

1 Математика 3

1.1 РЕДОВИ - ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

1. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$.

2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$.

3. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$

4. Нека је низ x_n задат са

$$6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n, n \geq 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{n(n+2)}.$$

5. а) Доказати да је $[0, \infty)$ област конвергенције реда $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}$.

б) Испитати непрекидност и диференцијабилност функције $F(x)$ на $[0, \infty)$.

6. Нека је низ a_n задат са

$$a_0 > 0,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{e^{a_n} - 1}, n \geq 0.$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

7. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} \cdot e^{-\frac{1}{n}}$.

8. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n \sin n}{n}$.

9. Одредити област конвергенције реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n)(x-2)^n}{n \ln n}$.

10. Нека је низ x_n задат са

$$4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 1$$

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{4}.$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x_n}{n}$$

и сумирати га ако конвергира.

11. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n}{n^2 + n + 1}$$

.

12. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^5}{3^n + \ln(n^{10} + 1)} \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)$.

13. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{\ln(n+1)}$

14. Одредити област конвергенције реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{\ln n} (x-2)^n$.

15. Нека је низ x_n задат са

$$6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 0$$

$$x_0 = 2, x_1 = \frac{5}{6}.$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx_n \cos n$$

и сумирати га ако конвергира.

16. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{(n+1) \ln(n+1)}$$

17. Доказати да је

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(t \cos x) dx, \quad 0 \leq t \leq 1$$

и наћи $S(1)$.

18. Функцију $f(x) = \int_0^x t \ln \sqrt{\frac{t+1}{1-t}} dt$ развити у степени ред око тачке 0. Одредити област конвергенције тог реда и израчунати $f(1)$.

19. Разложити у Фуријеов ред функцију $x \rightarrow \operatorname{sgn}(\cos x)$.

20. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \pi^2 - x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

21. Развити функцију $f(x) = \arcsin(\cos x)$ у Фуријеов ред и наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

22. Функцију $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ развити у синусни Фуријеов ред. Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2n}{4n^2 - 1}$.

23. Развити функцију $x \rightarrow \arcsin(\cos x)$ у Фуријеов ред и на основу тога одредити суме редова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

24. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и испитати његову конвергенцију.

25. Развити у Фуријеов ред по косинусима функцију

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, h), \\ 0, & x \in (h, \pi), \end{cases}$$

где је $h \in (0, \pi)$. Израчунати

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

26. Нека је $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$, $f_h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2h}, & \text{ако је } |x| \leq 2h \\ 0, & \text{ако је } 2h < |x| \leq \pi \end{cases}$ и на даље 2π периодично продужена. (а) Развити функцију $f_h(x)$ у Фуријеов ред и одредити његову суму. (б) Користећи добијени развој, израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{n}$.

27. Функцију $f(x) = x \sin x + 3$ представити Фуријеовим редом на $[-\pi, \pi]$.

28. Функцију $f(x) = |\cos x| + \cos x$ представити Фуријеовим редом на $[-\pi, \pi]$ и израчунати суме редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

29. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |\sin x|$, $-\pi < x < \pi$. Израчунати суме редова $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{4k^2-1}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k^2-1}\right)^2$.

30. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sin ax$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $-\pi < x < \pi$ и израчунати суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin n}{4n^2 - 1}.$$

31. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \cos ax$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $-\pi < x < \pi$ и извести формулу разлагања котангенса на елементарне разломке, $\cot(\pi a) - \frac{1}{\pi a} = -\frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$.

32. Функцију $f(x) = x \cos x + 3$ представити Фуријеовим редом на $(-\pi, \pi)$ и одредити суму реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{k(k+1)}$.

33. Функцију $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x$ представити косинусним редом на $[0, \pi]$ и одредити суму реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$.

34. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x \cos x$, $-\pi < x < \pi$ и испитати његову конвергенцију. Израчунати суме редова $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2-1} \sin \frac{k}{2}$ и $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2$.

35. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \cos ax$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $-\pi < x < \pi$ и

- извести формулу разлагања котангенса на елементарне разломке, $\cot \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$.
- на основу претходне формуле, извести формулу $\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, $|x| \leqslant q < 1$.

36. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x \cos x$, $-\pi < x < \pi$ и испитати његову конвергенцију. Израчунати суме редова $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2-1} \sin \frac{k}{2}$ и $\sum_{k=2}^{\infty} (\frac{k}{k^2-1})^2$.

37. Функцију задату са

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

и 2π -периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 2k}{(2k-1)2k(2k+1)}$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$

38. а) Одредити полупречник и област конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ и сумирати га.

б) Користећи део под а), израчунати $\int_0^{\infty} (\frac{x}{\sinh x})^2 dx$.

39. Користећи развој подинтегралне функције у степени ред, израчунати

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx.$$

40. Функцију задату са

$$f_h(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{4h}, & |x| \leq 2h; \\ 0, & 2h < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

за $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$ и 2π -периодично продужену, развити у Фуријеов ред и наћи суме редова

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2 2k}{\pi^2 - 4k^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$