2023/2024

УКА, КФ (Писмени испит)

6. септембар 2024.

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2$ и $f(0) = 0$. Израчунати $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{f(z) - z\mathrm{e}^z}\,\mathrm{d}z$.

2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $\mathrm{K} = \{z : |z + 3\mathrm{i}| = 1\}$ слика на кружницу $\mathrm{S} = \{w : |w + 3| = 2\}$, при чему важи $\phi(-2\mathrm{i}) = -5$ и $\phi(\mathrm{i}) = 4$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. (а) Нека је f цела функција, таква да је $a\operatorname{Re} f + b\operatorname{Im} f \geq c$ у $\mathbb{C}$, где су a, b и c реалне константе, при чему важи $(a, b) \neq (0, 0)$. Доказати да је f константна функција.

(б) Дате су целе функције f и g, такве да је функција $f + \overline{g}$ ограничена у $\mathbb{C}$. Доказати да су f и g константне функције.

4. Нека су $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ холоморфне функције и нека је $F = \frac{f'}{f}$ и $G = \frac{g'}{g}$, при чему важи $F\left(\frac{1}{n+1}\right) = G\left(\frac{1}{n+1}\right)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји константа $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, таква да је $f(z) = cg(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$.

УКА, КФ (Писмени испит)

9. фебруар 2024.

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = \mathrm{e}^x\cos y + x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 - 1$ и $f(0) = 0$. Израчунати $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{f(z) - \mathrm{e}^z + 1}\,\mathrm{d}z$.

2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $\mathrm{K} = \{z : |z - \mathrm{i}| = 1\}$ слика на кружницу $\mathrm{S} = \{w : |w - 5| = 2\}$, при чему важи $\phi(2\mathrm{i}) = 3$ и $\phi(5\mathrm{i}) = 2$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи $|f(z)| \leq |z|^\lambda$ за све $z \in \mathbb{C}$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$.

(а) Ако $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, доказати да је функција f идентички једнака нули.

(б) Ако $\lambda \in \mathbb{N}_0$, доказати да је $f(z) = cz^\lambda$ за све $z \in \mathbb{C}$ и неко $|c| \leq 1$.

4. (а) Нека је $f : \mathrm{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи $|f'(z) - f'(z_0)| < |f'(z_0)|$ за све $z \in \mathrm{D}(z_0, R)$. Доказати да је функција f инјективна.

(б) Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи $f'(z) \neq 0$ за све $z \in \Omega$. Доказати да за свако $z_0 \in \Omega$ постоји $R > 0$, тако да је функција f инјективна у диску $\mathrm{D}(z_0, R) \subset \Omega$.

УКА, КФ (Писмени испит)

20. јануар 2024.

1. Нека је $h = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + x^2 - y^2 + 8$ и $h(0) = 8$. Одредити број нула функције h у прстену $\mathrm{A} = \{z : 1 < |z| < 2\}$.

2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружнице $\mathrm{K}_1 = \{z : |z + \mathrm{i}| = 1\}$ и $\mathrm{K}_2 = \{z : |z - 3\mathrm{i}| = 1\}$ слика на кружнице $\mathrm{S}_1 = \{w : |w - 1| = 4\}$ и $\mathrm{S}_2 = \left\{w : \left|w - \frac{31}{15}\right| = \frac{4}{15}\right\}$, тим редом, при чему важи $\phi(\mathrm{i}) = 3$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. (а) Одредити $\displaystyle\mathrm{I}(a, b) = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^3}{(z - a)^2(z - b)}\,\mathrm{d}z$, где су $a, b \in \mathbb{D}$.

(б) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $\frac{2\pi\mathrm{i}}{a_n} = \mathrm{I}\left(\frac{1}{2n}, -\frac{1}{n+1}\right)$. Израчунати $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{z^n}{1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} + a_n z^n}\,\mathrm{d}z$.

4. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција.

(а) Ако важи $|f(z)| \leq c|z|^\lambda + d$ за све $z \in \mathbb{C}$, где су $\lambda, c, d \geq 0$, доказати да је f полином степена не већег од $\lfloor \lambda \rfloor$.

(б) Ако важи $|f(z)| \geq \frac{1}{5|z|^{10} + 7}$ за све $z \in \mathbb{C}$, доказати да је f константна функција.

2022/2023

УКА, КФ (Писмени испит) *7. септембар 2023.*

1. Дато је билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$ за које важи $\phi(0) = 5$, $\phi(\mathrm{i}) = 4$ и $\phi(-2\mathrm{i}) = 1$. Одредити $\phi(V)$, при чему је $V = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \left|z + \frac{\mathrm{i}}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}$.

2. Израчунати $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{1}{z^{33} + z^3 + 3}\,\mathrm{d}z$ и $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{\mathrm{i}z^n}{az^2 - (1 + a^2)z + a}\,\mathrm{d}z$, где је $a > 1$ и $n \in \mathbb{N}$.

3. Одредити број нула функције $h(z) = z^6 + 4z^2e^{z+1} - 3$ у јединичном диску $\mathbb{D}$.

4. Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна функција и $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$.

(а) Доказати да је функција $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \Omega^*$ холоморфна.

(б) Ако је функција $g(z) = \overline{f(z)}$, $z \in \Omega$ холоморфна, доказати да је функција f константна.

(в) Ако је функција $h(z) = f(\overline{z})$, $z \in \Omega^*$ холоморфна, доказати да је функција f константна.

УКА, КФ (Писмени испит) *12. јун 2023.*

1. Нека је $0 < a < 1$ и ϕ билинеарно пресликавање за које важи $\phi(0) = a$, $\phi(1) = 1$ и $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2a}{1+a}$. Доказати да је $\phi(-1) > a^2$ и одредити $\phi(\mathbb{D})$.

2. Израчунати $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)(7z-4)^{10}(51z-2)^{100}(721z-442)^{1000}}$.

3. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ холоморфна функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$, при чему важи $au + bv = c$ у Ω, где су a, b и c реалне константе, такве да је $(a, b) \neq (0, 0)$. Доказати да је f константна функција у области Ω.

4. Дате су холоморфне функције $f, g : \mathrm{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}$, при чему важи $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ и $g''(z_0) \neq 0$. Доказати да је

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = 2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{f(z_0)g'''(z_0)}{g''(z_0)^2}.$$

УКА, КФ (Писмени испит) *9. фебруар 2023.*

1. Нека је $h = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = e^x \cos y + x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + x^3 - 3xy^2 + 10x^2 - 10y^2 + 1$ и $h(0) = 2$. Одредити број нула функције h у јединичном диску $\mathbb{D}$.

2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $K = \{z : |z - 2\mathrm{i}| = 1\}$ пресликава на $S = \left\{w : \left|w - \frac{13}{4}\right| = \frac{3}{4}\right\}$, при чему важи $\phi(\mathrm{i}) = 4$ и $\phi(5\mathrm{i}) = 2$. Одредити $\phi(\mathbb{D})$.

3. Израчунати $\int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{1}{z^6-1}\,\mathrm{d}z$ и $\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^n \cos nx}{1-a-2a\cos x}\,\mathrm{d}x$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $0 < a < \frac{1}{3}$.

4. Нека је f цела функција, $f(\ell) \subset \ell$ и $f(p) \subset p$, при чему је $\ell = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $p = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$.

(а) Доказати да важи $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ и $g(z) = \overline{g(\overline{z})}$ за све $z \in \mathbb{C}$, где је $g(z) = \mathrm{i}f(\mathrm{i}z)$.

(б) Доказати да је f непарна функција.

УКА, КФ (Писмени испит) *21. јануар 2023.*

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) + x^2 - y^2 - x^4 + 6x^2y^2 - y^4$ и $f(0) = 0$. Одредити $\max\limits_{|z|\leq 2}\left|f(z) - ze^{\mathrm{i}z}\right|$.

2. Билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$ праве $\ell_1 = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $\ell_2 = \{z : \operatorname{Im} z = 3\}$ слика на кружнице $K_1 = \{w : |w - 3| = 2\}$ и $K_2 = \left\{w : \left|w - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$, тим редом, при чему важи $\phi(\mathrm{i}) = 3$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. Израчунати $\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+m^2}\,\mathrm{d}x$, где су $m, n \in \mathbb{N}$ и $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x + c}$, где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $0 < a^2 + b^2 < c^2$.

4. (а) Нека је f цела функција и $f(z) = f(z+1) = f(z+\mathrm{i})$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.

(б) Нека је f цела функција, при чему важи $f(x + \mathrm{i}) - f(x) \geq 0$ и $f(1 + \mathrm{i}y) - f(\mathrm{i}y) \geq 0$ за све $x, y \in [0, 1]$. Доказати да је f константна функција.

2021/2022

УКА, КФ (Писмени испит) *22. септембар 2022.*

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = e^x(x^2\cos y - y^2\cos y - 2xy\sin y)$ и $f(0) = 0$. Колико је $\int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z$?

2. Билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$ праве $\ell_1 = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $\ell_2 = \left\{z : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\right\}$ слика на кружнице $K_1 = \{w : |w-2| = 1\}$ и $K_2 = \left\{w : \left|w - \frac{5}{3}\right| = \frac{2}{3}\right\}$, тим редом, при чему важи $\phi(\mathrm{i}) = 2$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. За целу функцију f и све $n \in \mathbb{N}_0$ важи $|f(z)| \le \left|f\left(\frac{z}{3}\right)\right| + \frac{1}{3^n}$ ако је $3^n < |z| \le 3^{n+1}$. Доказати да је f константна функција.

4. Доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ важи $|\operatorname{Im} z^n| \le n\,|z|^{n-1}\,|\operatorname{Im} z|$.

УКА, КФ (Писмени испит) *5. септембар 2022.*

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$ и $f(0) = 0$. Доказати $\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \pi e$, где је $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$.

2. Билинеарно пресликавање $w = \phi(z)$ праве $\ell_1 = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $\ell_2 = \{z : \operatorname{Im} z = 5\}$ слика на кружнице $K_1 = \left\{w : \left|w - \frac{7}{4}\right| = \frac{3}{4}\right\}$ и $K_2 = \{w : |w+2| = 3\}$, тим редом, при чему важи $\phi(2\mathrm{i}) = 4$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. Која тачка скупа $\left\{z \in \mathbb{C} : e^{e^z} = 1\right\}$ је најближа имагинарној јединици i?

4. Нека је f цела функција и $f(x + \mathrm{i}x) \in \mathbb{R}$ за све $x \in \mathbb{R}$. Ако је $f(2) = 1 - \mathrm{i}$, одредити $f(2\mathrm{i})$.

УКА, КФ (Писмени испит) *9. фебруар 2022.*

1. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које дату кружницу $K = \{z : |z - 2\mathrm{i}| = 1\}$ пресликава на $S = \left\{w : \left|w - \frac{19}{4}\right| = \frac{5}{4}\right\}$, при чему важи $\phi(\mathrm{i}) = 6$ и $\phi(4\mathrm{i}) = 3$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

2. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, при чему важи $u = 4x^4 - 24x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - y^2 + 1$ и $f(0) = 1$. Одредити број нула функције f у диску $\mathbb{D}$ и израчунати $\int_{\mathbb{T}} \frac{z^3}{f(z)}\,\mathrm{d}z$.

3. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a+\cos x)^2}$, где је $a > 1$ и $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$.

4. Нека је $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ непрекидна функција, која је холоморфна у $\mathbb{D}$ и $L = \left\{z \in \overline{\mathbb{D}} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 1\right\}$, при чему важи $|f(z)| \le \sqrt[3]{16}$ за све $z \in \overline{\mathbb{D}}$ и $|f(z)| \le 1$ за све $z \in L$. Доказати да је $|f(0)| \le 2$.

УКА, КФ (Писмени испит) *21. јануар 2022.*

1. Дати су $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$, при чему важи $(1 - \mathrm{i}z)^n + z^n = 0$. Колико је $\operatorname{Im} z$?

2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $K = \{z : |z - \mathrm{i}| = 1\}$ пресликава на кружницу $S = \{w : |w - 7| = 3\}$, при чему важи $\phi(2\mathrm{i}) = 4$ и $\phi(-4\mathrm{i}) = -2$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$.

3. Израчунати $\int_0^\infty \frac{\cos nx}{(x^2+m^2)^3}\,\mathrm{d}x$, где су $m, n \in \mathbb{N}$.

4. Ако је $a > 0$ и $b > 2$, одредити број решења једначине $az^3 - z + b = e^{-z}(z+2)$ у десној полуравни $\Pi = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

2020/2021

УКА, КФ (Писмени испит) *24. септембар 2021.*

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, при чему важи $u = y^3 - 3x^2y + 1$ и $f(0) = 1 + \mathrm{i}$. Одредити $\max\limits_{|z|\le 1} |f(z)|$.

2. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, за коју важи $|f(z)| \ge |\cos z| + |\sin z|$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.

3. Одредити $\int_{|z|=1} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-c|^4}$, где је $c > 1$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да функција $f(z) = \frac{z^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n}(z-j)}$ нема примитивну функцију у области $\mathrm{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > n + 1\}$.

УКА, КФ (Писмени испит) *8. септембар 2021.*

1. Дато је билинеарно пресликавање $w = \phi(z) = \frac{\mathrm{i}z+b}{cz-1}$, где су $b, c \in \mathbb{C}$, које кружницу $K = \{z : |z - 4| = 1\}$ пресликава на кружницу $S = \left\{w : \left|w - \frac{5\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$, при чему важи $\phi(-1) = -\mathrm{i}$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$, где је $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ јединична кружница.

2. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, при чему важи $u = 5x^5 - 50x^3y^2 + 25xy^4 + x^3 - 3xy^2 - y + 1$ и $f(0) = 1$. Израчунати $\int_{\mathbb{T}} \frac{z^4}{f(z)}\,\mathrm{d}z$.

3. Дати су природни бројеви $n > m$. Израчунати $\int_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-1}}{1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^m}{m!}+3z^n}\,\mathrm{d}z$.

4. Нека је $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, при чему важи $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n m^{-n} = 0$ за све $m \in \mathbb{N}$. Доказати да је $a_n = 0$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

УКА, КФ (Писмени испит) *1. јул 2021.*

1. Дата је цела функција $f(z) = \cos x\,(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + \mathrm{i}\sin x\,(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$, где је $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Одредити $\max\limits_{|z|\le 1} \left|\frac{\mathrm{e}^{z^2}}{f(z)}\right|$.

2. Израчунати $\int_{|z-1-\mathrm{i}|=2} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$ и $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$.

3. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција и $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ за све $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Доказати да је f константна функција.

4. Нека је $c \in \mathbb{C}$ и $n \ge 2$ природан број. Доказати да једначина $cz^n + z + 1 = 0$ има решење у затвореном диску $\overline{\mathrm{D}}(0, 2)$.

УКА, КФ (Писмени испит) *14. јун 2021.*

1. Дата је цела функција $f(z) = x^2 + axy + by^2 + \mathrm{i}\left(cx^2 + dxy + y^2\right)$, где је $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Доказати да важи $\left|\int_{\gamma} \frac{z\mathrm{e}^z}{f(z)}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi \mathrm{e}}{\sqrt{2}}$, при чему је $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ за све $t \in [0, \pi]$.

2. Дата су пресликавања $\mathcal{R}(z, w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$, $z, w \in \mathbb{C}$ и $h(z) = \frac{az+b}{\overline{a}-\overline{b}z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\overline{a}/\overline{b}\right\}$, при чему за комплексне бројеве $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ важи $|a|^2 + |b|^2=1$. Доказати да је $\mathcal{R}\left(h(z), h(w)\right) = \mathcal{R}(z, w)$ за све $z, w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\overline{a}/\overline{b}\right\}$.

3. Израчунати $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^{222}+z^{22}+z^2+2}\,\mathrm{d}z$ и $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}x$, где је $a > 1$ и $n \in \mathbb{N}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ полином са комплексним коефицијентима. Доказати да важи $\max\limits_{\mathbb{T}} |p| \ge 1$.

УКА, КФ (Писмени испит) *17. фебруар 2021.*

1. Нека је $f = u + \mathrm{i}v$ цела функција, $u = \mathrm{e}^{-y}\cos x + x^2 - y^2 - y$ и $f(0) = 1$. Израчунати $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$, где је $\gamma(t) = 2t$, $t \in [0, \pi]$.

2. Дате су различите тачке a, b, c, d и кружница K у комплексној равни $\mathbb{C}$, при чему су тачке c и d инверзне у односу на K и $a, b \in \mathrm{K}$. Доказати да важи $\left|\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}\right| = 1$.

3. Одредити број нула полинома $p(z) = 17z^{17} + z^{16} + 5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + 1$ у диску $\mathbb{D}$ и израчунати $\int_{\mathbb{T}} \frac{z^{16}}{p(z)}\,\mathrm{d}z$ и $\int_{\mathbb{T}} \frac{z^{15}}{p(z)}\,\mathrm{d}z$.

4. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција. Доказати да важи $\max\limits_{z\in\mathbb{T}} |\overline{z} - f(z)| \ge 1$.

УКА, КФ (Писмени испит) *30. јануар 2021.*

1. (а) Нека су $z, a \in \mathbb{C}$. Доказати да важи $|z + a|^2 + |z - a|^2 = 2|z|^2 + 2|a|^2$.
(б) Нека су $z, a \in \mathbb{C}$ и $z^2 - a^2 = 1$. Доказати да важи $|z + a| + |z - a| = |z + 1| + |z - 1|$.

2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $K = \left\{z : |z + 3\mathrm{i}| = \frac{1}{2}\right\}$ пресликава на кружницу $S = \{w : |w - 1| = 6\}$, при чему важи $\phi(0) = 2$ и $\phi(-\frac{5\mathrm{i}}{2}) = 7$. Одредити $\phi(-2\mathrm{i})$ и $\phi(\mathbb{T})$.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $h(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - j)$ за све $z \in \mathbb{C}$. Израчунати $\int_{|z|=n+1} \frac{h(z)}{z}\,\mathrm{d}z$ и $\int_{|z|=n+1} \frac{1}{zh(z)}\,\mathrm{d}z$.

4. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ холоморфна функција и $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Доказати да важи $\left|f^{(n)}(0)\right| < \mathrm{e}(n + 1)!$ за све $n \in \mathbb{N}$.

2019/2020

УКА, КФ (Писмени испит)

27. септембар 2020.

1. Одредити $\max\limits_{|z|\leq 3}\left|\frac{z^3}{z^4-84}\right|$.

2. Дато је билинеарно пресликавање $w=\phi(z)=\frac{az+3\mathrm{i}}{z+d}$, где су $a,d\in\mathbb{C}$, које кружницу $K=\{z:|z-4|=1\}$ пресликава на кружницу $S=\left\{w:\left|w-\frac{5\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$, при чему важи $\phi(-1)=-\mathrm{i}$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$, где је $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$ јединична кружница.

3. Израчунати $\int_{\mathbb{T}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-2)\prod_{j=1}^{n}\left(2^{2^j-1}z+1\right)}$, где је $n\in\mathbb{N}$.

4. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција, при чему важи $\left|f\left(z^2\right)\right|\leq 2\left|f\left(z\right)\right|$ за све $z\in\mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.

УКА, КФ (Писмени испит)

13. септембар 2020.

1. Одредити $\max\limits_{z\in\overline{\Omega}}\left|\frac{e^{z^2}}{z}\right|$, где је $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$.

2. Дато је билинеарно пресликавање $w=\phi(z)=\frac{6z+b}{cz+2}$, где су $b,c\in\mathbb{C}$, које јединичну кружницу $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ пресликава на кружницу $K=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w+\frac{16\mathrm{i}}{5}\right|=\frac{9}{5}\right\}$, при чему важи $\phi\left(\frac{\mathrm{i}}{5}\right)=\frac{\mathrm{i}}{7}$. Одредити $\phi\left(\mathrm{D}\left(0,\frac{1}{3}\right)\right)$, где је $\mathrm{D}\left(0,\frac{1}{3}\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<\frac{1}{3}\right\}$.

3. Израчунати $\int_{\mathbb{T}}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-2|^4}$.

4. Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи $\int_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta\leq M$ за све $0<r<1$, где је $M>0$. Доказати да тада важи $\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\leq|f(0)|+\frac{M}{2\pi}$.

УКА, КФ (Писмени испит)

30. август 2020.

1. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $K=\{z:|z-\mathrm{i}|=1\}$ пресликава на кружницу $S=\left\{w:\left|w-\frac{13}{3}\right|=\frac{2}{3}\right\}$, при чему важи $\phi(3\mathrm{i})=\frac{7}{2}$ и $\phi(0)=5$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$, где је $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$ јединична кружница.

2. Израчунати $\int_{\mathbb{T}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-3)(11z-10)^7(19z-4)^{10}}$.

3. Нека је $h=u+\mathrm{i}v$ цела функција у комплексној равни, таква да важи $u=u(x,y)=x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6+e^{-y}\cos x+3$ за све $x,y\in\mathbb{R}$ и $h(0)=4$. Одредити број нула функције h у горњој полуравни $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$.

4. Доказати да не постоји полином $p(z)$ степена $m\in\mathbb{N}$, такав да је $\int_{\mathbb{T}}\frac{p(z)}{(n+2)z-1}\,\mathrm{d}z=0$ за све $n=0,1,\ldots,m$.

УКА, КФ (Писмени испит)

23. јун 2020.

1. Нека је $z\in\mathbb{C}$ и $\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{z}+1\right)=1$. Израчунати $\left(z^{100}+\frac{1}{z^{100}}\right)\left(z^{100}+\frac{1}{z^{100}}+1\right)$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праву $\ell=\{z:\operatorname{Im}z=1\}$ пресликава на кружницу $K=\left\{w:\left|w-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$, при чему важи $\phi(\mathrm{i})=2$ и $\phi(0)=\frac{7}{3}$. Одредити $\phi(\mathbb{H})$, где је $\mathbb{H}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ горња полураван.

3. Израчунати $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$.

4. Нека је $m\geq 2$ природан број. Одредити све целе функције $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, такве да важи $f\left(z^m\right)=f\left(z\right)^m$ за све $z\in\mathbb{C}$.

УКА, КФ (Писмени испит)

4. фебруар 2020.

1. Нека је $f=u+\mathrm{i}v$ цела функција, при чему важи $u-v=e^x(\cos y-\sin y)+x-y+1$ и $f(0)=2$. Израчунати $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, где је γ линијски сегмент са почетком у тачки $-1+\mathrm{i}$ и крајем у тачки $1-\mathrm{i}$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које $\ell=\{z:\operatorname{Im}z=2\}$ и $p=\{z:\operatorname{Im}z=3\}$ пресликава на $q=\{w:\operatorname{Im}w=-2\}$ и $K=\left\{w:\left|w+\frac{7\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{3}{2}\right\}$, тим редом, при чему важи $\phi(\mathrm{i})=\mathrm{i}$. Одредити $\phi(V)$, где је $V=\{z\in\mathbb{D}:\operatorname{Im}z>0\}$.

3. Израчунати $\int_{|z|=1}\frac{z^{22}}{3z^{23}-1}\,\mathrm{d}z$.

4. Нека је $a>0$ и $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција, при чему важи $|f(z)|>a$ за све $z\in\mathbb{T}$ и $|f(0)|<a$. Доказати да функција f има бар једну нулу у јединичном диску $\mathbb{D}$.

УКА, КФ (Писмени испит)

22. јануар 2020.

1. Нека је $f=u+\mathrm{i}v$ цела функција, $u=x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6+e^{-y}\cos x+3$ и $f(0)=4$. Израчунати $\int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z|$, где је $\gamma(t)=\mathrm{i}t^2$ за све $t\in[0,1]$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праве $\ell_1=\{z:\operatorname{Im}z=0\}$ и $\ell_2=\{z:\operatorname{Im}z=5\}$ пресликава на кружнице $K_1=\left\{w:\left|w-\frac{7}{4}\right|=\frac{3}{4}\right\}$ и $K_2=\{w:|w+2|=3\}$, тим редом, при чему важи $\phi(2\mathrm{i})=4$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$, где је $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$.

3. Израчунати $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(e^{e^{\mathrm{i}x}}+e^{e^{\mathrm{i}x}-\mathrm{i}x}\right)\mathrm{d}x$.

4. (а) Нека је f цела функција и $a\operatorname{Re}f(z)+b\operatorname{Im}f(z)\geq c$ за све $z\in\mathbb{C}$, где су a, b и c реалне константе, при чему важи $(a,b)\neq(0,0)$. Доказати да је f константна функција.

(б) Нека је f цела функција и ℓ права у комплексној равни, при чему важи $f(\mathbb{C})\cap\ell=\emptyset$. Доказати да је f константна функција.

2018/2019

***УКА, КФ* (Писмени испит)** *11. септембар 2019.*

1. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање, које кружницу $K=\{z:|z+2\mathrm{i}|=1\}$ пресликава на праву $\ell=\{w:\operatorname{Im}w=-2\}$, при чему важи $\phi(0)=\mathrm{i}$ и $\phi(-\mathrm{i})=\infty$. Одредити $\phi(\mathbb{H})$, где је $\mathbb{H}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ горња полураван.

2. Израчунати $(1+\xi)\cdot\left(1+\xi^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\xi^{100}\right)$ и одредити све $a\in\mathbb{R}$, тако да важи $\left(a+2\xi+\xi^2\right)^3\in\mathbb{R}$, при чему је $\xi=e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$.

3. Израчунати $\int_{|z|=2}\frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$ и $\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{1+2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x$, где је $0<a<1$ и $n\in\mathbb{N}$.

4. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција, при чему је $\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{((n^5+11)z-1)^3}\mathrm{d}z=0$ за све $n\in\mathbb{N}$, $f(-1)=-1$ и $f(0)=1$. Одредити $f(1)$.

***УКА, КФ* (Писмени испит)** *23. јун 2019.*

1. Израчунати $\int_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$ и $\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z^3}{(z-2)(z-1-\mathrm{i})}\mathrm{d}z$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $K=\{z:|z-\mathrm{i}|=1\}$ пресликава на кружницу $S=\left\{w:\left|w-\frac{13}{3}\right|=\frac{2}{3}\right\}$, при чему важи $\phi(3\mathrm{i})=\frac{7}{2}$ и $\phi(0)=5$. Одредити $\phi(H)$ и $\phi(V)$, где је $H=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ и $V=\left\{z:|z|<1,\left|z+\frac{\mathrm{i}}{2}\right|>\frac{1}{2}\right\}$.

3. Нека је $r>0$ и $a\in\mathbb{C}$, при чему важи $|a|\neq r$. Израчунати $I(a,r)=\int_{|z|=r}\frac{1}{a-\overline{z}}\mathrm{d}z$.

4. Дати су $n\in\mathbb{N}$ и $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$. Доказати да постоји $x\in[0,1]$, тако да важи $\left|1-\sum_{j=1}^n c_je^{2\pi\mathrm{i}jx}\right|\geq 1$.

***УКА, КФ* (Писмени испит)** *9. фебруар 2019.*

1. Нека је $f=u+iv$ цела функција, при чему важи $u-v=e^x(\cos y-\sin y)+2xy+x^2-y^2$ и $f(0)=2+i$. Израчунати $\int_\gamma f(z)dz$, где је $\gamma(t)=it$ за све $t\in[0,\pi]$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружницу $K=\{z:|z-i|=1\}$ пресликава на кружницу $S=\left\{w:\left|z-\frac{13}{3}\right|=\frac{2}{3}\right\}$, при чему важи $\phi(3i)=\frac{7}{2}$ и $\phi(0)=5$. Одредити $\phi(H)$ и $\phi(V)$, где је $H=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ и $V=\left\{z:|z|<1,\left|z+\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}\right\}$.

3. Дате су тачке a, b и c које припадају јединичној кружници $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$, при чему важи $a+b+c=0$. Доказати да тачке a, b и c представљају темена једнакостраничног троугла у комплексној равни.

4. (а) Доказати да све нуле полинома $p(z)=12z^{12}-4z^9+2z^6-4z^3+1$ припадају јединичном диску $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$.
(б) Израчунати $\int_{|z|=1}\frac{z^{11}}{12z^{12}-4z^9+2z^6-4z^3+1}dz$.

***УКА, КФ* (Писмени испит)** *26. јануар 2019.*

1. Одредити целу функцију $f=u+iv$, такву да је $u=e^x(x\cos y-y\sin y)-5x^4y+10x^2y^3-y^5+xy$ и $f(0)=i$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које кружнице $K_1=\{z\in\mathbb{C}:|z-4|=1\}$ и $K_2=\{z\in\mathbb{C}:|z-3|=1\}$ пресликава на кружнице $S_1=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{5i}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$ и $S_2=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{11i}{3}\right|=\frac{4}{3}\right\}$, тим редом, при чему важи $\phi(-1)=-i$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$, где је $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ јединична кружница.

3. Израчунати $\int_{|z-1|=\sqrt{3}}\frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}dz$ и $\int_{|z|=3}\frac{1}{(z-7)(z^{23}-1)}dz$.

4. (а) Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција и $f^*(z)=\overline{f\left(\overline{z}\right)}$ за све $z\in\mathbb{C}$. Доказати да је f^* цела функција.
(б) Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција и $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{T}$. Доказати да функција f нема нула у комплексној равни $\mathbb{C}$.

2017/2018

Увод у комплексну анализу *14. септембар 2018.*

I део (Колоквијум)

1. Израчунати $\min\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z}$ и одредити када се минимум достиже.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праве $l_1=\{z:\operatorname{Im} z=0\}$ и $l_2=\{z:\operatorname{Im} z=5\}$ пресликава на кружнице $k_1=\{w:|w-\frac{7}{4}|=\frac{3}{4}\}$ и $k_2=\{w:|w+2|=3\}$, тим редом, при чему важи $\phi(2i)=4$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$ ако је $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$.

II део (Писмени испит)

3. Израчунати $\max\limits_{z\in K}|z^2-2z|$, где је $K=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:x,y\in[0,1]\}$.

4. Израчунати $I=\int_0^\infty \frac{\cos nx}{x^4+1}dx$, где је $n\in\mathbb{N}$ и доказати да је $2e^{\frac{n}{\sqrt{2}}}I\le\pi$.

5. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција, таква да важи $f(0)=1$, $f'(0)=2$ и нека је $\alpha\in\mathbb{C}$. Израчунати $\int_{\mathbb{T}}(\operatorname{Re} z+\alpha)\frac{f(z)}{z}dz$, где је $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ јединична кружница.

Увод у комплексну анализу *22. јун 2018.*

I део (Колоквијум)

1. Нека је $n\in\mathbb{N}$, $\xi=e^{i\frac{2\pi}{2n+1}}$ и $z=\frac{1}{2}+\xi+\cdots+\xi^n$. Доказати да је $(2z+1)^{2n+1}+(2z-1)^{2n+1}=0$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање, за које важи $\phi(i)=2$, $\phi(0)=\frac{7}{3}$ и које праву $\ell=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z=1\}$ пресликава на кружницу $k=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$. Одредити $\phi(\mathbb{H})$, где је $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$ горња полураван.

II део (Писмени испит)

3. Израчунати $\int_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z^2(z-1)}dz$ и $\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-2)(2z+1)^2(3z-1)^3}$.

4. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција и $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$. Доказати да функција f има бар једну нулу у $\mathbb{C}$.

5. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ полином и $a\in\mathbb{C}$. Доказати да скуп $S=\{a,f(a),f(f(a)),\dots\}$ није густ у $\mathbb{C}$.

Увод у комплексну анализу *13. фебруар 2018.*

I део (Колоквијум)

1. Нека је $z\in\mathbb{C}$ и $11z^{10}+10iz^9+10iz=11$. Доказати да је $|z|=1$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање, за које важи $\phi(i)=2$, $\phi(0)=\frac{7}{3}$ и које праву $\ell=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z=1\}$ пресликава на кружницу $k=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$. Одредити $\phi(\mathbb{H})$, где је $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$ горња полураван.

II део (Писмени испит)

3. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција, таква да је $|f(z)|\le c|z|^\lambda+d$ за све $z\in\mathbb{C}$, где су λ, c и d позитивне константе. Доказати да је f полином степена не већег од λ.

4. Израчунати $I=\int_0^\infty \frac{\cos nx}{x^4+1}dx$, где је $n\in\mathbb{N}$ и доказати да је $2e^{\frac{n}{\sqrt{2}}}I\le\pi$.

5. Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $c_0,c_1,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{C}$. Доказати да све нуле полинома $p(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0$ припадају отвореном диску са центром у тачки 0, полупречника $R=\sqrt{1+|c_{n-1}|^2+\cdots+|c_1|^2+|c_0|^2}$.

Увод у комплексну анализу *27. јануар 2018.*

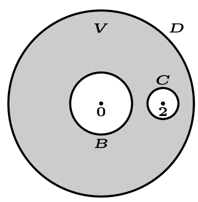
I део (Колоквијум)

1. Нека је $\xi=e^{i\frac{2\pi}{n}}$, где је $n\geqslant 2$ природан број и $|z-\xi^k|\leqslant 1$ за све $k=0,1,\dots,n-1$. Доказати да је $z=0$.

2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праве $l_1=\{z:\operatorname{Im} z=0\}$ и $l_2=\{z:\operatorname{Im} z=5\}$ пресликава на кружнице $k_1=\{w:|w-\frac{7}{4}|=\frac{3}{4}\}$ и $k_2=\{w:|w+2|=3\}$, тим редом, при чему важи $\phi(2i)=4$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$ ако је $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$.

II део (Писмени испит)

3. Исецањем два затворена диска B и C полупречника 1 и $\frac{1}{2}$, са центрима у тачкама 0 и 2, тим редом, из отвореног диска D полупречника 3 са центром у тачки 0, добијена је област V (видети слику). Одредити број нула полинома $p(z)=15z^5+2z^3+z^2+20z+1$ у области V.



4. Израчунати $\int_0^\infty \frac{x^{4m}}{x^{4n}+4}dx$, где су $n>m\geqslant 1$ природни бројеви.

5. Нека је функција f холоморфна у диску $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ и непрекидна у $\overline{\mathbb{D}}$, при чему важи $f=1$ на луку $\ell=\{e^{i\theta}:0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{n}\}$ јединичне кружнице $\mathbb{T}=\{z:|z|=1\}$, где је n природан број. Доказати да је $f=1$ у $\overline{\mathbb{D}}$.

2016/2017

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *15. септембар 2017.*

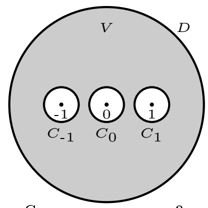
1. Израчунати $\int_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^2(z-1)}dz$ и $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{(\cos x+a)^2}dx$, где је $a>1$ и $n \in \mathbb{N}$.
2. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које јединичну кружницу $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ пресликава на кружницу $k=\{w\in\mathbb{C}:\left|w+\frac{16i}{5}\right|=\frac{9}{5}\}$ и за које важи $\phi(i)=-5i$, $\phi(0)=-\frac{i}{2}$. Доказати да је $|\phi(z)|\leqslant 1$ ако и само ако је $|z|\leqslant\frac{1}{3}$.
3. У зависности од $r>0$, одредити $\max\limits_{|z|\leqslant r}\left|e^{z^2-iz}\right|$.
4. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција и $\int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}dz=0$ за све $n\in\mathbb{N}$, при чему је $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ јединична кружница. Доказати да је f константна функција.

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *23. јун 2017.*

1. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање, за које важи $\phi(i)=2$, $\phi(0)=\frac{7}{3}$ и које праву $\ell=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z=1\}$ пресликава на кружницу $k=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$. Одредити $\phi(\mathbb{H})$, где је $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ горња полураван.
2. Израчунати $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^3}dx$.
3. Одредити $\max\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\left|e^{z^3}\right|$, где је $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ јединични диск.
4. Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција, таква да важи $f(0)=1$, $f'(0)=2$ и нека је $\alpha\in\mathbb{C}$. Израчунати $\int_{\mathbb{T}}(\operatorname{Re}z+\alpha)\frac{f(z)}{z}dz$, где је $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ јединична кружница.

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *11. фебруар 2017.*

1. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање, које кружницу $k=\{z\in\mathbb{C}:|z+2i|=1\}$ пресликава на праву $l=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w=-2\}$, при чему важи $\phi(0)=i$ и $\phi(-i)=\infty$. Одредити $\phi(\mathbb{H})$, где је $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ горња полураван.
2. Израчунати $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+x+1}dx$, где је $n\in\mathbb{N}$.
3. Исецањем три затворена диска C_{-1}, C_0 и C_1 полупречника $\frac{1}{3}$ са центрима у тачкама -1, 0 и 1, тим редом, из отвореног диска D полупречника 4 са центром у тачки 0, добијена је област V (видети слику). Одредити број нула полинома $p(z)=(z+1)^7+330z+400$ у области V.
4. Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција и $|f(z)|\leqslant\frac{c}{(1-|z|)^n}$ за све $z\in\mathbb{D}$, где је $n\in\mathbb{N}$ и $c>0$. Доказати да важи $|f'(z)|\leqslant\frac{2^{n+1}c}{(1-|z|)^{n+1}}$ за све $z\in\mathbb{D}$.



Слика уз задатак 3.

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *28. јануар 2017.*

1. Нека је $h=u+iv$ цела функција, таква да је $u=x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6+e^{-y}\cos x+3$ и $h(0)=4$. Одредити број нула функције h у горњој полуравни $\mathbb{H}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$.
2. Израчунати $\int_{|z|=1} \frac{(z+2)^2}{z^2(2z-1)}dz$ и $\int_0^{\pi} \frac{\cos 4x}{1+\cos^2 x}dx$.
3. Нека је $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праву $l=\{z:\operatorname{Re}z=2\}$ пресликава на кружницу $k=\left\{w:\left|w-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$ и праву $p=\{z:\operatorname{Re}z=1\}$ пресликава на саму себе, при чему је $\phi\left(\frac{4}{3}\right)=4$. Одредити $\phi(V)$, где је $V=\left\{z:|z|<1, 0<\arg z<\frac{\pi}{3}\right\}$.
4. Нека су $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ све нуле целе функције f, при чему постоје реални бројеви $R>0$ и $b>1$, такви да важи $|f(z)|\geqslant|z|^b$ за све $|z|\geqslant R$. Доказати да је $\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f},a_j\right)=0$.

2015/2016

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *10. септембар 2016.*

1. Одредити целу функцију $f = u + iv$, ако је $u = e^y(x\sin x - y\cos x) + 2x^3y - 2xy^3 - 3xy^2 + x^3 + x^2 - y^2$ и $f(0) = i$.
2. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које праве $l_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $l_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 5\}$ пресликава на кружнице $k_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w - \frac{7}{4}| = \frac{3}{4}\}$ и $k_2 = \{w \in \mathbb{C} : |w + 2| = 3\}$, тим редом, при чему важи $\phi(2i) = 4$. Одредити $\phi(\mathbb{T})$ ако је $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
3. (а) Израчунати $\int_\gamma (z^2 - \overline{z})dz$, ако је $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 1]$.
(б) Доказати да важи $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leqslant \pi e$, ако је $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
(в) Доказати да је $\int_0^{2\pi}(2\cos x)^{2n}dx = 2\pi\binom{2n}{n}$ за све $n \in \mathbb{N}$.
4. Нека је $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ полином степена $n \geqslant 1$, чије све нуле припадају јединичном диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и нека је $p^*(z) = z^n\overline{p}(z^{-1})$, где је $\overline{p}(z) = \sum_{j=0}^n \overline{a_j} z^j$. Доказати да сва решења једначине $p(z) + p^*(z) = 0$ припадају јединичној кружници $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *Јун 2016.*

1. (а) Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање, $\phi(0) = 1$, $\phi(i) = \infty$ и $\phi(\infty) = 2$. Одредити $\phi(\mathbb{D})$ ако је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
(б) Нека су z_1, z_2, z_3 и z_4 решења једначине $\phi(z)^4 = 1$. Израчунати $(z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.
2. (а) Одредити целу функцију $h = u + iv$, ако је $u = e^y(x\cos x + y\sin x) + x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 1$ и $h(0) = 1$.
(б) Одредити број нула функције h у доњој полуравни $\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.
3. Израчунати $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(2z+1)^2(3z-1)^3}$ и $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$, $a > 1$.
4. Нека је f цела функција, $l_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ и $l_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\}$, при чему важи $f(l_0 \cup l_1) \subset l_0$. Доказати да је $f(z + 2i) = f(z)$ за све $z \in \mathbb{C}$.

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *20. фебруар 2016.*

1. Одредити сва билинеарна пресликавања $w = \phi(z)$, таква да је $\phi(D_1) = D_2$, где је $D_1 = \{|z| < r_1\}$ и $D_2 = \{|z| < r_2\}$.
2. (а) Нека је f цела функција и $\operatorname{Re} f(z) \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.
(б) Нека је f цела функција и $\operatorname{Im} f(z) \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.
3. (а) Израчунати $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+\overline{b^2})}$ ако $a, b \in \Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.
(б) Нека $a_1, \ldots, a_n \in \Pi$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Доказати да је $\sum_{j,k=1}^n \frac{\overline{c_j}c_k}{a_j + \overline{a_k}} \geqslant 0$.
4. Скуп $M \subset \mathbb{C}$ има n елемената и за свака два елемента $z, w \in M$, важи $\frac{z}{w} \in M$. Доказати да је M скуп n-тих корена јединице.

***Увод у комплексну анализу* (Писмени испит)** *5. фебруар 2016.*

1. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање, $\phi(i) = i$, $\phi(3i) = -5i$ и $\phi(5i) = -3i$. Одредити $\phi(V)$ ако је $V = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. (а) Доказати да је $\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}dz$ за све $0 \leqslant k \leqslant n$, где је $n, k \in \mathbb{N}_0$ и $\gamma : |z| = \frac{1}{2}$.
(б) Израчунати $\sum_{n=0}^\infty \binom{3n}{n}\frac{1}{8^n}$.
3. (а) Одредити број нула полинома $p(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$ у прстену $A = \{1 < |z| < 2\}$.
(б) Одредити број нула полинома $p(z) = z^4 + z^3 + 1$ у првом квадранту $K = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.
(в) Одредити број решења једначине $(z - 1)^n = ae^{-z}$ у десној полуравни $\Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ ако је $0 < |a| < 1$ и $n \in \mathbb{N}$.
4. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ холоморфна функција и $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant m|z_1 - z_2|^\alpha$ за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, при чему је $m \in \mathbb{N}$ и $0 < \alpha \leqslant 1$. Доказати да је $|f'(z)| \leqslant m\left(\frac{1-|z|}{2}\right)^{\alpha-1}$ за све $z \in \mathbb{D}$.

2014/2015

УКА, КФ **(Писмени испит)** *3. септембар 2015.*

1. Нека је функција $u = 2x^3y + axy^3 + x^2 + by^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ реални део целе функције f.
(а) Одредити константе a и b.
(б) Одредити функцију $f(z)$, ако је $f(0) = i$.
2. (а) Нека је f цела функција и $|f(z) - i| \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.
(б) Нека је f цела функција и $|f(z) - i| \geqslant 1$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.
(в) Нека је f цела функција и $|\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) - i| \leqslant 1$ за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.
3. Нека је f цела функција, $f(0) = 3$ и $f'(0) = 1$. Израчунати $\int_0^{2\pi} f\left(e^{ix}\right) \cos^2 \frac{x}{2} dx$.
4. (а) Нека су $a, b \in \mathbb{C}$ две различите фиксне тачке билинеарног пресликавања $\phi(z)$. Доказати да постоји константа $c \in \mathbb{C}$, таква да је $\frac{\phi(z)-a}{\phi(z)-b} = c\frac{z-a}{z-b}$ за све $z \in \mathbb{C}$.
(б) Одредити $\phi_n(z) = (\underbrace{\phi \circ ... \circ \phi}_{n})(z)$, $n \in \mathbb{N}$, ако је $\phi(z) = \frac{1-3z}{z-3}$.

УКА, КФ **(Писмени испит)** *10. јун 2015.*

1. Нека је $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
(а) Израчунати $(1+\xi) \cdot \left(1+\xi^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\xi^{100}\right)$.
(б) Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да је $\left(a + 2\xi + \xi^2\right)^3$ реалан број.
2. Одредити број нула функције $h(z) = z + e^{-z} - 10$ у десној полуравни $\Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.
3. Израчунати интеграле $\int_{|z-1|=\sqrt{3}} \frac{z dz}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$ и $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+2a\cos x + a^2)^2}$, $0 < a < 1$.
4. Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање, такво да важи $\phi(i) = 7$, $\phi(3i) = 4$ и $\phi(0) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ за неко $n \in \mathbb{N}$, при чему је аритметичка средина елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{\phi(0)\}$ једнака 26.26. Колико је $\phi(2i)$?

УКА, КФ **(Писмени испит)** *11. фебруар 2015.*

1. (а) Да ли постоји цела функција f, таква да је $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5}$ за све $n \in \mathbb{N}$?
(б) Да ли постоји цела функција f, таква да је $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^6}$ за све $n \in \mathbb{N}$?
(в) Да ли постоји цела функција f, таква да је $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2+n}$ за све $n \in \mathbb{N}$?
(г) Одредити све целе функције f, такве да је $n^2 f^3\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.
2. Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ холоморфна функција и $|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|^{10}}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Доказати да је $|f'(0)|^{10} \leqslant \frac{11^{11}}{10^{10}}$.
3. Израчунати интеграле $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(2z+1)^2} dz$ и $\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos nx}{2-\cos x} dx$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Нека је f цела функција, таква да за свако $c \in \mathbb{C}$ постоји $m_c \in \mathbb{N}$, тако да је $f^{(m_c)}(c) = 0$. Доказати да је f полином.

УКА, КФ **(Писмени испит)** *22. јануар 2015.*

1. (а) Одредити сва билинеарна пресликавања $w = \phi(z)$, таква да је $\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, где је $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.
(б) Нека је $w = \phi(z)$ билинеарно пресликавање, такво да је $\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, $\phi \neq \mathrm{id}$ и $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$. Доказати да ϕ има јединствену фиксну тачку у $\mathbb{H}$.
2. (а) Одредити број нула полинома $p(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$ у прстену $A = \{1 < |z| < 2\}$ и диску $D\left(0, \frac{1}{3}\right)$.
(б) Одредити број решења једначине $z^7 + e^z = 0$ у полудиску $V = \{|z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$.
3. Израчунати $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx$.
4. Правилан n-тоугао са страницама S_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ смештен је у комплексну раван, тако да је његов центар у тачки 0. Нека је f цела функција, таква да је $|f| \leqslant j$ на S_j за све $1 \leqslant j \leqslant n$. Доказати да је $|f(0)|^n \leqslant n!$.