \in Q(H)$ и

$$|\langle QP\xi, \eta \rangle| = |\langle P\xi, Q\eta \rangle| \leqslant c\|P\xi\| \cdot \|Q\eta\| \leqslant c\|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Према томе, $\|QP\| \leqslant c$ и $\|PQ\| = \|(QP)^*\| \leqslant c$. ■

Последња лема у овом одељку нам говори о адјунговању изоморфизма између два потпростора.

Лема 4.3. *Нека су K и L затворени потпростори Хилбертових простора H_1 и H_2 ($K \leqslant H_1$, $L \leqslant H_2$) и нека је $T\colon H_1 \to H_2$ ограничено пресликавање које слика K бијективно на L и $T|_{K^\perp} = 0$. Тада T^* слика L бијективно на K и $T^*|_{L^\perp} = 0$.*

Доказ: Из једнакости $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp = L^\perp$ следи $T^*|_{L^\perp} = 0$, а из једнакости $\overline{\operatorname{ran} T^*} = (\ker T)^\perp = K$ добијамо да је $\operatorname{ran} T^*$ густ у K . Затим, T^* је инјективно на L. Применом теореме о отвореном пресликавању на T, које бијективно пресликава K на L (K, L затворени), добијамо да је T ограничен одоздо на K, односно, постоји $c > 0$ тако да је $\|T\xi\| \geqslant c\|\xi\|$

за свако $\xi \in K$. За $\eta \in L$ важи $T^*\eta \in K$ и

$$\|T^*\eta\| = \sup_{\substack{\xi\in K\\ \|\xi\|=1}} |\langle \xi, T^*\eta\rangle| = \sup_{\substack{\xi\in K\\ \|\xi\|=1}} |\langle T\xi, \eta\rangle| = \sup_{\substack{\xi\in K\\ \|\xi\|=1}} \|T\xi\| \left|\left\langle \frac{T\xi}{\|T\xi\|}, \eta\right\rangle\right|$$
$$\geqslant c\cdot \sup_{\substack{\xi\in K\\ \|\xi\|=1}} \left|\left\langle \frac{T\xi}{\|T\xi\|}, \eta\right\rangle\right| = c\cdot \sup_{\substack{\eta'\in L\\ \|\eta'\|=1}} |\langle \eta', \eta\rangle| = c\|\eta\|.$$

Претпоследња једнакост следи из чињенице да је $T(K) = L$. Доказали смо да је T^* инјективно и да има затворену слику. С обзиром да је $\operatorname{ran} T^*$ густ у K и T^* затворено пресликавање, имамо $\operatorname{ran} T^* = K$, одакле T^* слика L бијективно на K. ■

4.1.2 „Скоро инвертибилан” елемент

У овом одељку, уводимо појам „скоро инвертибилности”. Мотивисани дефиницијом Фредхолмових оператора на Хилбертовим C^*-модулима (видети Дефиницију 4.7) дефинишемо „скоро инвертибилност” као инвертибилност у односу на пар пројектора.

Дефиниција 4.4. Нека је $a \in \mathcal{A}$ и нека су $p, q \in \mathcal{F}$. Рећи ћемо да је a *инвертибилан у односу на пар* (p, q) ако је елемент $a' = (1-q)a(1-p)$ инвертибилан, то јест, ако постоји $b \in \mathcal{A}$, при чему је

$$b = (1-p)b(1-q), \tag{4.1.3}$$

тако да је $a'b = 1-q$, $ba' = 1-p$. Зато кажемо да је b „скоро инверз”, односно, (p, q)-инверз елемента a.

Напомена 4.1. За дата два пројектора p и q, можемо посматрати алгебру $\mathcal{A}$ као 2×2 матричну алгебру. Изоморфизам је дат као

$$a \leftrightarrow \begin{bmatrix} (1-p)a(1-q) & (1-p)aq \\ pa(1-q) & paq \end{bmatrix}.$$

Према томе, услов (4.1.3) значи да је b (у односу на описану идентификацију) матрица чији си елементи нуле, осим у горњем левом углу.

Одатле следи $bq = 0$, $pb = 0$, $b = (1-p)b = b(1-q)$. Заиста, множењем (4.1.3) са q здесна и са p слева, добијамо $bq = (1-p)b(1-q)q = 0$ и $pb = p(1-p)b(1-q) = 0$, одакле имамо $b = (1-p)b = b(1-q)$. Због оваквог изоморфизма, уместо да кажемо да a има (p,q)-инверз, можемо рећи да је a инвертибилан у односу на леви пројектор p и десни пројектор q.

Доказаћемо да је скуп „скоро инвертибилних" елемената отворен и да се „скоро инверз" (у одговарајућем смислу) непрекидно мења у односу на a, као и у односу на p и q.

Лема 4.4. *Нека је a инвертибилан у односу на (p,q) и нека је b његов (p,q)-инверз.*

(а) Елемент $a+c$ је инвертибилан у односу на (p,q) за свако $c \in A$, које задовољава $\|c\| < \|b\|^{-1}$. Ако са b_1 означимо (p,q)-инверз елемента $a+c$, онда је

$$\|b_1\| \leqslant \frac{\|b\|}{1-\|b\|\cdot\|c\|}. \tag{4.1.4}$$

(б) Ако важи $\|p-p'\|$, $\|q-q'\| < \min\{1/2, 1/(4C\|a\|\cdot\|b\|)\}$, где је C константа из (4.1.2), онда је a инвертибилан у односу на (p',q'). Штавише, ако је b' (p',q')-инверз елемента a, онда је $\|b'\| \leqslant 2\|b\|$.

Доказ: (а) Са b означимо (p,q)-инверз елемента a. Тада је $(1-q)(a+c)(1-p) = a'+c' = a'(1-p)+(1-q)c = a'(1-p)+a'bc' = a'(1-p+bc')$, где су $c' = (1-q)c(1-p)$ и $a' = (1-q)a(1-p)$. Елемент bc' припада $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ и за $\|c\| < \|b\|^{-1}$ важи $\|bc'\| \leqslant \|b\|\cdot\|c\| < 1$. Према томе, $1-p+bc'$ је инвертибилан у угаоној алгебри $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$. Означимо његов инверз са t. Имамо $(1-q)(a+c)(1-p)tb = a'(1-p+bc')tb = a'b = 1-q$ и $tb(1-q)(a+c)(1-p) = tba'(1-p+bc') = t(1-p)(1-p+bc') = 1-p$. Одавде $b_1 = tb$ је (p,q)-инверз елемента $a+c$, за $\|c\| < \|b\|^{-1}$.

На основу следеће неједнакости

$$\|t\| = \|(1-p) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(bc')^n\| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\|b\|^n\cdot\|c'\|^n = \frac{1}{1-\|b\|\cdot\|c'\|}$$

и чињенице да је $\|c'\| \leqslant \|c\|$ и $b_1 = tb$, следи неједнакост (4.1.4).

(б) Користећи Лему 4.1 добијамо да постоји унитаран елемент u такав да је $u^*q'u = q$. Затим, имамо

$$u^*(1-q')a(1-p) = (1-q)a(1-p) - u^*(1-q')(u-1)a(1-p) = (1-q)a(1-p) - c,$$

где је $c = u^*(1-q')(u-1)a(1-p)$. Приметимо да $c \in (1-q)\mathcal{A}(1-p)$, јер $u^*(1-q') = u^*(1-q')uu^* = (1-q)u^*$, као и $\|c\| < \|u-1\| \cdot \|a\| < C\|q-q'\| \cdot \|a\| < 1/(4\|b\|)$. Применом дела (а), добијамо да постоји (p,q)-инверз елемента $u^*(1-q')a(1-p)$, у ознаци b_1. Лако је проверити да b_1u^* јесте (p,q')-инверз елемента a као и да важи

$$\|b_1u^*\| \leqslant \|b_1\| < \frac{\|b\|}{1-\|b\| \cdot \|c\|} \leqslant \frac{4\|b\|}{3}.$$

На сличан начин можемо заменити p са p', при чему добијамо да је a инвертибилан у односу на (p',q'). Означимо његов (p',q')-инверз са b'. Такође, имамо неједнакост

$$\|b'\| \leqslant \frac{\|b_1\|}{1-\|b_1\| \cdot \|c'\|} \leqslant \frac{4\|b\|/3}{1-4\|b\| \cdot \|c'\|/3} \leqslant 2\|b\|.$$

■

У наставку често ћемо користитити следећу лему. Омогућава нам да померимо пројектор са десне стране елемента на његову леву страну, ако је посматрани елемент на тој пројекцији инвертибилан. У оквиру репрезентација, то значи да можемо пренети пројекцију од домена оператора до његовог кодомена. Таква добијена пројекција је еквивалентна почетној.

Лема 4.5. *Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра и $a \in \mathcal{A}$. Нека су $p, r \in \mathcal{A}$ пројектори такви да је $r \leqslant 1-p$. Нека је, још, a лево инвертибилан у односу на p, односно, постоји $b \in \mathcal{A}$ тако да је $ba(1-p) = 1-p$. Важи следеће:*

(а) ar има поларно разлагање у $\mathcal{A}$, односно,

$$ar = v|ar|, \quad v, |ar| \in \mathcal{A}, \quad r = v^*v. \tag{4.1.5}$$

Даље, $s = vv^* \in \mathcal{A}$ је минималан пројектор у $\mathcal{A}$, такав да је $sar = ar$. (Очигледно је да из $s \sim r$ и $r \in \mathcal{F}$ следи $s \in \mathcal{F}$.) Поред тога, а је инвертибилан у односу на $(1-r, 1-s)$.

(б) Ако је $\mathcal{A} \overset{\rho}{\hookrightarrow} B(H)$ нека верна репрезентација алгебре $\mathcal{A}$, онда је $L = \rho(ar)(H)$ затворен потпростор и $\rho(s)$ је пројектор на L. Даље, пројектор на $L = \rho(ar)(H)$ припада $\rho(\mathcal{A})$.

Доказ: Нека је $\mathcal{A} \overset{\rho}{\hookrightarrow} B(H)$ нека верна и унитална репрезентација алгебре C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и нека је $\rho(r)(H) = K$. Означимо $A = \rho(a)$, $B = \rho(b)$, $P = \rho(p)$ и $R = \rho(r)$. Јасно је да AR има поларну декомпозицију $AR = V|AR|$ у $B(H)$. Парцијална изометрија v са својствима (4.1.5) је јединствено одређена, па је потребно још доказати да $V \in \rho(\mathcal{A})$.

Нека је $H_1 = (I-P)(H)$. За $\xi \in H_1$ важи

$$\|\xi\| = \|BA(I-P)\xi\| \leq \|B\| \cdot \|A(I-P)\xi\| = k^{-1}\|A\xi\|,$$

где је $k = \|B\|^{-1}$. (Искористили смо $(I-P)\xi = \xi$.) Дакле,

$$\|A\xi\| \geqslant k\|\xi\|, \qquad \xi \in H_1,$$

то јест, A је инјективан и ограничен одоздо на H_1, а одатле и на $K = R(H) \leqslant H_1$ $(r \leqslant 1-p)$.

Према томе, $L = AR(H) = A(K)$ је затворен потпростор. (Овим смо доказали први део тврђења под (б).) С обзиром да AR слика бијективно K на L, на основу Леме 4.3, $(AR)^*$ слика бијективно L на K, а одатле је $RA^*AR = (AR)^*AR$ изоморфизам на K. Означимо његов инверз са $\hat{T}\colon K \to K$. Нека је $T\colon H \to H$ раширење оператора $\hat{T}$, дефинисано нулом на $K^\perp$. Очигледно је $T \geqslant 0$ и да $\sqrt{T}$ постоји. Такође, $\sqrt{T}$ слика K у K и $\sqrt{T}|_{K^\perp} = 0$. Доказаћемо да је $V = AR\sqrt{T}$. Заиста, V и $AR\sqrt{T}$ се анулирају на $K^\perp$, а на основу једнакости $|AR| = ((AR)^*AR)^{1/2}$ и на основу тога што је T инверз оператора $(AR)^*AR$, оператори $\sqrt{T}$ и $|AR|$ су инверзни један другом на K. Стога, остаје да се докаже да $T \in \rho(\mathcal{A})$.

Лако је проверити да су $(AR)^*AR + I - R$ и $T + I - R$ инверзни један другом. Пошто $(AR)^*AR + I - R \in \rho(\mathcal{A})$, на основу Теореме 1.12 и

$T + I - R$ такође припада $\rho(\mathcal{A})$, а одавде $T \in \rho(\mathcal{A})$. Према томе, $T = \rho(t)$ за неко $t \in \mathcal{A}$. Одавде је $V = \rho(v)$, при чему је $v = ar\sqrt{t}$ и ar има поларну декомпозицију у $\mathcal{A}$.

С обзиром да је $s = vv^*$ и да је $S = \rho(s)$ пројектор на потпростор $L = AR(H)$, важи $sar = ar$. Ако за неки други пројектор s_1 важи $s_1ar = ar$, онда мора бити задовољено $S_1(H) \geqslant L$, а одавде $S_1 \geqslant S$, односно, $s_1 \geqslant s$. ■

Следећа лема бави се 2×2 матрицама. Она може бити слободније преформулисана на следећи начин: Ако је $[a_{i,j}]_{i,j=1}^2$ инвертибилна, онда је a_{11} инвертибилан и додатно, ако је матрица доње троугаона ($a_{12} = 0$) или „скоро" доње троугаона (a_{12} је „довољно мало"), онда је a_{22} такође инвертибилан.

Међутим, ми нећемо користити матрични запис да не би дошло до забуне у односу на који пар пројектора се формира матрица.

Лема 4.6. *Нека за $a, p, q \in \mathcal{A}$ важи да су p и q пројектори такви да је a инвертибилан у односу на (p, q) и нека су r_1, r_2, s_1, s_2 пројектори такви да је $1 - p = r_1 + r_2$ и $1 - q = s_1 + s_2$. Ако је a инвертибилан у односу на $(1 - r_1, 1 - s_1)$ и ако је $\|s_2ar_1\| < \|b\|^{-1}$ или $\|s_1ar_2\| < \|b\|^{-1}$, где је b (p, q)-инверз елемента a, онда је a инвертибилан у односу на $(1 - r_2, 1 - s_2)$.*

Доказ: 1° случај - нека је $s_2ar_1 = 0$. Раставимо $(1-q)a(1-p)$ и b као

$$(1 - q)a(1 - p) = (s_1 + s_2)a(r_1 + r_2) = s_1ar_1 + s_1ar_2 + s_2ar_2, \tag{4.1.6}$$

$$b = (1-p)b(1-q) = (r_1+r_2)b(s_1+s_2) = r_1bs_1+r_1bs_2+r_2bs_1+r_2bs_2. \tag{4.1.7}$$

Множењем (4.1.6) са (4.1.7) здесна добијамо

$$s_1+s_2 = 1-q = s_1ar_1bs_1+s_1ar_1bs_2+s_1ar_2bs_1+s_1ar_2bs_2+s_2ar_2bs_1+s_2ar_2bs_2.$$

Множењем последње једнакости са s_2 са обе стране добијамо

$$s_2 = s_2ar_2r_2bs_2. \tag{4.1.8}$$

Множењем (4.1.6) и (4.1.7) у другом редоследу имамо

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 1 - p \\ &= r_1bs_1ar_1 + r_1bs_1ar_2 + r_1bs_2ar_2 + r_2bs_1ar_1 + r_2bs_1ar_2 + r_2bs_2ar_2. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Множењем (4.1.9) слева са r_2 и здесна са r_1 добијамо $r_2bs_1ar_1 = 0$. Према претпоставци елемент a има $(1 - r_1, 1 - s_1)$-инверз, у ознаци b'. Важи $s_1ar_1b' = s_1$, а одатле $r_2bs_1 = r_2bs_1ar_1b' = 0b' = 0$.

На крају, множењем (4.1.9) са r_2 са обе стране добијамо

$$r_2 = r_2bs_1ar_2 + r_2bs_2ar_2 = 0ar_2 + r_2bs_2ar_2 = r_2bs_2s_2ar_2,$$

одакле, имајући у виду (4.1.8), имамо да r_2bs_2 чини $(1-r_2, 1-s_2)$-инверз елемента a. Према томе, применом Леме 4.5 на $r_2 \leqslant r_1 + r_2$ долазимо до $r_2 \sim s_2$.

2° случај - општи. Посматрајмо $\hat{a} = a - s_2ar_1$. Очигледно је да важи $s_1\hat{a}r_1 = s_1ar_1$, $s_2\hat{a}r_2 = s_2ar_2$ и $s_2\hat{a}r_1 = 0$. Користећи $\|s_2ar_1\| < \|b\|^{-1}$ и Лему 4.4-(а), закључујемо да је $\hat{a}$ инвертибилан у односу на (p, q) и можемо применити претходни случај.

Ако је $\|s_1ar_2\| < \|b\|^{-1}$, онда ћемо претходни поступак применити на a^*. ■

Следећа лема је прецизнија верзија Леме 4.5.

Лема 4.7. *Нека је $\mathcal{A}$ јединична C^*-алгебра, $p, q, r \in \mathcal{A}$ пројектори такви да је a инвертибилан у односу на (p, q) и $r \leqslant 1 - p$. Нека је s пројектор добијен применом Леме 4.5. Ако је $qa(1 - p) = 0$, онда је $s \leqslant 1 - q$ и $1 - q - s \sim 1 - p - r$.*

Доказ: С обзиром да је a инвертибилан у односу на (p, q), a је лево инвертибилан у односу на p. Дакле, пројектор s је добро дефинисан.

Ако је $qa(1 - p) = 0$, онда је $(1 - q)a(1 - p) = a(1 - p)$, а одатле $ar = a(1-p)r = (1-q)a(1-p)r = (1-q)ar$. Из минималности пројектора s имамо $s \leqslant 1 - q$.

Означимо $r_1 = 1 - p - r$. Применом претходног дела доказа на $r_1 \leqslant 1-p$ добијамо минимални пројектор s_1 такав да је $s_1 \leqslant 1-q$, $s_1ar_1 = ar_1$ и

$r_1 \sim s_1$. Означимо $s_2 = 1-q-s$. Пројектори s_1 и s_2 могу бити различити. Из $sar = ar$ добијамо $s_2ar = (1-q)ar - sar = (1-q)a(1-p)r - sar = a(1-p)r - qa(1-p)r - sar = ar - 0 - sar = 0$, па можемо применити Лему 4.6 и добијамо да је s_2ar_1 „инвертибилан”, што је довољно да закључимо да су s_1 и s_2 еквивалентни, односно, $s_2 \sim r_1 \sim s_1$. ■

Последње тврђење у овом одељку обезбеђује да се „скоро инвертибилни” елементи могу тријагуларизовати. Прецизније, ако је a инвертибилан у односу на (p,q), онда можемо заменити или p или q (један од њих, не оба истовремено) еквивалентним пројектором тако да елемент a буде инвертибилан у односу на нови пар пројектора, као и да у односу на те пројекторе посматрани елемент има троугаони облик.

Тврђење 4.1. *Нека је $\mathcal{A}$ једнична C^*-алгебра и нека је a инвертибилан у односу на (p,q), где су $p,q \in \mathcal{A}$ пројектори. Следећа тврђења су тачна.*

(а) *Постоји пројектор $q' \in \mathcal{A}$, $q' \sim q$ такав да је a инвертибилан у односу на (p,q') и такав да је $q'a(1-p) = 0$.*

(б) *Постоји пројектор $p' \in \mathcal{A}$, $p' \sim p$ такав да је a инвертибилан у односу на (p',q) и такав да је $(1-q)ap' = 0$.*

Доказ: (а) Нека b чини (p,q)-инверз елемента a. Онда важи

$$\begin{gathered}(1-q)a(1-p)b = 1-q, \quad b(1-q)a(1-p) = 1-p,\\ (1-p)b(1-q) = b, \quad pb = bq = 0, \quad b = (1-p)b, \quad b = b(1-q).\end{gathered} \tag{4.1.10}$$

Нека је $u = 1 + qab$. Тада важи

$$u(1-qab) = (1+qab)(1-qab) = 1 - qab + qab - qabqab = 1 - qabqab = 1,$$

$$(1-qab)u = (1-qab)(1+qab) = 1 + qab - qab - qabqab = 1 - qabqab = 1,$$

одакле је $u^{-1} = 1 - qab$.

Посматрајмо елемент

$$a_1 = u^{-1}a = (1-qab)a = a - qaba.$$

Користећи $b(1-q) = b$ и $b(1-q)a(1-p) = 1-p$ (видети (4.1.10)), имамо

$$\begin{aligned} qa_1(1-p) &= q(a - qaba)(1-p) = qa(1-p) - qab(1-q)a(1-p) \\ &= qa(1-p) - qa(1-p) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Елемент $(u^{-1})^*$ је инвертибилан заједно са u и можемо применити Лему 4.5 и добити минимални пројектор $q' \in \mathcal{A}$ такав да је $q' \sim q$, $(u^{-1})^*$ инвертибилан у односу на $(1-q, 1-q')$ и $q'(u^{-1})^*q = (u^{-1})^*q$. Из последње једнакости следи

$$qu^{-1} = qu^{-1}q', \quad \text{тј.} \quad qu^{-1}(1-q') = 0, \tag{4.1.12}$$

што због Леме 4.6, значи да је u^{-1} инвертибилан у односу на $(1-q', 1-q)$, као и у односу на (q', q).

Докажимо да је $q'a(1-p) = 0$. Заиста, на основу (4.1.11) и (4.1.12) имамо

$$0 = qa_1(1-p) = qu^{-1}a(1-p) = qu^{-1}q'a(1-p). \tag{4.1.13}$$

Нека је t $(1-q', 1-q)$-инверз елемента u^{-1}. Важи $tqu^{-1}q' = q'$. Множењем једначине (4.1.13) са леве стране са t добијамо $0 = tqu^{-1}q'a(1-p) = q'a(1-p)$.

На крају, докажимо да је a инвертибилан у односу на (p, q'). Приметимо да је $(1-q)a_1(1-p) = (1-q)(a - qaba)(1-p) = (1-q)a(1-p)$. Даље, из (4.1.12) имамо $qu^{-1}(1-q') = 0$ и $(1-q)u^{-1}(1-q') = u^{-1}(1-q')$ и одавде

$$\begin{aligned} (1-q')a(1-p) &= a(1-p) = uu^{-1}a(1-p) = ua_1(1-p) \\ &= u(1-q)a_1(1-p) = u(1-q)a(1-p). \end{aligned}$$

Тврдимо да елемент $bu^{-1}(1-q')$ чини (p, q')-инверз елемента a. Заиста,

$$\begin{aligned} (1-q')a(1-p) \cdot bu^{-1}(1-q') &= u(1-q)a(1-p)bu^{-1}(1-q') \\ &= u(1-q)u^{-1}(1-q') = uu^{-1}(1-q') = 1-q' \end{aligned}$$

и

$$bu^{-1}(1-q')\cdot(1-q')a(1-p) = bu^{-1}u(1-q)a(1-p) = 1-p.$$

(б) Довољно је применити претходни закључак на a^*. ■

4.1.3 Техника апроксимативне јединице

У овом одељку доказаћемо неке важне особине идеала елемената „коначног типа". Тај идеал има апроксимативну јединицу коју чине пројектори. У следеће две леме доказаћемо да апроксимативна јединица апсорбује било које друге коначне пројекторе и да је сваки коначни пројектор елемент неке апроксимативне јединице.

Лема 4.8. *Нека је $p_\alpha \in \mathcal{F}$ апроксимативна јединица и нека је $p \in \mathcal{F}$. Тада постоје α_0 и p' такви да је $p \sim p' \leqslant p_{\alpha_0}$. Штавише, α_0 може бити изабрано такво да $\|p-p'\|$ буде произвољно мало.*

Доказ: С обзиром да је p_α апроксимативна јединица, имамо да је $\|p-p_\alpha p\| \to 0$, када $\alpha \to \infty$. Према томе, постоји α_0 са својством

$$\|p-p_{\alpha_0}p\| \leqslant \delta < 1, \qquad \text{односно}, \qquad \|p-pp_{\alpha_0}p\| \leqslant \delta. \tag{4.1.14}$$

Тиме смо показали да је $pp_{\alpha_0}p$ инвертибилан елемент у угаоној алгебри $p\mathcal{A}p$.

Нека је ρ верна и унитална репрезентација C^*-алгебре $\mathcal{A}$ на неком Хилбертовом простору H. Означимо слике пресликавања ρ одговарајућим великим словима, $P=\rho(p)$, $P_{\alpha_0}=\rho(p_{\alpha_0})$ итд.

Нека је $K=P(H)$. Елемент p_{α_0} је инвертибилан у односу на $(1-p, 1-p)$, па можемо применити Лему 4.5-(а) и добити $p' \in \mathcal{A}$, $p' \sim p$. Помоћу дела (б) исте леме, добијамо $p' \leqslant p_{\alpha_0}$ (P' је пројектор на слику оператора $P_{\alpha_0}P$, који је потпростор слике оператора P_{α_0}).

Остаје да докажемо да $\|p-p'\|$ може бити произвољно мало. Да бисмо ово урадили, докажимо да $P_{\alpha_0}=\rho(p_{\alpha_0})$ не мења превише норму елемента $\xi \in K$. Заиста, за $\xi \in K$, користећи (4.1.14) имамо

$$\|P_{\alpha_0}\xi\| = \|P_{\alpha_0}P\xi\| = \|P\xi-(P-P_{\alpha_0}P)\xi\| \leqslant (1+\delta)\|\xi\|,$$

и такође,

$$\begin{aligned} \|P_{\alpha_0}\xi\| = \|P_{\alpha_0}P\xi\| &= \|P\xi - (P - P_{\alpha_0}P)\xi\| \\ &\geqslant \|\xi\| - \|(P - P_{\alpha_0}P)\xi\| \geqslant (1-\delta)\|\xi\|. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Желимо да докажемо да су $I - P'$ и P (и слично $I - P$ и P') „скоро ортогонални”.

Нека је $\eta = (I-P)\eta$ и $\zeta = P'\zeta$. Онда је $\zeta = P_{\alpha_0}\xi$ за неко $\xi = P\xi \in K$, па из (4.1.15) следи $\|\zeta\| \geqslant (1-\delta)\|\xi\|$. Даље, имамо

$$\langle \zeta, \eta \rangle = \langle P_{\alpha_0}P\xi, (I-P)\eta \rangle = -\left\langle (P - P_{\alpha_0}P)\xi, (I-P)\eta \right\rangle,$$

а одавде

$$|\left\langle \zeta, \eta \right\rangle| \leqslant \|P - P_{\alpha_0}P\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}\|\zeta\| \cdot \|\eta\|.$$

Према томе, коришћењем Леме 4.2 имамо

$$\|p'(1-p)\| = \|P'(I-P)\| < \frac{\delta}{1-\delta}. \tag{4.1.16}$$

Сада, нека је $\zeta = (I-P')\zeta$ и $\eta = P\eta$. Онда је $\zeta \perp P_{\alpha_0}P\eta$ (због $P_{\alpha_0}P\eta \in P'H$) и важи

$$\begin{aligned} |\left\langle \zeta, \eta \right\rangle| = |\left\langle (I-P')\zeta, P\eta \right\rangle| &= |\left\langle (I-P')\zeta, (P - P_{\alpha_0}P)\eta \right\rangle| \\ &\leqslant \|P - P_{\alpha_0}P\| \cdot \|\zeta\| \cdot \|\eta\| \leqslant \delta\|\zeta\| \cdot \|\eta\|, \end{aligned}$$

одакле помоћу Леме 4.2 можемо закључити

$$\|p - p'p\| = \|P - P'P\| \leqslant \delta. \tag{4.1.17}$$

Из (4.1.16) и (4.1.17) добијамо

$$\|p - p'\| \leqslant \|p - p'p\| + \|p' - p'p\| \leqslant \delta \cdot \frac{2-\delta}{1-\delta},$$

па $\|p - p'\|$ може бити произвољно мало. ■

Лема 4.9. *Нека је $\mathcal{F}$ алгебра елемената „коначног типа”. За сваки пројектор $p \in \mathcal{F}$ постоји апроксимативна јединица p_α у $\mathcal{F}$ таква да за свако α важи $p \leqslant p_\alpha$.*

Доказ: Нека је $p \in \mathcal{F}$ и нека је p_α апроксимативна јединица. Користећи Лему 4.8, за довољно велико α, имамо $p \sim p' \leqslant p_\alpha$ и $\|p - p'\| < 1$. На основу Леме 4.1 постоји унитаран елемент u такав да је $p' = u^* p u$. Онда је $p'_\alpha = u p_\alpha u^*$ апроксимативна јединица која садржи p. ■

Следеће тврђење има кључну улогу у овом поглављу. Оно нам омогућава да скоро инвертибилан горње троугаони (посматран у смислу Напомене 4.1) елемент, где имамо леву апроксимативну јединицу (то јест, леви пројектор је садржан у овој јединици), можемо посматрати као доње троугаони облик у односу на почетну леву и неку десну апроксимативну јединицу.

Тврђење 4.2. *Нека су $p, q \in \mathcal{F}$ и нека је a инвертибилан у односу на (p, q), при чему је $qa(1-p) = 0$. Даље, нека је $p_\alpha \geqslant p$ апроксимативна јединица за $\mathcal{F}$. Онда постоји апроксимативна јединица $q_\alpha \in \mathcal{F}$, таква да је $q_\alpha - q \sim p_\alpha - p$, елемент a је инвертибилан у односу на (p_α, q_α) и*

$$(1 - q_\alpha) a (p_\alpha - p) = 0, \tag{4.1.18}$$

за свако α.

Доказ: Како је $a' = (1-q)a(1-p)$ инвертибилан и $p_\alpha - p \leqslant 1 - p$, постоји (Лема 4.5) минималан пројектор q'_α такав да је $q'_\alpha a(p_\alpha - p) = a(p_\alpha - p)$ и тада је a инвертибилан у односу на $(1 - (p_\alpha - p), 1 - q'_\alpha)$. Користећи $qa(1-p) = 0$ и Лему 4.7 добијамо $q'_\alpha \leqslant 1 - q$. Нека је $q_\alpha = q + q'_\alpha$. Имамо

$$(q_\alpha - q) a (p_\alpha - p) = a(p_\alpha - p) \tag{4.1.19}$$

и као последицу тога (4.1.18). Заиста, користећи $qa(1-p) = 0$, добијамо $qa = qap$ и одавде $qap_\alpha = qapp_\alpha = qap$. Одатле је $qa(p_\alpha - p) = 0$, па из (4.1.19) имамо $q_\alpha a(p_\alpha - p) = a(p_\alpha - p)$, што је еквивалентно са (4.1.18).

С обзиром да је $p_\alpha - p \leqslant 1 - p$ имамо $qa(p_\alpha - p) = 0$, а из (4.1.18) следи

$$0 = (1-q_\alpha)a(p_\alpha - p) = (1-q_\alpha)a(p_\alpha - p) + qa(p_\alpha - p) = (1-(q_\alpha - q))a(p_\alpha - p),$$

то применом Леме 4.6 добијамо да је a инвертибилан у односу на (p_α, q_α). Даље, $q'_\alpha \sim p_\alpha - p \in \mathcal{F}$ и $q_\alpha = q'_\alpha + q \in \mathcal{F}$. Први део тврђења је доказан.

Доказаћемо да је q_α лева апроксимативна јединица за $\mathcal{F}$. Нека је $a' = (1-q)a(1-p)$ и нека је $f \in \mathcal{F}$. Из $qa(1-p) = 0$ и $q_\alpha \geqslant q$, следи $a' = a(1-p) = a - (1-q)ap - qap$ и $(1-q_\alpha)a' = (1-q_\alpha)a(1-p) = (1-q_\alpha)a - (1-q_a)ap$. Сада, применом формуле 4.1.18, имајући у виду да је $(1-q_\alpha)$ ограничен у норми и да је p_α апроксимативна јединица, имамо да је $(1-q_\alpha)a'f = (1-q_\alpha)a(1-p)f = (1-q_\alpha)a(1-p_\alpha)f \to 0$ у норми за било које $f \in \mathcal{F}$. Дакле, q_α је лева апроксимативна јединица за $a'\mathcal{F}$. Међутим, $f \in \mathcal{F}$ се може записати као $f = (1-q)f + qf = a'bf + qf$. С обзиром да је $q \leqslant q_\alpha$, важи $(1-q_\alpha)q = 0$, одакле је

$$(1-q_\alpha)f = (1-q_\alpha)a'bf \to 0 \qquad \text{у норми.}$$

Да бисмо завршили доказ, покажимо да пресликавање $p_\alpha \mapsto q_\alpha$ чува поредак. Заиста, ако је $p_\beta \geqslant p_\alpha$, имамо

$$(q_\alpha - q)a(p_\alpha - p) = a(p_\alpha - p), \qquad (q_\beta - q)a(p_\beta - p) = a(p_\beta - p),$$

при чему $q_\alpha - q$ и $q_\beta - q$ имају особину минималности. Множењем друге једнакости здесна са $(p_\alpha - p)$ и коришћењем $(p_\beta - p)(p_\alpha - p) = p_\alpha - p$ добијамо $(q_\beta - q)a(p_\alpha - p) = a(p_\alpha - p)$, одакле, због минималности, важи $q_\beta \geqslant q_\alpha$.

С обзиром да $\mathcal{F}$ чини *-идеал, q_α је лева апроксимативна јединица. ■

4.1.4 Индекс и његове особине

У овом одељку дефинисаћемо индекс елемента a који је инвертибилан у односу на неки пар (p, q) и тај индекс ће бити елемент групе $K(\mathcal{F})$, односно $([p], [q])$. Да би дефиниција била коректна, прво ћемо показати да се елемент $([p],[q])$ групе $K(\mathcal{F})$ неће изменити, ако узмемо неки други пар пројектора у односу на које је фиксирани елемент a инвертибилан.

Тврђење 4.3. *Нека је $a \in \mathcal{A}$ инвертибилан у односу на (p,q) и у односу на (p',q') и нека су $p,q,p',q' \in \mathcal{F}$. Тада у $K(\mathcal{F})$ важи*

$$([p],[q]) = ([p'],[q']),$$

или са мање формалности

$$[p]-[q] = [p']-[q'].$$

Доказ: На основу Тврђења 4.1, можемо претпоставити $qa(1-p) = q'a(1-p') = 0$. Из истог тврђења следи да та претпоставка неће изменити класе $[q]$ и $[q']$.

Лема 4.9 нам даје апроксимативну јединицу p_α идеала $\mathcal{F}$ која садржи p. За свако α ставимо $r_\alpha = p_\alpha - p$, тј.

$$p_\alpha = p + r_\alpha. \tag{4.1.20}$$

На основу Леме 4.8, постоји довољно велико α, тако да за неко $p'' \leqslant p_\alpha$ важи $p'' \sim p'$ и $\|p''-p'\| < \delta$, где је $\delta < 1/2$, $\delta < 1/(4C\|a\|\cdot\|b'\|)$, C константа из (4.1.2) и b' је (p',q')-инверз елемента a. Ставимо $r'_\alpha = p_\alpha - p''$, тј.

$$p_\alpha = p'' + r'_\alpha. \tag{4.1.21}$$

На основу формула (4.1.20) и (4.1.21) следи

$$[p]+[r_\alpha] = [p']+[r'_\alpha]. \tag{4.1.22}$$

Коришћењем Тврђења 4.2, постоји друга апроксимативна јединица $q_\alpha \geqslant q$ таква да је $q_\alpha - q \sim p_\alpha - p$, a је инвертибилан у односу на (p_α, q_α) и важи (4.1.18). Нека је $s_\alpha = q_\alpha - q$. Онда је

$$q_\alpha = q + s_\alpha \quad \text{и} \quad r_\alpha \sim s_\alpha. \tag{4.1.23}$$

За довољно велико α постоји $q'' \leqslant q_\alpha$ тако да је $q'' \sim q'$ и $\|q'' - q'\| < \delta$ и због тога је

$$q_\alpha = q'' + s'_\alpha.$$

Према томе,

$$[q] + [s_\alpha] = [q'] + [s'_\alpha]. \tag{4.1.24}$$

Помоћу Леме 4.4-(б), коришћењем неједнакости $\|p''-p'\| < C_1$ и $\|q''-q'\| < C_1$, где је $C_1 = \min\{1/2, 1/(4C\|a\| \cdot \|b'\|)\}$ закључујемо да је a инвертибилан у односу на (p'', q''). Такође, ако b'' јесте (p'', q'')-инверз елемента a, онда је $\|b''\| \leqslant 2\|b'\|$.

Затим, процењујемо $\|(1-q_\alpha)a(p_\alpha - p'')\|$. На основу (4.1.18) имамо

$$\begin{aligned}(1-q_\alpha)\ a\ (p_\alpha - p'') &= (1-q_\alpha)a(p_\alpha - p + p - p' + p' - p'')\\ &= (1-q_\alpha)a(p_\alpha - p) + (1-q_\alpha)a(p-p') + (1-q_\alpha)a(p'-p'')\\ &= (1-q_\alpha)a(p-p') + (1-q_\alpha)a(p'-p'').\end{aligned}$$

С обзиром да је q_α апроксимативна јединица, за довољно велико α, можемо претпоставити $\|(1-q_\alpha)a(p-p')\| < \|a\|\delta$. Стога, важи

$$\|(1-q_\alpha)a(p_\alpha - p'')\| < 2\|a\|\delta < 1/(2C\|b'\|) \leqslant 1/(C\|b''\|).$$

Због $C > 1$, можемо применити Лему 4.6 да бисмо доказали $q_\alpha - q'' \sim p_\alpha - p''$, односно,

$$r'_\alpha \sim s'_\alpha. \tag{4.1.25}$$

Одузимајући (4.1.24) од (4.1.22) добијамо

$$[p] + [r_\alpha] - [q] - [s_\alpha] = [p'] + [r'_\alpha] - [q'] - [s'_\alpha],$$

а знамо да је $[r_\alpha] - [s_\alpha] = 0$ (на основу (4.1.23)) и $[r'_\alpha] - [s'_\alpha] = 0$ (на основу (4.1.25)), чиме се завршава доказ. ■

Напомена 4.2. Треба имати у виду да у претходним доказима добијамо еквиваленцију у смислу Мареј фон Нојмана, а сада узимамо у обзир закон скраћивања у K групи. Тиме добијамо да може бити $([p], 0) = ([q], 0)$

у K групи, иако p и q нису Мареј фон Нојман еквивалентни пројектори. Наиме, ако основна полугрупа не задовољава закон скраћивања, Гротендиков функтор проширује почетну релацију еквиваленције.

Дефиниција 4.5. Нека је $\mathcal{F}$ скуп елемената „коначног типа”. Рећи ћемо да је $a \in \mathcal{A}$ *Фредхолмовог типа* (или апстрактан Фредхолмов елемент) ако постоје $p, q \in \mathcal{F}$ такви да је a инвертибилан у односу на (p, q). *Индекс* елемента a (или апстрактан индекс) је елемент групе $K(\mathcal{F})$ дефинисан помоћу

$$\operatorname{ind}(a) = ([p], [q]) \in K(\mathcal{F}),$$

или са мање формалности

$$\operatorname{ind}(a) = [p] - [q].$$

Напоменимо да је индекс добро дефинисан захваљујући Тврђењу 4.3.

На основу претходне дефиниције, можемо извести неке важне особине апстрактног индекса.

Тврђење 4.4. *Скуп елемената Фредхолмовог типа је отворен у $\mathcal{A}$ и индекс је локално константна функција.*

Доказ: Доказ непосредно следи из Леме 4.4. ∎

Тврђење 4.5. (а) *Нека је $a \in \mathcal{A}$ елемент Фредхолмовог типа и нека је $f \in \mathcal{F}$. Онда је $a + f$ такође Фредхолмовог типа и важи* $\operatorname{ind}(a + f) = \operatorname{ind} a$.

(б) *Ако је $f \in \mathcal{F}$, онда је $1 + f$ Фредхолмовог типа и* $\operatorname{ind}(1 + f) = 0$. *Штавише, постоји $p \in \mathcal{F}$ такав да је $1 + f$ инвертибилан у односу на (p, p).*

Доказ: (а) Нека су $p, q \in \mathcal{F}$ пројектори такви да је a инвертибилан у односу на (p, q). Због Тврђења 4.1, без умањења општости, можемо претпоставити да је $qa(1 - p) = 0$. На основу Леме 4.9 и Тврђења 4.2, постоје апроксимативне јединице $p_\alpha \geqslant p$, $q_\alpha \geqslant q$ такве да је a инвертибилан у односу на (p_α, q_α) и такве да важи (4.1.18). Са b означимо (p,q)-инверз елемента a, а са b_α означимо (p_α, q_α)-инверз елемента a. Из доказа Леме 4.6 следи да је $b_\alpha = (1-p_\alpha)b(1-q_\alpha)$, а одавде закључујемо да је $\|b_\alpha\| \leqslant \|b\|$. Узимајући у обзир да важи $\|(1-q_\alpha)f(1-p_\alpha)\| \to 0$, можемо изабрати довољно велико α тако да је $\|(1-q_\alpha)f(1-p_\alpha)\| < \|b_\alpha\|^{-1}$. Због следеће једнакости

$$(1-q_\alpha)(a+f)(1-p_\alpha) = (1-q_\alpha)a(1-p_\alpha) + (1-q_\alpha)f(1-p_\alpha)$$

и на основу Леме 4.4, $a+f$ је такође инвертибилан у односу на (p_α, q_α) и одавде $\operatorname{ind}(a+f) = [p_\alpha] - [q_\alpha] = \operatorname{ind} a$.

(б) Ово је специјалан случај дела под (а), када је $a = 1$, па можемо узети $q_\alpha = p_\alpha$. ■

Тврђење 4.6. (а) *Ако је a елемент Фредхолмовог типа, онда је a инвертибилан по модулу $\mathcal{F}$.*

(б) *Обратно, ако је a инвертибилан по модулу $\mathcal{F}$, онда је a елемент Фредхолмовог типа.*

Доказ: (а) Претпоставимо да је a инвертибилан у односу на (p,q). Нека је b инверз елемента a у односу на (p,q). Онда је $ab = (1-q)ab + qab = (1-q)a(1-p)b + qab = 1 - q + qab \in 1 + \mathcal{F}$ и $ba = ba(1-p) + bap = b(1-q)a(1-p) + bap = 1 - p + bap \in 1 + \mathcal{F}$.

(б) Нека је $ab_1 = 1+f_1$, $b_2a = 1+f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. На основу Тврђења 4.5-(б), постоји $p \in \mathcal{F}$ такво да је ab_1 инвертибилан у односу на (p,p). Одатле је a^* лево инвертибилан у односу на p (његов леви инверз је $c^*(1-p)b_1^*$, где је $c \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ (p,p)-инверз елемента ab_1). Према томе, на основу Леме 4.5, постоји пројектор $1-r \in \mathcal{A}$ такав да је $(1-r)a^*(1-p) = a^*(1-p)$, што је еквивалентно са

$$(1-p)a = (1-p)a(1-r). \qquad (4.1.26)$$

Поред тога, на основу Леме 4.5, a је инвертибилан у односу на (p,r). Остаје да се докаже $r \in \mathcal{F}$.

Посматрајући $(1-p)a$ уместо a, имамо

$$b_2(1-p)a = b_2a - b_2pa = 1 + f_2 - b_2pa = 1 + f_2' \in 1 + \mathcal{F}.$$

Као и пре, на основу Тврђења 4.5, постоји $q \in \mathcal{F}$ тако да је елемент $b_2(1-p)a$ инвертибилан у односу на (q,q). На основу Тврђења 4.1, постоји пројектор $q' \in \mathcal{F}$ такав да је $(1-q)b_2(1-p)aq' = 0$ и $b_2(1-p)a$ је инвертибилан у односу на (q',q). Последња једнакост је еквивалентна са

$$(1-q)b_2(1-p)a(1-q') = (1-q)b_2(1-p)a.$$

Ако је t (q',q)-инверз елемента $b_2(1-p)a$, онда је

$$(1-q')r = t(1-q)b_2(1-p)a(1-q')r = t(1-q)b_2(1-p)ar = 0,$$

а због (4.1.26) важи $(1-p)ar = 0$. Према томе, $r = q'r \in \mathcal{F}$, јер је $\mathcal{F}$ идеал. ∎

Теорема 4.1. *(Теорема о индексу) Нека је $\mathcal{A}$ произвољна C^*-алгебра и нека је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ идеал елемената „коначног типа". Ако су t_1 и t_2 елементи Фредхолмовог типа онда је такође и t_1t_2 елемент Фредхолмовог типа. Поред тога, важи*

$$\operatorname{ind}(t_1t_2) = \operatorname{ind} t_1 + \operatorname{ind} t_2.$$

Другим речима, ако означимо скуп свих елемената Фредхолмовог типа са $\mathrm{Fred}(\mathcal{F})$*, онда је* $\mathrm{Fred}(\mathcal{F})$ *полугрупа (са јединицом) у односу на множење и пресликавање* ind *је хомоморфизам између* $(\mathrm{Fred}(\mathcal{F}),\cdot)$ *и* $(K(\mathcal{F}),+)$*.*

Доказ: Нека су $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathcal{F}$ пројектори такви да је t_1 инвертибилан у односу на (p_1,q_1) и t_2 инвертибилан у односу на (p_2,q_2). На основу Леме 4.9 и Тврђења 4.2, постоје апроксимативне јединице $p_\alpha \geqslant p_2$, $q_\alpha \geqslant q_2$, $p_\alpha, q_\alpha \in \mathcal{F}$ такве да је t_2 инвертибилан у односу на (p_α, q_α) и

$$\operatorname{ind} t_2 = [p_2] - [q_2] = [p_\alpha] - [q_\alpha]. \tag{4.1.27}$$

На основу Леме 4.8 постоје α и p' такви да је $p' \sim p_1$, $p' \leqslant q_\alpha$ и такви да је $\|p_1 - p'\|$ довољно мало. Због Леме 4.4-(б), t_1 је инвертибилан у односу на (p', q_1) и одатле $\operatorname{ind} t_1 = [p'] - [q_1]$.

Даље, на основу Тврђења 4.1 постоји пројектор $q' \sim q_1$ такав да је t_1 инвертибилан у односу на (p', q') и

$$q' t_1 (1 - p') = 0, \tag{4.1.28}$$

и одатле

$$\operatorname{ind} t_1 = [p'] - [q']. \tag{4.1.29}$$

Нека је $r = q_\alpha - p'$. Важи $r \leqslant 1 - p'$, па на основу Леме 4.5, постоји минимални пројектор s такав да је

$$s t_1 r = t_1 r. \tag{4.1.30}$$

Такође, $r \sim s$ и t_1 је инвертибилан у односу на $(1 - r, 1 - s)$. Из (4.1.28) и Леме 4.7 следи $s \leqslant 1 - q'$. Очигледно, $1 - q' - s$ је пројектор и $1 - q' - s \leqslant 1 - s$, па из (4.1.30) закључујемо да је $(1 - s) t_1 r = 0$, а одавде $(1 - q' - s) t_1 r = (1 - q' - s)(1 - s) t_1 r = 0$. Према томе, на основу Леме 4.6 добијамо да је t_1 инвертибилан у односу на $(q_\alpha, q' + s)$.

Сада је лако извести да је $t_1(1 - q_\alpha) t_2$ инвертибилан у односу на $(p_\alpha, q' + s)$. Наиме, ако v_1 је $(q_\alpha, q' + s)$-инверз елемента t_1 и v_2 је (p_α, q_α)-инверз елемента t_2, једноставним рачуном долазимо до тога да је $v_2 v_1$ $(p_\alpha, q' + s)$-инверз елемента $t_1(1 - q_\alpha) t_2$. Према томе, $t_1(1 - q_\alpha) t_2$ је елемент Фредхолмовог типа и

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(t_1(1 - q_\alpha) t_2) &= [p_\alpha] - [q'] - [s] = [p_\alpha] - [q_\alpha] + [q_\alpha] - [q'] - [r] \\ &= [p_\alpha] - [q_\alpha] + [p'] - [q'] = \operatorname{ind} t_1 + \operatorname{ind} t_2. \end{aligned}$$

Елементи $t_1 t_2$ и $t_1(1 - q_\alpha) t_2$ се разликују за $t_1 q_\alpha t_2 \in \mathcal{F}$, па на основу Тврђења 4.5 (а), $t_1 t_2$ је такође елемент Фредхолмовог типа и његов индекс је исти као и индекс елемента $t_1(1 - q_\alpha) t_2$. ■

4.2 Последице

У овом потпоглављу показаћемо да су класични Фредхолмови оператори на Хилбертовом простору, Фредхолмови оператори у смислу Атије и Сингера над II_∞ факторима и Фредхолмови оператори на Хилбертовим C^*-модулима специјални случајеви Фредхолмових оператора које смо увели у претходном потпоглављу. То ћемо урадити добрим избором C^*-алгебре и идеалом елемената „коначног типа”.

4.2.1 Класични Фредхолмови оператори на Хилбертовим просторима

Последица 4.1. *Нека је $\mathcal{A} = B(H)$ алгебра ограничених линеарних оператора на бесконачно димензионалном Хилбертовом простору H и нека је $\mathcal{F}$ идеал компактних оператора. Тада пар $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ задовољава услове (а)-(в) Дефиниције 4.2. Одавде, класични Фредхолмови оператори су специјални случај елемената Фредхолмовог типа дефинисаних у Дефиницији 4.5.*

Доказ: Идеал свих компактних оператора је самоадјунговани идеал у $B(H)$, одакле важи (а) из Дефиниције 4.2.

Као што је познато, скуп свих пројектора коначног ранга је апроксимативна јединица за компактне операторе. Овим смо доказали да важи (б) из Дефиниције 4.2. Штавише, у случају да је Хилбертов простор H сепарабилан, онда постоји пребројива апроксимативна јединица за $\mathcal{F}$. Прецизније, ако је P_n пројектор на простор генерисан са $\{e_1, \dots, e_n\}$, где је $\{e_j\}$ пребројив комплетан ортонормиран систем, онда је $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ пребројива апроксимативна јединица.

Сваки компактан пројектор $P \in \mathcal{F}$ је пројектор коначног ранга. Важи $H \ominus PH \cong H$, па можемо посматрати изоморфизам $V\colon H \to H \ominus PH$. Тада је VQV^* пројектор еквивалентан са Q, при чему је $VQV^*(H) \perp P(H)$. Према томе, $VQV^* + P$ је пројектор, одакле важи (в) из Дефиниције 4.2. ■

Пример 25. Нека је H сепарабилан Хилбертов простор са пребројивом базом $\{e_i\}$, $\mathcal{A} = B(H)$ и $\mathcal{F}$ идеал компактних оператора. Посматрајмо пројекторе $P, Q \in \mathcal{F}$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = a_1 e_1, \quad Q\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = a_1 e_1 + a_2 e_2.$$

Показаћемо да је оператор $A \in B(H)$,

$$A\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_{i+1}$$

инвертибилан у односу пар пројектора (P, Q). За почетак нађимо $A' = (I-Q)A(I-P)$,

$$\begin{aligned} A'\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) &= (I-Q)A(I-P)\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = (I-Q)A\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i e_i\right) \\ &= (I-Q)\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i e_{i+1}\right) = \left(\sum_{i=3}^{\infty} a_{i-1} e_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_{i+1}. \end{aligned}$$

За оператор A' постоји оператор $B \in B(H)$,

$$B\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} a_{i+1} e_i,$$

такав да је

$$A'B\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = A'\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_{i+1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+2} e_{i+2} = (I-Q)\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right),$$

$$\begin{aligned} BA'\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) &= B\left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i e_{i+1}\right) = B\left(\sum_{i=3}^{\infty} a_{i-1} e_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_i \\ &= (I-P)\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right), \end{aligned}$$

$$(I-P)B(I-Q)\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\right)=(I-P)B\left(\sum_{i=3}^{\infty}a_ie_i\right)=(I-P)\left(\sum_{i=2}^{\infty}a_{i+1}e_i\right)$$
$$=\sum_{i=2}^{\infty}a_{i+1}e_i=B\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\right),$$

односно

$$A'B=I-Q,\quad BA'=I-P,\quad (I-P)B(I-Q)=B.$$

Према томе, A је инвертибилан у односу на пар пројектора (P,Q), одакле је Фредхолмов оператор.

4.2.2 Фредхолмови оператори на фон Нојмановој алгебри

Друга примена је посвећена Фредхолмовим операторима у смислу Бројера [15, 16] на бесконачној фон Нојмановој алгебри. На почетку, навешћемо Бројерову дефиницију.

Дефиниција 4.6. [15, страна 250] Нека је $\mathcal{A}$ фон Нојманова алгебра, $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$ скуп свих пројектора који припадају $\mathcal{A}$ и нека је $\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$ скуп свих коначних пројектора у $\mathcal{A}$ (они пројектори који нису Мареј-фон Нојман еквивалентни са неким правим потпројектором).

Кажемо да је оператор $T\in\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$-*Фредхолмов* ако задовољава следеће особине:

(а) $P_{\ker T}\in\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$, где је $P_{\ker T}$ пројектор на потпростор $\ker T$;

(б) постоји пројектор $E\in\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$ такав да је $\mathrm{ran}(I-E)\subseteq\mathrm{ran}\,T$.

Други услов омогућује да $P_{\ker T^*}$ такође припада $\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$.

Индекс $\mathcal{A}$-Фредхолмовог оператора T се дефинише као

$$\mathrm{ind}\,T=\dim(\ker T)-\dim(\ker T^*)\in I(\mathcal{A}).\tag{4.2.1}$$

Код претходне дефиниције, група $I(\mathcal{A})$ је такозвана *група индекса* фон Нојманове алгебре $\mathcal{A}$, дефинисана као Гротендикова група комутативног моноида свих репрезентација комутанта $\mathcal{A}'$, генерисана репрезентацијама $\mathcal{A}' \ni S \mapsto SE = \pi_E(S)$ за неко $E \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$ [15, Поглавље 2]. За потпростор L, димензија $\dim L$ се дефинише као класа $[\pi_{P_L}] \in I(\mathcal{A})$ репрезентације π_{P_L}, где је P_L пројектор на L.

Пре доказа да је Бројеров $\mathcal{A}$-Фредхолмов оператор специјалан случај апстрактног Фредхолмовог оператора, навешћемо добро познате особине фон Нојманових алгебри.

Лема 4.10. *Скуп* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) = \{p \in \mathcal{A} \mid p$ *је пројектор*$\}$ *је комплетна мрежа. Додатно, ако су* $p, q \in \mathrm{Proj}(\mathcal{A})$*, онда* $p \vee q$ *(најмање горње ограничење скупа* $\{p, q\}$*) припада* $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$.

Доказ: Доказ се може наћи у [65, Тврђење V.1.1] и у [12, I.9.2.1(б)]. ■

Оператор $T \in \mathcal{A}$ се назива коначан ако $P_{\overline{\mathrm{ran}\, T}} \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$, где је $P_{\overline{\mathrm{ran}\, T}}$ пројектор на затворење његове слике. Скуп свих коначних оператора означићемо са $\mathfrak{m}_0$, а његово затворење по норми са $\mathfrak{m}$.

Лема 4.11. *Скуп* $\mathfrak{m}$ *је самоадјунгован и двострани идеал алгебре* $\mathcal{A}$*. Такође,* $\mathfrak{m}$ *је генерисан (као затворен самоадјунгован двострани идеал) помоћу* $\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$.

Доказ: Доказ се може наћи у [15, Поглавље 3]. ■

Лема 4.12. *Ако су* $p, q \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$*, онда је и* $p \vee q \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$.

Доказ: Доказ се може наћи у [65, Тврђење V.1.6] и у [12, III.1.1.3]. ■

Лема 4.13. *Нека је* $T \in \mathcal{A}$ *и нека је* $T = U|T|$ *његова поларна декомпозиција. Тада* $U, |T| \in \mathcal{A}$.

Доказ: Доказ се може наћи у [65, Тврђење II.3.14] и у [12, I.9.2.1(iii)]. ■

Лема 4.14. *Ако је $0 \leqslant T \in \mathcal{A}$, онда спектрални пројектори оператора T такође припадају $\mathcal{A}$.*

Доказ: Доказ се може наћи у [12, I.9.2.1(iv)]. ■

Лема 4.15. *Нека је $\mathcal{A}$ фон Нојманова алгебра која није „коначног типа”. Тада је елемент $T \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}$-Фредхолмов ако и само ако је T инвертибилан по модулу $\mathfrak{m}$.*

Доказ: Доказ се може наћи у раду [16, Теорема 1]. ■

Лема 4.16. *Нека је $\mathcal{A}$ фон Нојманова алгебра која није „коначног типа” и нека T је $\mathcal{A}$-Фредхолмов оператор. Тада је $|T|$ такође $\mathcal{A}$-Фредхолмов.*

Доказ: Нека је $T = V|T|$ поларно разлагање оператора T. На основу Леме 4.13, $|T| \in \mathcal{A}$ и на основу Леме 4.15, постоји $S \in \mathcal{A}$ тако да је ST, $TS \in 1 + \mathfrak{m}$, то јест, S је $\mathfrak{m}$-инверз оператора T. Лако је проверити да је SV леви $\mathfrak{m}$-инверз оператора $|T|$, као и да је V^*S^* десни $\mathfrak{m}$-инверз оператора $|T|$. Према томе, $|T|$ је инвертибилан по модулу $\mathfrak{m}$, а одатле, на основу Леме 4.15, $|T|$ је $\mathcal{A}$-Фредхолмов. ■

Лема 4.17. *Нека је T позитиван $\mathcal{A}$-Фредхолмов оператор и нека је E_T његова спектрална мера. Тада, постоји $\delta > 0$ тако да је $E_T([0, \delta)) \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$.*

Доказ: Из Дефиниције 4.6, постоји затворен потпростор $L \subseteq \operatorname{ran} T$, чији је комплемент коначан пројектор ($I - P_L \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$). Посматрајмо рестрикцију $T_1 = T|_{\ker T^\perp}$ и дефинишимо $L_1 = T_1^{-1}(L)$. Пошто су L_1 и L затворени, на основу теореме о отвореном пресликавању, T_1 је тополошки изоморфизам између L_1 и L. Одавде, постоји $\delta > 0$ тако да за свако $\xi \in L_1$ важи $\|T\xi\| > \delta\|\xi\|$. Међутим, за $\xi \in \operatorname{ran} E_T([0, \delta))$ имамо $\|T\xi\| \leqslant \delta\|\xi\|$, односно, $L_1 \cap \operatorname{ran} E_T([0, \delta)) = \{0\}$. Према томе, довољно је да докажемо да је $L_1^\perp$ коначан, јер је $E_T([0, \delta)) \leqslant P_{L_1^\perp}$.

Нека је $L_2 = (\ker T)^\perp \ominus L_1$. Очигледно, $T(L_2) \cap L = \{0\}$, што значи да $(I - P_L)T$ ињективно слика L_2 на потпростор простора $L^\perp$. На основу Леме 4.13, примењене на $(I - P_L)TP_{L_2}$, постоји парцијална изометрија

$W \in \mathcal{A}$ која повезује L_2 и затворење L_3 оператора $(I - P_L)T(L_2)$ који је потпростор простора $L^\perp$. Пошто је $L^\perp$ коначан, онда су и $L_3 \subseteq L^\perp$ и L_2 (јер је $P_{L_2} \sim P_{L_3}$) такође коначни. Из Дефиниције 4.6 $\ker T$ је коначан, па је и $L_1^\perp$ коначан. ■

Последица 4.2. *Нека је $\mathcal{A}$ бесконачна фон Нојманова алгебра која дејствује на Хилбертов простор H и нека је $\mathfrak{m}$ затворење у норми скупа свих коначних оператора. Тада пар $(\mathcal{A}, \mathfrak{m})$ задовољава особине (а)-(в) Дефиниције 4.2.*

Штавише, апстрактни Фредхолмови елементи су уопштење Фредхолмових оператора у Бројеровом смислу.

Доказ: На основу Леме 4.11, $\mathfrak{m}$ је *-идеал који задовољава (а) у Дефиницији 4.2.

Докажимо да је скуп $\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$ апроксимативна јединица. Прво, ово је усмерен скуп. Заиста, нека су $p, q \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$. Пројектор у фон Нојмановој алгебри чини комплетну мрежу (Лема 4.10), па пројектор $p \vee q$ припада $\mathcal{A}$. На основу Леме 4.12, $p \vee q \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$. Ако $T \in \mathfrak{m}$ и ако је $T = U|T|$ његова поларна декомпозиција, онда на основу Леме 4.13, $U, |T| \in \mathcal{A}$ и било која спектрална пројекција оператора $|T|$ такође припада $\mathcal{A}$. Изаберимо произвољно $\varepsilon > 0$ и означимо $P_\varepsilon = E_{|T|}(\varepsilon, +\infty)$, где $E_{|T|}$ означава спектралну меру оператора $|T|$. Онда, из $P_\varepsilon \leqslant P_{\overline{\mathrm{ran}\, T}}$ следи $P_\varepsilon \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$. Затим, функција $\lambda \mapsto \lambda(1 - \chi_{(\varepsilon, +\infty)})$ је ограничена са ε, па је $\| \, |T|(I - P_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon$. За свако $P \geqslant P_\varepsilon$ имамо $I - P \leqslant I - P_\varepsilon$ и одавде је $\|U|T|(I - P)\| = \|U|T|(I - P_\varepsilon)(I - P)\| \leqslant \varepsilon$. Дакле, $\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$ је апроксимативна јединица за $\mathfrak{m}_0$, па је и за његово затворење $\mathfrak{m}$. Доказали смо (б) у Дефиницији 4.2.

Имајући у виду да је $\mathcal{A}$ бесконачна алгебра, за $P, Q \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$, важи $I - P \sim I$ ([16, Лема 8]), односно, постоји парцијална изометрија V таква да је $V^*V = I$ и $VV^* = I - P$. Онда је QV^* парцијална изометрија која се тражи у особини (в) Дефиниције 4.2.

Користећи Тврђење 4.6 и Лему 4.15, можемо видети да се Фредхолмови оператори у односу на $(\mathcal{A}, \mathfrak{m})$ подударају са $\mathcal{A}$-Фредхолмовим операторима у смислу Бројера. Докажимо да се и њихови индекси поклапају.

Нека је T Фредхолмов оператор. Из Леме 4.17, постоји $\delta > 0$ такво да је $P = E_{|T|}[0, \delta) \in \mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$. Оператор $|T|$ је ограничен одоздо на простору $E_{|T|}[\delta, \infty)(H) = (I - P)(H)$, па је $T = V|T|$ такође ограничен одоздо на $(I-P)(H)$. Ако је $I - Q$ пројектор на затворење потпростора $T(I-P)(H)$, онда је T инвертибилан у односу на (P, Q).

Важи $P = P_{\ker T} \oplus E_{|T|}(0, \delta) = P_{\ker T} \oplus P_1$ и $N_1 = P_1(H)$ је инваријантан за $|T|$. С обзиром да је V парцијална изометрија на N, T слика N_1 сурјективно на неки потпростор N_2, при чему је $P_{N_2} \sim P_{N_1}$, а одатле $P(H) = \ker T \oplus P_{N_1}(H)$, $Q = \ker T^* \oplus P_{N_2}(H)$ и $P_{N_1} \sim P_{N_2}$. ■

Напомена 4.3. Услов (в) у Дефиницији 4.2 није неопходан. Ако га изоставимо, немамо полугрупу већ условно сабирање. Међутим, можемо формирати одговарајућу K групу, полазећи од слободне групе са $\mathrm{Proj}_0(\mathcal{A})$ као генераторима, а затим користећи одговарајуће идентификације. Добијена група биће изоморфна са $I(\mathcal{A})$.

4.2.3 Фредхолмови оператори на стандардном Хилбертовом C^*-модулу

Приказаћемо још један специјалан случај Фредхолмове теорије на стандардном Хилбертовом C^*-модулу $H_{\mathcal{A}}$ над јединичном C^*-алгебром $\mathcal{A}$. Навешћемо неке дефиниције и позната тврђења која се могу наћи код Минга [46] и Мишченка и Фоменка [47]. За више детаља читаоцу се препоручује књига [44].

Дефиниција 4.7. Оператор $T\colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}$ је *Фредхолмов у смислу Мишченка и Фоменка* (МФ смисао у наставку) ако важи (а) T има адјунговани; (б) постоји декомпозиција домена $H_{\mathcal{A}} = \mathcal{M}_1 \tilde{\oplus} \mathcal{N}_1$ и кодомена $H_{\mathcal{A}} = \mathcal{M}_2 \tilde{\oplus} \mathcal{N}_2$, где су $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ коначно генерисани пројективни подмодули и оператор T у односу на такве декомпозиције има матричну форму $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, при чему је T_1 изоморфизам.

Индекс оператора T је $\operatorname{ind} T = [\mathcal{N}_1] - [\mathcal{N}_2] \in K(\mathcal{A})$.

Може се доказати да је индекс добро дефинисан, односно, да не зависи од декомпозиције слике и домена у Дефиницији 4.7 (видети [44, Теорема 2.7.9]).

Лема 4.18. *Нека је* $\mathcal{A}$ *произвољна* C^**-алгебра. Нека су* M *и* N *Хилбертови* $\mathcal{A}$*-модули. Нека је* $F\colon M \to N$ *тополошки инјективан, то јест, постоји* $\delta > 0$ *такво да је* $\|Fx\| \geqslant \delta\|x\|$ *за свако* $x \in M$ *и нека је* $\mathcal{A}$*-хомоморфизам који допушта адјунговање. Тада је* $F(M) \oplus F(M)^{\perp} = N$*.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Последица 2.3.5].

Теорема 4.2. *У Дефиницији 4.7 можемо увек претпоставити да су модули* M_1 *и* M_2 *ортогонално допуњиви. Штавише, постоји декомпозиција оператора* T*,*

$$\begin{pmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & T_4 \end{pmatrix} : H_{\mathcal{A}} = V_0 \widetilde{\oplus} W_0 \to V_1 \widetilde{\oplus} W_1 = H_{\mathcal{A}},$$

таква да је $V_0^{\perp} \oplus V_0 = H_{\mathcal{A}},\ V_1^{\perp} \oplus V_1 = H_{\mathcal{A}}$*.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 2.7.6].

Теорема 4.3. *Нека су* T_1 *и* T_2 *произвољни МФ-Фредхолмови оператори,*

$$T_1\colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}, \quad T_2\colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}.$$

Тада оператор $T_2T_1\colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}$ *је МФ-Фредхолмов и важи* $\operatorname{ind} T_2T_1 = \operatorname{ind} T_2 + \operatorname{ind} T_1$.

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 2.7.11]. ■

Скуп компактних оператора на стандардном Хилбертовом модулу $H_{\mathcal{A}}$ означимо са $K(H_{\mathcal{A}})$.

Теорема 4.4. *Нека је* $T\colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}$ *произвољан МФ-Фредхолмов оператор и нека је* $K \in K(H_{\mathcal{A}})$*. Тада је оператор* $T + K$ *МФ-Фредхолмов и важи* $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 2.7.13]. ■

Напомена 4.4. Код Хилбертових модула термин компактан смо стављали под знаком наводника да бисмо их разликовали од компактних у Банаховом смислу. Међутим, у наставку то нећемо радити, јер се компактни оператори у Банаховом смислу не појављују.

Дефиниција 4.8. [46, Дефиниција §1.1.] Оператор $T \in B^a(H_{\mathcal{A}})$ је Фредхолмов у смислу Минга ако је инвертибилан по модулу компактних оператора.

Тврђење 4.7. *[46, §1.4.] Оператор T је* Фредхолмов у смислу Минга *ако и само ако постоји компактна пертурбација S оператора T (односно $T - S$ је компактан), тако да су $\ker S$ и $\ker S^*$ коначно генерисани пројективни. Разлика*

$$[\ker S] - [\ker S^*] \in K_0(\mathcal{A}) \tag{4.2.2}$$

не зависи од избора S.

Дефиниција 4.9. [46, §1.4.] *Мингов индекс* Фредхолмовог оператора се дефинише као разлика (4.2.2), где је S нека компактна пертурбација оператора T.

Тврђење 4.8. *Ако је T инвертибилан по модулу компактних, онда је T Фредхолмов у МФ смислу.*

Доказ: Доказ се може наћи у књизи [44, Теорема 2.7.14]. ■

Очигледно је да импликација у другом смеру важи. Наиме, ако је T Фредхолмов у МФ смислу, онда је $\begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ инверз оператора T по модулу компактних.

Потребна нам је и следећа лема.

Лема 4.19. *Нека је $H_{\mathcal{A}} = \mathcal{M} \tilde{\oplus} \mathcal{N}$, где је $\mathcal{N}$ коначно генерисан, пројективан и $\mathcal{M}$ је допуњив. Нека је P ортогоналан пројектор на $\mathcal{N}$. Тада је $I - P$ ограничен одоздо на $\mathcal{M}$.*

Доказ: Претпоставимо супротно да постоји низ $x_n \in \mathcal{M}$, $\|x_n\| = 1$ и $(I - P)x_n \to 0$. Представимо $(I - P)x_n$ као

$$(I - P)x_n = y_n' + y_n'', \qquad y_n' \in \mathcal{M},\ y_n'' \in \mathcal{N}. \tag{4.2.3}$$

Посматрајмо $\mathcal{A}$-линеаран, коси пројектор $P_1 \colon H_{\mathcal{A}} \to M$ дуж N. На основу Леме 1.1 он је ограничен ($\|P_1\| \leqslant M$). Тада је

$$\|y_n'\| = \|P_1(y_n' + y_n'')\| \leqslant M\|y_n' + y_n''\| = M\|(I-P)x_n\|,$$

одакле $y_n' \to 0$. Међутим, из (4.2.3) добијамо $\mathcal{M} \ni x_n - y_n' = Px_n + y_n'' \in \mathcal{N}$, а пошто је $\mathcal{M}\tilde{\oplus}\mathcal{N}$ директна сума, онда су обе стране једнаке 0. Одавде је $x_n = y_n' \to 0$, што је у контрадикцији са $\|x_n\| = 1$. ■

Последица 4.3. *Нека је $H_{\mathcal{A}}$ стандардан Хилбертов модул над јединичном C^*-алгебром $\mathcal{A}$, $B^a(H_{\mathcal{A}})$ скуп свих ограничених оператора на $H_{\mathcal{A}}$ који допуштају адјунговање и нека је $\mathcal{F} = K(H_{\mathcal{A}})$ скуп свих компактних оператора на $H_{\mathcal{A}}$. Онда пар $(B^a(H_{\mathcal{A}}), \mathcal{F})$ задовољава особине Дефиниције 4.2.*

Осим тога, скуп апстрактних Фредхолмових оператора, Фредхолмови оператори у смислу Минга и у МФ смислу се поклапају и сва три њихова индекса су једнака.

Доказ: Познато је да је $\mathcal{F}$ затворен идеал, одакле важи особина (а) Дефиниције 4.2.

Нека је $(e_i), i \in \mathbb{N}$ стандардна база Хилбертовог модула $H_{\mathcal{A}}$, где је $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ са јединицом на i-том месту. Нека је $P_n \in \mathcal{F}$ низ пројектора на $\mathcal{A}^n$, $P_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ и нека је $K \in K(H_{\mathcal{A}})$. На основу Тврђења 1.5 имамо

$$\|K - KP_n\| \to 0, \quad \text{када } n \to \infty.$$

Према томе, P_n је апроксимативна јединица и задовољена је особина (б) Дефиниције 4.2.

Нека су $P, Q \in \mathcal{F}$ пројектори. На основу [66, Теорема 15.4.2], $P(\mathcal{A})$ и $Q(\mathcal{A})$ су изоморфни (као модули) неким директним сумандима у $\mathcal{A}^n$ и $\mathcal{A}^m$, редом, за неке $m, n \in \mathbb{N}$. Одавде, постоји парцијална изометрија

$$V \colon H_{\mathcal{A}} \to H_{\mathcal{A}}, \quad V(x_1, x_2, \ldots) = e_{m+1}x_1 + e_{m+2}x_2 + \ldots + e_{m+n}x_n$$

и пројектор $P_1 = VPV^*$ који је ортогоналан на Q. Посматрајмо оператор $U = VP$. Имамо

$$UU^* = VPV^* = P_1 \qquad \text{и} \qquad U^*U = PV^*VP = P,$$

јер је $V^*V = P_{e_1,\dots,e_n} \geqslant P$. Из једнакости $(UU^* + Q)(UU^* + Q) = VPV^*VPV^* + Q^2 = VPV^* + Q$ следи да је $UU^* + Q$ пројектор. Управо смо доказали особину (в) Дефиниције 4.2.

Из Тврђења 4.6 и 4.8 и коментара после Дефиниције 4.8 закључујемо да се све три врсте Фредхолмових оператора поклапају. Докажимо да су њихови индекси једнаки.

Нека је T Фредхолмов оператор и нека је T инвертибилан у односу на (P, Q). Онда је $T' = (I-Q)T(I-P)$ компактна пертурбација оператора T (његова разлика је $QT(I-P) + (I-Q)TP + QTP$), а језгра су $\ker T' = P(H_{\mathcal{A}})$ и $\ker T'^* = Q(H_{\mathcal{A}})$. Одавде, апстрактан индекс је једнак Минговом индексу.

Нека је T Фредхолмов оператор и нека је $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ у односу на декомпозицију $H_{\mathcal{A}} = \mathcal{M}_1 \tilde{\oplus} \mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_2 \tilde{\oplus} \mathcal{N}_2$ домена и кодомена, редом. На основу [44, Теорема 2.7.6], можемо изабрати $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_2$ тако да су сви они допуњиви, $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ су коначно генерисани пројективни подмодули и $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_1^{\perp}$. (Тачније, последња једнакост се не налази у тврђењу, али следи из доказа). У истом доказу можемо наћи да је $T|_{\mathcal{M}_1}$ ограничен одоздо. Означимо са P и Q ортогоналне пројекторе на $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$. Из Леме 4.19, $I - Q$ је ограничен одоздо на простору $\mathcal{M}_2 = T(\mathcal{M}_1) = \operatorname{ran} T(I-P)$. Овим смо доказали да је $(I-Q)T(I-P)$ изоморфизам из $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_1^{\perp}$ у $\mathcal{N}_2^{\perp}$. Према томе, апстрактан индекс је $[P]-[Q] = [\mathcal{N}_1]-[\mathcal{N}_2]$, односно, једнак је МФ индексу. ■

Литература

[1] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, and B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992., Translated from Russian.

[2] T. Alvarez and V. M. Onieva, *Generalized Fredholm operators*, Arch. Math., **44** (1985), pp. 270–277.

[3] I. Arandjelović, *Measure of noncompactness on uniform spaces*, Math. Moravica, **2** (1998), pp. 1–8.

[4] I. Arandjelović, *Some properties of Istratescu's measure of noncompactness*, Filomat, **13** (1999), pp. 99–104.

[5] M. Arandjelović, *Measures of noncompactness on uniform spaces-the axiomatic approach*, Filomat, **15** (2001), pp. 221–225.

[6] M. F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Asterisque, **32–33** (1976), pp. 43–72.

[7] J. M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, and G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Springer Basel AG, 1997.

[8] S. Baaj and G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs et dualit pour les produits croiss de C^*-algbres*, Annales Scientifiques de l'cole Normale Suprieure, **26** (4)(1993), pp. 425–488.

[9] S. L. Woronowicz, *Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and non-compact quantum groups*, Communications in Mathematical Physics, **136** no. 2, (1991),pp. 399–432.

[10] J. Banas and K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1979.

[11] J. Banas and M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, 2014, ISBN 978-81-322-1885-2.

[12] B. Blackadar, *Operator Algebras. Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[13] N. Bourbaki, *General Topology, chapters 1–4*, Springer, 1987, ISBN-13: 978-3-540-64241-1.

[14] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1981.

[15] M. Breuer, *Fredholm Theories in von Neumann Algebras. I*, Math. Annalen 178 (1968), pp. 243–254.

[16] M. Breuer, *Fredholm Theories in von Neumann Algebras. II*, Math. Annalen 180 (1969), pp. 313–325.

[17] M. Cabrera, J. Martinez and A. Rodríguez, *Hilbert modules revisited: Orthonormal bases and Hilbert-Schmidt operators*, Glasgow Math. J., **37** (1995), pp. 45–54.

[18] L. A. Coburn, R. G. Douglas, D. G. Schaeffer and I. M. Singer, *C^*-algebras of operators on a half-space, II Index theory*, Arch. Publications mathematiques de l'I. H.É. S., **40** (1971), pp. 68–79.

[19] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a condominio non commpato*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **24** (1955), pp. 84–92.

[20] J. Dixmier, *Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertiens*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[21] R. Engelking, *General Topology.* Revised and completed edition, Berlin 1989.

[22] M. Frank, *Self-duality and C^*-reflexivity of Hilbert C^*-modules*, Z. Anal. Anwend., **9** no. 2 (1990), pp. 165–176.

[23] M. Frank, V. M. Manuilov and E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-modules from group actions: beyond the finite orbits case*, Studia Math., **200** (2010), pp. 131–148.

[24] G. R. Giellis, *A characterization of Hilbert modules*, Proc. Amer. Math. Soc., 36 (1972), pp. 440–442.

[25] Л. С. Гольденштейн, И. С. Маркус, *О мере некомпактности ограниченных множенств и линейных операторов*, In: Исследование по алгебре и математическому анализу, Картя Молдавеняске, Кишинев, 1965., pp. 45–54.

[26] J. Isbell, *Uniform spaces*, American Mathematical Society, 1964.

[27] V. Istratescu, *On a measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S) **16** (1972), pp. 195–197.

[28] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of opcator algebras* Vols. 1-2, Graduate Studies in Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[29] I. Kaplansky, *Modules over operator algebras*, American Journal of Mathematics, **75** no. 4 (1953), pp. 839–853.

[30] M. Karoubi, *K-Theory An Introduction*, Springer-Verlag, 1978.

[31] G. G. Kasparov, *Hilbert C*-modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu*, Journal of Operator Theory, Theta Foundation, **4** (1980), pp. 133–150.

[32] D. J. Kečkić and Z. Lazović, *Compact and "compact" operators on the standard Hilbert module over a W^* algebra*, Ann. Funct. Anal. **9** no. 2 (2018), pp. 258–270.

[33] D. J. Kečkić and Z. Lazović, *Measures of noncompactness on the standard Hilbert C^*-module*, Filomat, in press.

[34] D. J. Kečkić and Z. Lazović, *Fredholm operators on C^*-algebras*, Acta scientiarum mathematicarum **83** 3-4 (2017), pp. 629–655.

[35] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company Inc. 1955.

[36] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math., **15** (1930), pp. 301–309.

[37] K. Kuratowski, *Topologie, 4th ed.*, Warsaw, 1962.

[38] E. C. Lance, *Hilbert C^*-Modules: A toolkit for operator algebraists,* Cambridge University Press, 1995.

[39] G. Landi and A. Pavlov, *On orthogonal systems in Hilbert C^*-modules*, Journal of Operator Theory, Vol. **68**, No. 2 (Fall 2012), pp. 487–500.

[40] Z. Lazović, *Compact and "compact" operators on standard Hilbert modules over C^*- algebras*, Adv. Oper. Theory, **3** no. 4 (2018), pp. 829–836.

[41] B. Magajna, *CC-convex sets and completely positive maps*, Integral Eq. Op. Th., **85** (2016), pp. 37–62.

[42] E. Malkowsky and V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, **17**, Zbornik Radova (2000), pp. 143–234.

[43] V. M. Manuilov, *Diagonalization of compact operators on Hilbert modules over C^*-algebras of real rank zero*, Math. Notes, **62**-6 (1997), pp. 726–730.

[44] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-Modules*, American Mathematical Society, 2005.

[45] V. M. Manuilov, *Diagonalization of compact operators in Hilbert modules over finite W^*-algebras*, Ann. Global Anal. Geom. **13** (1995), no. 3, pp. 207–226.

[46] J. A. Mingo, *K-theory and multipliers of stable C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **299** (1987), pp. 397–411.

[47] A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko, *The index of elliptic operators over C^*-algebras*, Math. USSR Izv. **15** (1980), pp. 87–112.

[48] L. Molnár, *Modular bases in a Hilbert A-module*, Czechoslovak Math. J., **42** (1992), pp. 649–656. American Mathematical Society, 2005.

[49] G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic press, London, 1990.

[50] F. J. Murray and J. Von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math., **37** (1936), pp. 116–229.

[51] M. Mursaleen, S. M. H. Rizvi, and B. Samet. *Measures of noncompactness and their applications*, In J. Banas, M. Jleli, M. Mursaleen, B. Samet, and Vetro C., editors, Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness, chapter 2, pages XIII, 487. Springer, 2017.

[52] B. Sz.-Nagy and F. Riesz, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955.

[53] W. L. Paschke, *Inner product modules over B^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **182** (1973), pp. 443–468.

[54] W. L. Paschke, *Inner product modules arising from compact automorphism groups of von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **224** no. 1 (1976), pp. 87–102.

[55] A. Pavlov and E. V. Troitsky, *Quantization and branched coverings*, Russ. J. Math. Phys., **18** no. 3 (2011), pp. 338–352.

[56] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.

[57] V. Rakočević, *Measures of noncompactness and some applications*, Filomat, **12** no. 2 (1988), pp. 87–120.

[58] M. A. Rieffel, *Induced representations of C^*-algebras*, Advances in Mathematics, Elsevier, **13** no. 2 (1974), pp. 176–257.

[59] M. A. Rieffel, *Morita equivalence for operator algebras*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, **38** (1982), pp. 176–257.

[60] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[61] A. I. Sadovskii, *Limit-compact and condensing operators*, Russian Mathematical Surveys, **27** no. 1 (1972), pp. 85–155.

[62] S. Sakai, *C^*-algebras and W^* -algebras*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[63] M. Skeide, *Generalized matrix C^*-algebras and representations of Hilbert modules*, Math. Proc. Royal Irish Acad., **100A** (2000), pp. 11–38.

[64] J. F. Smith, *The structure of Hilbert modules*, J. London Math. Soc., **8** (1975), pp. 741–749.

[65] M. Takesaki, *Theory of operator algebras 1*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979.

[66] N. E. Wegge Olsen, *K-Theory and C^*-Algebras*, Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1993.

[67] N. E. Wegge Olsen and L. Catherine, *Index theory in von Neumann algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **47** no. 294 (1984), pp. 1–71.

Биографија аутора

Златко Лазовић је рођен 17.10.1977. у Новом Пазару. Завршио је основну школу „Братство” и Гимназију у Новом Пазару. Математички факултет Универзитета у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписао је 1996. године, а завршио га је 2004. године са просечном оценом 9.58. Магистарску тезу под насловом „Фредхолмови оператори на Хилбертовим C^*-модулима” одбранио је 2010. године на истом факултету.

Запослен је на Математичком факултету у Београду од 2005. године. Држао је вежбе на следећим предметима: Математика 1 (за студенте физике), Анализа 1, Анализа 2, Методика наставе математике Б и Теорија мере и интеграције.

Објавио је следеће научне радове:

1. D. J. Kečkić and Z. Lazović, *Fredholm operators on C*-algebras*, Acta scientiarum mathematicarum **83** 3-4 (2017), pp. 629-655.

2. D. J. Kečkić and Z. Lazović, *Compact and "compact" operators on the standard Hilbert module over a W^* algebra*, Ann. Funct. Anal. **9** no. 2 (2018), pp. 258–270.

3. Z. Lazović, *Compact and compact operators on standard Hilbert modules over C*- algebras*, Adv. Oper. Theory, **3** no. 4 (2018), pp. 829-836.

4. D. J. Kečkić and Z. Lazović, *Measures of noncompactness on the standard Hilbert C*-module*, Filomat, in press.

Имао је следећа саопштења на научним конференцијама:

1. Z. Lazović, *The space of operator valued functions seen as Hilbert H-module*, Peta matematička konferencija Republike Srpske, Trebinje, 2015.

2. Z. Lazović, *Compact and compact operators on standard Hilbert modules over C*- algebras*, XIV Kongres matematičara Srbije, Kragujevac, 2018.

Ожењен је и има троје деце.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Златко Лазовић

број уписа ______________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Мере некомпактности на Хилбертовим C^*-модулима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 17.4.2019.

Zlatko Lazović

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Златко Лазовић

Број уписа ____________

Студијски програм Математика

Наслов рада Мере некомпактности на Хилбертовим C^*-модулима

Ментор др Драгољуб Кечкић

Потписани Златко Лазовић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 17.4.2019.

Zlatko Lazović

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Мере некомпактности на Хилбертовим C^*-модулима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 17.4.2019

Zlatko Lazović