Теорија репрезентација - белешке

Далибор Даниловић

16. јул 2025.

1. (1) Покажимо прво да је центар матричне алгебре тривијалан, односно састоји се само од скаларних матрица. Нека $A \in Z(M_n(R))$. Означимо са E_{ij} матрицу чија су сва поља нула, осим јединице на месту (i, j). Тада само израчунали да је AE_{ij} матрица која има све нуле осим j-колоне у којој се налази i-колона матрице A док је $E_{ij}A$ матрица која има све нуле осим i-те врсте у којој се налази j-врста матрице A. Стога из услова $AE_{ij} = E_{ij}A$ следи да је за све i, j испуњено $a_{ii} = a_{jj}$ и $a_{ij} = 0$ за различите индексе. Дакле, A је умножак јединичне матрице што смо и тврдили.

(2) По Артин-Ведербреновој теореми важи изоморфизам прстенова

$$\mathbb{C}[G] \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathbb{C})$$

при чему је број класа изоморфности простих $\mathbb{C}[G]$-модула тачно r. Применом центра добијамо да је

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$$

одакле је применом димензије испуњено

$$r = \dim_{\mathbb{C}}(Z(\mathbb{C}[G]))$$

што смо и желели да покажемо.

(3) Покажимо сада да $\overline{x_i}$ припада центру групног прстена, за све $i = 1, \ldots, t$. За $g \in G$ рачунамо

$$gx_i = \sum_{y \in c(x_i)} gy = \sum_{y \in c(x_i)} \left(gyg^{-1}\right) g = \sum_{y \in c(x_i)} yg = x_i g$$

где смо искористили да конјугација пермутује сваку класу конјугације. Пошто је сваки од елемената x_i сума различитих елемената R-базе од $R[G]$ при чему је унија свих сабирака тачно база, следи да су елементи $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_t}$ R-независни. Нека је сада $y \in Z(R[G])$ који можемо записати као

$$y = \sum_{g \in G} r_g g.$$

Из услова да је y у центру групног прстена, важи $x_i y = y x_i$ односно $x_i y x_i^{-1} = y$ за све $i = 1, \ldots, t$. Како је

$$\sum_{g \in G} r_g g = y = x_i y x_i^{-1} = \sum_{g \in G} r_g \left(x_i g x_i^{-1}\right)$$

следи да је сваки од скупова $\{r_g \mid g \in c(x_i)\}$ једночлан и означимо његов елемент са r_i. Пошто класе конјугације чине партицију групе G добијамо

$$y = r_1 \overline{x_1} + \cdots + r_t \overline{x_t}$$

што комплетира одређивање R-базе центра групног прстена. $\square$

2. Нека су $g_1, \ldots, g_r$ преставници класа конјугација коначне групе G, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ прости карактери и $c_i = |C_G(g_i)|$ редови централизатора. Таблица карактера X је квадратна таблица формата

$r \times r$ чије је (i, j) поље тачно вредност $\chi_i(g_j)$. Њене врсте су ортонормиране у односу на скаларни производ

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{c_i} \cdot \overline{\varphi(g_i)} \cdot \psi(g_i).$$

Ако означимо матрицу редова централизатора

$$XC = \begin{bmatrix} |C_G(g_1)| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |C_G(g_2)| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |C_G(g_r)| \end{bmatrix}$$

тада ортогоналност врста у односу на наведени скаларни производ гласи

$$\overline{X} \cdot C^{-1} \cdot X^T = I$$

Следи да је матрица X инвертибилна, па важи

$$\left(\overline{X} \cdot C^{-1}\right)^{-1} = X^T$$

одакле је коначно

$$X^T \cdot \overline{X} = C$$

што показује да су различите колоне таблице карактере ортогоналне у односу на стандардни скаларни производ. На основу ове релације, можемо пронаћи последњу врсту таблице карактера, на основу претходних. Мало општију формулу можемо формирати ако уместо класа конјугације радимо са елементима групе G:

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g) \cdot \overline{\chi_i}(h) = \begin{cases} 0 & g \nsim h \\ |C_G(g)| & g \sim h \end{cases}$$

где смо са $g \sim h$ означили да су g и h у истој класи конјугације. $\square$

3. Покажимо сада да степен d_i иредуцибилне комплексне репрезентације $\theta_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ коначне групе G дели ред групе G. Кључни алат који користимо јесте интегралност.

(1) За $g \in G$ и произвољан карактер $\chi : G \to \mathbb{C}$, вредност $\chi(g)$ је сума корена из јединице, па је као таква интегрална над прстеном целих $\mathbb{Z}$.

(2) Пошто је целобројни групни прстен $\mathbb{Z}[G]$ коначно генерисан $\mathbb{Z}$-модул, то је свака његова подгрупа коначно генерисан $\mathbb{Z}$-модул, па је последично сваки комутативни потпрстен од $\mathbb{Z}[G]$ интегралан над $\mathbb{Z}$. Последично, центар од $\mathbb{Z}[G]$ је интегралан над $\mathbb{Z}$. Закључујемо да ако су $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ алгебарски цели елементи и $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r}$ база центра $Z(\mathbb{C}[G])$, тада је $\lambda_1 \overline{x_1} + \cdots + \lambda_r \overline{x_r}$ интегралан над $\mathbb{Z}$.

(3) Уочимо елемент

$$x = \sum_{g \in G} a_g g \in Z(\mathbb{C}[G])$$

у центру групне алгебре. Репрезентација $\theta_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ индукује хомоморфизам прстенова $\rho_i : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V_i)$ па значимо

$$\phi = \rho_i(x) = \sum_{g \in G} a_g \cdot \theta_i(g) : V_i \to V_i$$

Пошто је $gx = xg$ за све $g \in G$ следи да је

$$\phi \circ \theta_i(g) = \rho_i(x) \circ \rho_i(g) = \rho_i(xg) = \rho_i(gx) = \rho_i(g) \circ \rho_i(g) = \theta_i(g) \circ \phi$$

одакле по Шуровој леми следи да је $\phi = \lambda \cdot I$. Сада применом трага рачунамо

$$d_i \cdot \lambda = \mathrm{Tr}\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot \theta_i(g)\right) = \sum_{g \in G} a_g \cdot \chi_{\theta_i}(g)$$

што нам даје формулу

$$\lambda = \frac{1}{d_i} \cdot \sum_{g \in G} a_g \cdot \chi_{\theta_i}(g).$$

Последично, ако је $a_g \in \mathbb{C}$ алгебарски цео број за све $g \in G$, тада је x интегралан над $\mathbb{Z}$ јер центар групне алгебре јесте интегралан над $\mathbb{Z}$ пошто је $Z(\mathbb{Z}[G])$ коначно генерисан $\mathbb{Z}$-модул. Стога је и $\phi = \rho_i(x) = \lambda \cdot I$ па је и λ интегралан над $\mathbb{Z}$. Поставимо сада

$$a_g = \chi_{\theta_i}\left(g^{-1}\right)$$

па из ортонормираности таблице карактера рачунамо

$$1 = \langle \chi_{\theta_i}, \chi_{\theta_i} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\theta_i}(g)} \cdot \chi_{\theta_i}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\theta_i}\left(g^{-1}\right) \cdot \chi_{\theta_i}(g)$$

што имплицира да је

$$\lambda = \frac{1}{d_i} \cdot \sum_{g \in G} \chi_{\theta_i}\left(g^{-1}\right) \cdot \chi_{\theta_i}(g) = \frac{|G|}{d_i}$$

алгебарски цео број, па како је рационалан следи да је цео број односно $d_i \mid |G|$ што смо и желели да покажемо. $\square$

4. Теорема Артин - Ведербрена нам даје разлагање

$$\mathbb{C}[G] \cong M_{d_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_r}(\mathbb{C})$$

на директан производ матричних прстенова. Анализирамо питање јединствености разлагања на директан производ прстенова, при чему идемпотентни елементи играју централну улогу. Идемпотентни елементи e, f су *ортогонални* ако је $fg = 0 = gf$. Идемпотентан елемент $e \in A$ прстена A је *централни* ако $e \in Z(A)$ а *примитивни* ако важи да за разлагање $e = e_1 + e_2$ при чему су e_1 и e_2 ортогонални идемпотентни елементи, следи да је $e_1 = 0$ или $e_2 = 0$. Уводимо сада кључни појам. *Блок* $e \in A$ је примитивни идемпотентни елемент прстена $e \in Z(A)$.

(1) Матрични прстен $M_d(\mathbb{C})$ не допушта разлагање на директан производ. Ако допушта, тада се јединична матрица разлаже на збир два ортогонална централна идемпотентна елемента $I = e + f$. Пошто је центар матричног прстена тачно алгебра дијагоналних матрица, следи да је једини ненула централни идемпотентан елемент јединична матрица.

(2) Нека су $V_1, \ldots, V_r$ класе изоморфности иредуцибилних комплексних репрезентација $\theta_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ степена d_i чији су карактери χ_i редом, за све $i = 1, \ldots, r$. Тада је индуковано разлагање групне алгебре

$$\mathbb{C}[G] = \mathrm{End}\left(V_1^{d_1}\right) \times \cdots \times \mathrm{End}\left(V_r^{d_r}\right) = M_{d_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_r}$$

па како су фактори неразложиви, следи да се јединица групне алгебре декомпонује на суму блокова које сада желимо да одредимо. Сваки хомоморфизам θ_i се проширује до хомоморфизма прстенова $\rho_i : \mathbb{C}[G] \to M_{d_i}(\mathbb{C})$ који је по Шуровој леми умножак скаларом на i-фактору и нула на осталим. Тражимо елемент $e_i \in \mathbb{C}[G]$ такав да је $\rho_i(e_i) = I_{d_i}$, за све $i = 1, \ldots, r$. Мотивисани претходном тачком, поставимо

$$e_i = \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i\left(g^{-1}\right) g$$

који јесу централни, па рачунамо

$$\rho_i(e_i) = \frac{d_i}{|G|} \cdot \frac{1}{d_i} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\, \chi_i\left(g^{-1}\right) \cdot I_{d_i} = I_{d_i}$$

где смо искористили рачуницу из претходног задатка. Додатно, релација ортогоналности таблице карактера имплицира да је $\rho_j(e_i) = 0$ за све $i \neq j$. Следи да су $\{e_1, \ldots, e_r\}$ блокови групне алгебре $\mathbb{C}[G]$.

(3) Разлагање на блокове индукује наредне последице. Прво, разлагање на блокове је јединствено до на пермутацију фактора. Додатно, сваки централни примитивни идемпотентни елемент је сума неких блокова. Ако изоставимо претпоставку о централности, тада разлагање $I = E_{11} + \cdots + E_{nn}$ показује да разлагање више није јединствено.

(4) По Шуровој леми, важи једнакост

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(V_i\right) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}\left(V_i^{d_i}\right).$$

По реконструкцији прстена из модулске структуре, следи да је

$$\Pi = \rho_1 \times \cdots \times \rho_r : \mathbb{C}\left[G\right] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}\left(V_1^{d_1}\right) \times \cdots \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}\left(V_r^{d_r}\right)$$

изоморфизам, где је ρ_i проширење репрезентације θ_i за све $i = 1, \ldots, r$. Блокови групне алгебре су тачно елементи $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{C}\left[G\right]$ за које важи да је $\pi_i \circ \Pi\left(e_i\right) = 1$ где су π_i природне пројекције, за све $i = 1, \ldots, r$. По претходном рачуну

$$e_i = \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i\left(g^{-1}\right) g$$

јесу блокови групне алгебре чије одређивање у претходној тачки. □

5. Покажимо *Бернсајдову теорему* која тврди да је група реда $p^a \cdot q^b$ где су p и q различити прости бројева решива група. Претпоставимо да тврђење не важи, па нека је G група минималног реда $p^a \cdot q^b$ која није решива.

(1) Група G није Абелова и њен степен није степен простог броја, јер су такве групе решиве. Додатно, група G је проста, јер ако би имала праву нормалну подгрупу N, тада би N и G/N биле групе мањег реда од реда групе G па би биле решиве, на основу чега би и G била решива.

(2) Нека је P Силовљева p-подгрупа. Тада је она p-група, па њен центар није тривијалан одакле постоји $g \neq e$ такав да $g \in Z\left(P\right)$. Последично, $P \subseteq C_G\left(g\right)$ па по теореми Лагранжа $p^a \mid \left|C_G\left(g\right)\right|$ одакле је индекс централизатора облика q^d за $d > 0$ што је тачно број елемената у класи конјугације елемента g.

(3) Постоји нетривијалан прост карактер χ такав да је $q \nmid \chi(e)$ и $\chi\left(g\right) \neq 0$. Претпоставимо супротно, да ако је χ нетривијалан прост карактер такав да $q \nmid \chi(e)$, тада важи $\chi\left(g\right) = 0$. Из таблице карактера и ортогоналности прве колоне са колоном вредности у g, закључујемо да је

$$1 + \sum_{\chi \neq 1} \chi\left(e\right) \chi\left(g\right) = 0$$

па је из претпоставке испуњено да је $\frac{1}{q}$ алгебарски цео број, јер су сви сабирци такви пошто се сума крати са χ. Следи да је цео пошто је рационалан односно $q = 1$ што је контрадикција јер је прост број. Стога постоји прост карактер χ такав да је $q \nmid \chi\left(e\right)$ и $\chi\left(g\right) \neq 0$. Напоменимо да пошто $q^d \mid |G|$ из бројања следи да свакако постоји карактер такав да је $q^d \nmid \chi\left(e\right)$ јер важи $\chi\left(e\right) \mid |G|$.

(4) Број $\frac{q^d \chi(g)}{\chi(e)}$ је алгебарски цео. То видимо из анализе центра групне алгебре. Придружимо елементу g елемент $y = \sum_{h \sim g} h \in \mathbb{C}\left[G\right]$ који је сума по класи конјугације елемента g. Он тада индукује хомоморфизам иредуцибилне репрезентације θ чији је карактер χ па је по претходном

$$\rho\left(y\right) = \frac{1}{\chi\left(e\right)} \sum_{h \sim g} \chi\left(h\right) I = \frac{q^d \chi\left(g\right)}{\chi\left(e\right)} I$$

па како је ово интегрални оператор, то тврђење следи.

(5) Пошто $q^d \nmid \chi(e)$ следи да су ова два броја узајамно проста па постоје цели бројеви k, l такви да је $kq^d + l\chi(e) = 1$ па је

$$\frac{\chi(g)}{\chi(e)} = k \cdot \frac{q^d \chi(g)}{\chi(e)} + l\chi(g)$$

одакле је $\frac{\chi(g)}{\chi(e)}$ алгебарски цео број као збир два таква и означимо га са $\xi = \frac{\chi(g)}{\chi(e)}$.

(6) Елемент ξ анулира моничан полином са целобројним коефицијентима. Његова норма $N(\xi)$ што је производ његових конјугата је цео број различит од нуле, као слободан коефицијент његовог минималног полинома. За елемент $\chi(g)$ важи да је сума корена из јединице, тачно $\chi(e)$ њих. Следи да је $|\chi(g)| \leqslant |\chi(e)|$. То важи за сваки од његових конјугата јер су конјугати корена из јединице корени из јединице. Последично за норму важи $|N(\xi)| \leqslant 1$. Пошто је то ненула цео број, следи да је $|N(\xi)| = 1$ па је и $|\xi| = 1$ одакле је последично $|\chi(g)| = |\chi(e)|$.

(7) Дефинишемо

$$H = \{h \in G \mid |\chi(h)| = |\chi(e)|\}.$$

Услов да $h \in H$ еквивалентан је чињеници да је $\theta(h)$ умножак сопственом вредношћу λ, одакле следи да је H нормална подгрупа јер умножак скаларом припада центру алгебре линеарних ендоморфизама. Пошто $g \in H$ такав да је $g \neq 0$ следи да је $G = H$ јер је група G проста. Пошто θ није тривијална репрезентација, следи да је $\ker(\theta) \neq G$ па је $\ker(\theta) = \{0\}$. Следи да је $G = H$ изоморфно слици при θ што је садржано у центру од $\mathrm{End}(V)$ па је Абелова група, што је контрадикција. Тиме је комплетиран доказ Бернсајдове теореме. $\square$