Задаци, Математика III

Зора Голубовић

Октобар, 2021

1 час, Нумерички редови

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је бесконачни ред са општим чланом a_n.

$S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_k$ је парцијална сума реда. Кажемо да ред конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума.
Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1. Нека је $a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_{n+1} = \cos a_n$, $n \geq 0$. Да ли ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира?

Очигледно је $0 \leq a_n \leq 1$, $n \geq 2$. Важи $a_{n+1} = \cos a_n \geq \cos 1 > 0$, одакле општи члан реда не тежи нули кад $n \to \infty$, па ред дивергира.

2. Хармонијски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Кошијевим критеријумом се показује да низ парцијалних сума није Кошијев. Нека је $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и $m = 2n$, тада $|S_m - S_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$.

3. Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира.

Одредимо најпре парцијалну суму. Множењем суме $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n, добија се да се сви чланови сем првог и последњег поništе, па је $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

(Кошијев став) Нека је a_n опадајући низ позитивних чланова. Тада су редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквиконвергентни.

4. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$.

Применом претходног Кошијевог става налазимо да је посматрани ред еквиконвергентан геометријском реду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^n$ који конвергира за $\alpha > 1$.

5. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Посматрајмо суме $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ и $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$: $S_1 + iS_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cis(\frac{2n\pi}{3})}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2})^n = \frac{\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}}{1-\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}} = \frac{5}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$. Одавде је $S_1 = Re(\frac{5}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}) = \frac{5}{7}$.

(Даламберов тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Конвергира по Даламберу, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Конвергира по Даламберу, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Дивергира по Даламберу, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{(\frac{n+1}{n})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1$.

(Кошијев тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. За $l<1$ ред конвергира, а за $l>1$ дивергира.

9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$.

Конвергира по Кошију, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n+1})^{(\frac{-(n+1)}{2})(\frac{n-1}{-2(n+1)})}=e^{-\frac{1}{2}}<1$.

10. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$.

Конвергира по Кошију, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n+3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{n^5}{1+(\frac{2}{3})^n}}=\frac{1}{3}<1$.

11. Кошијевим критеријумом доказати конвергенцију или дивергенцију редова:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Конвергира, дивергира.

(Кошијев интегрални критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x\geq 1$ и $a_n=f(n)$. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира акко конвергира несвојствени интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$.

12. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$ у зависности од параметра $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ред очигледно дивергира за $\alpha\leq 0$. Нека је зато $\alpha>0$. Дати ред је еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$, који је према Кошијевом интегралном критеријуму еквиконвергентан са несвојственим интегралом $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$. За

$\alpha = 1$, применом парцијалног интеграљења се добија да интеграл дивергира. За $\alpha < 1$ интеграл дивергира по поредбеном критеријуму. Нека је $\alpha > 1$. Тада имамо $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to\infty} (\frac{\ln x}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}|_1^b - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx) = \lim\limits_{b\to\infty} (\frac{lnb}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}$. Дакле, полазни ред конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$.

13. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^\infty \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^\alpha}$.

Конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$ по Кошијевом интегралном критеријуму.

2 час, Нумерички редови

(Раабеов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$. За $l > 1$ ред конвергира, а за $l < 1$ ред дивергира.
(Гаусов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$. За $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$ ред конвергира, а за $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu < 1$ ред дивергира.
1. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.
$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1}e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1}e^{(n+p)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n}))} = 1 + \frac{p-\frac{1}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, конвергира по Раабеу за $p > \frac{3}{2}$.
2. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$.
$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+\frac{p}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{q+1} = (1-\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n}))(1+\frac{q+1}{n}+o(\frac{1}{n})) = 1 + \frac{q+1-p}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q > p$.
3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^\infty [\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}]^p \frac{1}{n^q}$.
$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q+\frac{p}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q + \frac{p}{2} > 1$.
4. Испитати конвергенцију хипергеометријског реда $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$, где су $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$.
За $\gamma > \alpha + \beta$ ред конвергира, а дивергира за $\gamma \leq \alpha + \beta$ (Гаус).
(Лајбницов тест) Ако је $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, онда алтернативни ред $\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ конвергира.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2(n)}{n}$.

Конвергира по Лајбницу, $\frac{\ln^2(n)}{n}$ је опадајући низ који тежи 0.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

Конвергира по Лајбницу, $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}-\pi n) = (-1)^n\sin(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}) = (-1)^n a_n$, при чему је a_n опадајући низ који тежи 0.

(Абелов тест) Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n b_n$ конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ и низ b_n је монотоно ограничен.

(Дирихлеов тест) Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n b_n$ конвергира ако низ b_n монотоно тежи нули почев од неког члана и низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ је ограничен.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

Конвергира као сума таквих редова, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}$. Први ред конвергира по Лајбницу јер $\frac{1}{2n}$ опадајуће тежи нули, а други ред конвергира по Дирихлеу.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Конвергира (Лајбниц и Абел).

9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$.

Конвергира (Дирихле).

Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$.

10. Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ конвергира, $a_n \geq 0$, онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$.

Општи члан реда тежи нули, па је ограничен са 1.

11. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ апсолутно конвергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ конвергира.

Применом аритметичко-геометријске неједнакости и претходног задатка, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

3 час, Нумерички редови

1. Израчунати суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c+n+1-(c+n)}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+1)}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n-1)(c+n+1)}=$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{c+n-1}-\frac{1}{c+n})-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(c+n-1)}-\frac{1}{(c+n+1)})=\frac{1}{c}-\frac{1}{2}(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+1})=\frac{1}{2c(c+1)}$.

2. Одредити парцијалну суму, суму и остатак реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$.

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(\arctan\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k+1})=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{n+1}$, $s=\frac{\pi}{4}$, $r_n=\arctan\frac{1}{n+1}$.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$.

Конвергира по Кошијевом критеријуму; нека је $\varepsilon>0$, оценимо разлику $S_{n+p}-S_n$: $|S_{n+p}-S_n|=|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}|\leq\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+m}\leq\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ за $n>n_0=[\frac{1}{\varepsilon}]$.

4. Доказати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\ln(\frac{n+1}{n})$.

$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}$ где је коришћено да је $\ln(1+x)\geq\frac{x}{x+1}$ за $x\geq 0$, па је задати ред конвергентан на основу поредбеног критеријума.

5. Испитати конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(\frac{a}{n})^n$, $a>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{!(n+1)}{(2n)!}$.

Коши, Даламбер, Раабе и поредбени тест.

6. Доказати да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$.

7. Наћи вредности следећих бесконачних производа: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$, $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

$\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

8. Установљавајући конвергенцију одговарајућег реда, доказати да је: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

Ред са општим чланом $a_n=\frac{n!}{n^n}$ конвергира по Даламберу јер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$, па општи члан тежи нули. Аналогно, ред са општим чланом $a_n=\frac{n!}{n^n}$ конвергира по Даламберу јер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(n+1)^2}=0<1$, па општи члан тежи нули. Ред са општим чланом $a_n = \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$ конвергира по Кошију јер $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, па његов општи члан тежи нули.

9. Испитати за које је вредности параметра α ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ апсолутно конвергентан, а за које је условно конвергентан.
За $\alpha \in (0,1]$ ред условно конвергира, а за $\alpha > 1$ ред конвергира апсолутно.
10. Испитати апсолутну конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}) \arctan(\frac{\sin n}{n})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})$.
Оба апсолутно конвергирају.

4 час, Функционални низови и редови

1. Одредити област конвергенције функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n 2^{nx}$.
Ред је конвергентан за свако $x < 0$.
2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$.
Ред је апсолутно конвергентан ако је $0 \le y \le 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$. Ако је $x = -1$ и $0 \le y \le 1$, ред је условно конвергентан.
3. Испитати равномерну конвергенцију следећих низова на указаним скуповима:
$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$ на $[-1,1]$ и $f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ на $[0,\infty)$.
Оба низа су равномерно конвергентна на датим скуповима.
4. Доказати да је низ функција $f_n(x) = \frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}$ равномерно конвергентан ка функцији $f(x) = 1$ на сегменту $[0,1]$. Да ли је низ равномерно конвергентан функцији f на целој реалној правој?
Низ није равномерно конвергентан функцији f на $\mathbb{R}$.
Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A акко $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n,p \in \mathbb{N})(n > n_0 \implies |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| < \varepsilon)$.
5. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$ на скуповима $(0,\infty)$ и (δ,∞), $\delta > 0$.
Неравномерно конвергентан, равномерно конвергентан.
6. Испитати конвергенцију и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на

скупу E, где је
1. $f_n(x) = e^{-n^2x^2} \sin nx$, $E = \mathbb{R}$,
2. $f_n(x) = \arctan \frac{x^3}{n\sqrt{n}}$, $E = [0, \infty)$.
(Вајерштрасов критеријум) Ако постоји низ ненегативних реалних бројева $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да
1. постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leq c_n$,
2. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,
тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.
8. Доказати да је сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.
Вајерштрасовим критеријумом.
9. Користећи Вајерштрасов критеријум доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n^2 x \cos n\pi x}{n\sqrt{n}}$ конвергентан на $\mathbb{R}$ и да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2(n+1)}\right)$ конвергентан на $[0, 2]$.
10. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2x}{x+n^3} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$ на скуповима $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, \infty)$.
Равномерно конвергира на E_1 и неравномерно на E_2.

5 час, Функционални низови и редови

(Дирихлеов критеријум) Нека:
1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K, таква да је за све $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leq K$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који равномерно конвергира нули.
Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно конвергира на A.
1. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ на $\mathbb{R}$.
Дирихлеовим критеријумом.
(Абелов критеријум) Нека:

1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbb{R}$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbb{R}$ важи $|a_n(x)| \leq K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.
Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

2. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}(1+\frac{x}{n})^n$ на $[0,1]$.
Абеловим критеријумом.

3. Наћи $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$.
Резутат: $\frac{\ln 2}{2}$.

4. Одредити област дефинисаности и испитати непрекидност функције $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^2+\frac{1}{n})^n$.

Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интеграбилних на сегменту $[a,b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интеграбилна функција и важи $\int\limits_a^b (\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b a_n(x)dx$.

5. Одредити суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а затим користећи добијени резултат наћи суму бројног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.
Тражене суме су $\arctan x$ и $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Ако је свака од функција $a_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ диференцијабилна и ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно конвергира на $[a,b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 \in [a,b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a,b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ за $x \in [a,b]$.

6. Наћи суме редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.
$-\ln(1-x)$, $x + (1-x)\ln(1-x)$.

7. Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0,1]$, а да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

6 час, Степени редови

Степени ред се унутар свог радијуса конвергенције може диференцирати и интегрисати члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни ред.

1. Одредити полупречник конвергенције R степеног реда

1. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,

2. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n \cdot 2^n} z^n$,

3. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} 5^n z^{3n}$.

1. $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}| = 1$.

2. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{|1+i|^n}{n2^n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. За $t = 5z^3$ се добија stepeni ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n$ који конвергира за $5|z^3| < 1$, $z < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, а дивергира за $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

2. Одредити област конвергенције степених редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Одредимо R за први ред:
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3(n+1)^2+2}} = 1$, па је ред конвергентан у $(0,2)$ и треба испитати понашање у крајњим тачкама. За $x = 0$ добија се ред конвергентан по Лајбницу, а за $x = 2$ се добија дивергентан ред (по поредбеном критеријуму). Област конвергенције је $[0,2)$.

Одредимо R за други ред: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3}$, па је ред конвергентан у $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ и треба испитати понашање у крајњим тачкама. За $x = -\frac{4}{3}$ добија се ред конвергентан као сума два таква реда (по Лајбницу и Дирихлеу), а за $x = -\frac{2}{3}$ се добија дивергентан ред. Област конвергенције $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Испитати обичну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha} x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Написати разлагање функције $f(x) = \sin^3 x$ у степени ред по степенима x, а затим одредити област у којој важи добијени развој.

$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-9^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$.

5. Доказати да је $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x| < 1$.

6. Разложити у степени ред по степенима x функцију $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.
$f(x) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^{n+1})x^n$.
7. Представити интеграл $\int_0^1 x^{-x}dx$ у облику реда.
$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.
8. Разложити Лапласов интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bxdx$ у степени ред по степенима $b > 0$, користећи чињеницу да је $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$.

7 час, Степени редови

Функција је аналитичка у некој тачки ако се може представити у облику конвергентног степеног реда у околини те тачке.
Нека је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ аналитичка функција у некој околини тачке (x_0, y_0, y_0'). Тада постоји јединствено решење Кошијевог задатка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, дефинисано у некој околини тачке x_0 и оно је аналитичка функција у тој околини.
Тачка x_0 је регуларна тачка ДЈ ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки. Тачка x_0 је сингуларна тачка ДЈ ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тачки x_0.
Ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке функције у области $|x - x_0| < R$, тада је свако решење ДЈ јединствена аналитичка функција у овој области.
1. Методом неодређених коефицијената одредити у облику степеног реда решење Кошијевог задатка $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$.
$y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \ldots$.
2. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y'' - xy = 0$ које се може приказати у облику степеног реда по степенима x и које задовољава почетне услове $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(2\cdot3)(5\cdot6)\cdots((3n-1)\cdot3n)}$.
3. Решити ДЈ $y'' - x^2y = 0$.
$y(x) = a_0 + a_1x + a_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k}}{4\cdot3\cdot8\cdot7\cdots4k(4k-1)} + a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{5\cdot4\cdot9\cdot8\cdots(4k+1)4k}$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.
4. Методом степених редова одредити Кошијево решење у коначном облику

једначине $y'' - xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
$y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = xe^{\frac{x^2}{2}}$.
5. У области $|x| < 1$ одредити опште решење ДЈ $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$.
$y(x) = a_0 \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)x^{2k} + \frac{a_1}{3} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2k+3)x^{2k+1}$.
6. Представити степеним редом опште решење нехомогене ДЈ $y'' + x^2 y = 1 + x + x^2$.
$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1-a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^+ \dots$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.
Сингуларну тачку x_0 зовемо регуларно-сингуларном тачком ако су функције $(x - x_0)p_1(x)$ и $(x - x_0)^2 p_2(x)$ аналитичке функције у тој тачки.
8. Испитати регуларност тачке $x = 0$ за $2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$.
$x = 0$ је регуларно-сингуларна тачка.

8 час, Функционални низови и редови

Нека ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира. Тада се његова сума може наћи по формули $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
1. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.
$S = 3e^2$.
2. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.
$S = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}$.
3. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}$ решење диференцијалне једначине $xy'' + y' + xy = 0$.
4. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.
5. Дат је функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$. Одредити за које вредности параметра a
1. функционални ред конвергира,
2. сума реда представља непрекидну функцију,
3. ред може да се диференцира члан по члан.
1. $a > 1$,
2. $a > 1$,

3. $a > 2$.
6. Израчунати $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx$.
$e - e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e}$.
7. Дат је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^{\alpha}}{n(n+1)(n+2)} x^n$.
1. Испитати условну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда.
2. За $x = 1$, $\alpha = 1$ сумирати ред.
1. За $\alpha < 2$ ред је апсолутно и равномерно конвергентан на $[-1, 1]$, док је за $x = -1$ и $2 \leq \alpha < 3$ ред условно конвергентан.
2. Тражена сума је 2.

9 час, Фуријеови редови

Систем функција $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [-l, l]$, се назива основним тригонометријским системом. Он је ортогоналан на $[-l, l]$. Нека је $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ интеграбилна функција на $[-l, l]$. Бројеви $a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) dx$, $a_k = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{k\pi x}{l} dx$, $a_k = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx$, се зову Фуријеови коефицијенти функције f у односу на основни тригонометријски систем. Тригонометријски ред $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l})$ је Фуријеов ред функције f.
1. Нека је $c \in \mathbb{R}$, $l > 0$ и $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \ldots$ низ решења једначине $\tan l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin \xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ортогоналан у $C[0, l]$.
2. Разложити у Фуријеов ред периодичну функцију основне периоде 2π која је на сегменту $[-\pi, \pi]$ одређена формулом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$, $n \geq 1$.
3. Разложити у Фуријеов ред функцију на интервалу $(0, 2l)$

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x < l, \\ 0, & l \leq x < 2l. \end{cases}$$

$a_0 = A$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1} + 1)$, $n \geq 1$.
4. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

$a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$, $b_n = 0$, $n \geq 1$.
5. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$ и написати како гласи Парсевалова неједнакост.
$a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n n-1}{n^2-1}$, $n \geq 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$, $n \geq 2$.
6. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x^2$:
1. по синусима,
2. по косинусима,
3. на интервалу $(0, 2\pi)$.
Користећи добијено разлагање доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
1. $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$, $b_n = 0$, $n \geq 1$,
2. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$, $n \geq 1$,
3. $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$, $b_n = -\frac{4\pi}{n}$, $n \geq 1$.

10 час, Фуријеови редови

Нека је део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ са периодом $2l$ продужена на целу бројну праву. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ ка вредности $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.
Ако део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ још задовољава и једнакост $f(-l) = f(l)$, онда њен тригонометријски Фуријеов ред конвергира равномерно на том сегменту и његова сума је једнака $f(x)$ за свако $x \in [-l, l]$.
Фуријеов ред Риман-интеграбилне функције на сегменту $[-l, l]$ се може на том сегменту интегралити члан по члан.
Нека $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, $\ldots$ $f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$. Нека поред тога функција f има на сегменту $[-l, l]$ део по део непрекидан извод реда $m + 1$. Тада:
1. конвергира бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{k\pi}{l})^m(|a_k| + |b_k|)$,
2. Фуријеов ред такве функције можемо на датом сегменту диференцирати члан по члан m пута.
1. Функцију $f(x) = x - [x]$ разложити у Фуријеов ред.

2. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos \frac{2n\pi}{3} - 1)$, $b_n = 0$, $n \geq 1$.
3. Функцију $f(x) = x$, $0 < x < 2$ развити:
1. у Фуријеов синусни ред,
2. у Фуријеов косинусни ред,
3. Применити Парсевалову једнакост на Фуријеов ред добијен под 2. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
4. Наћи Фуријеов ред функције $x \to x^2$, $0 < x < 2$ интеграљењем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
1. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi$, $n \geq 1$,
2. $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \geq 1$,
3. $S = \frac{\pi^4}{90}$,
4. $S = \frac{\pi^2}{12}$.
4. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi, \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Испитати његову конвергенцију и наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geq 1$.
5. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и испитати његову конвергенцију.
$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2 \sinh a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2}$.
6. Доказати да тригонометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ не може бити Фуријеов ред ниједне део по део непрекидне функције на $[-\pi, \pi]$.
7. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интеграбилне функције f са основним периодом 2π, одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.
$A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n \sinh nh}{nh}$, $B_n = \frac{b_n \sinh nh}{nh}$.

11 час, Диференцијалне једначине првог реда у симетричном облику

Нека су у једноструко повезаној области D функције P'_x и Q'_t непрекидне. Следећа два услова су еквивалентна:
1.$P'_x = Q'_t$ sa све $(t, x) \in D$,
2.$Pdt + Qdx$ је тотални диференцијал у D.
$F(t,x) = \int Pdt + \int [Q(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} \int P(t,x)dt]dx$
1. Решити ДЈ $x(y^2+1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$.
$x^2y^2 + x^2 + y^4 = C$.
2. Решити ДЈ $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0$.
$\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + Ce^{x^2} - 2e^{x^2} \int e^{-x^2} dx$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Решити ДЈ $y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x$.
$\frac{1}{\cos^3 y} = Ce^{-3x^2} + 2x^2 - \frac{2}{3}$.
4. Решити ДЈ $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.
$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$.
Функцију $\mu = \mu(t, x)$ дефинисану, непрекидну и различиту од 0 у једноструко повезаној области D називамо интеграционим фактором једначине $Pdt + Qdx$ ако је $\mu Pdt + \mu Qdx$ једначина са тоталним диференцијалом.
Ако се интеграциони фактор може изразити помоћу функције $\mu = \mu(\omega)$, тада из $(\mu P)'_x = (\mu Q)'_t$ добијамо $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_x - Q'_t}{\omega'_t Q - \omega'_x P} d\omega$.
5. Одредити интеграциони фактор:
1. ДЈ која раздваја промењиве,
2. линеарне ДЈ.
6. Решити ДЈ $x(1 + xy^2)y' = y(2 - 3xy^2)$ и одредити решење које пролази кроз $(-2, 0)$.
$\frac{x^2 - x^3y^2}{y} = C$, $y = 0, x < 0$.
7. Решити ДЈ $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$.
$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$.
8. Решити ДЈ $(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0$ ако је познато да има $\mu = \mu(x^2 - y)$.
$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C$.

12 час, ДЈ које се решавају без и са параметризацијом

1. Решити ДЈ $y'^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$.
Опште решење $(y - \frac{x^3}{3} - C)(y - De^x) = 0$, (x_0, x_0^2) сингуларне тачке. 2.

Решити ДЈ $(y')^3 - 4yy' = 0$.
3. Решити ДЈ $xy'^2 - 2y' + 4x = 0$.
Опште решење $(\frac{y}{x^2} - \frac{\sqrt{\frac{y}{x^2}-4}}{x} - C)(D - x(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 4})) = 0$. 4. Решити ДЈ $y - y'^2 e^{y'} = 0$.
$x = e^u(u+1) + C$, $y = u^2 e^u$ опште решење у параметарском облику.
5. Решити ДЈ $y \ln y' + y' - y \ln y - xy = 0$, $y > 0$, $y' > 0$.
$x = \ln u + \frac{u}{y} - \ln y$, $\ln|y| + C = \frac{u}{y} + \frac{u^2}{2y^2}$ опште решење у параметарском облику.
6. Решити ДЈ $y - yy'^2 - 2y'x = 0$.
$x = C\frac{v^2-1}{v^2}$, $y = -\frac{2C}{v}$.
7. Погодном сменом упростити ДЈ и решити је $y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 + a = 0$.
$y^2 = -(x-c)^2 + \frac{c^2-a}{2}$.
8. Решити ДЈ $x^{n-1}y'^n - nxy' + y = 0$, $n \neq 0$, $x > 0$.

13 час, Лагранжова и Клерова ДЈ

1. Решити ДЈ $y = 3xy' - 7y'^3$.
2. Решити ДЈ $y = xy' + \sqrt{y'^2 + 1}$.
3. Решити ДЈ $\ln y' + xy' + ay + b = 0$.
4. Решити ДЈ $yy'^2 + axy' + by = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

14 час, Диференцијалне једначине n-тог реда

$F(x, y^{(n)}) = 0$ је најједноставнија ДЈ чије се опште решење добија узастопном интеграцијом n пута. Ова једначина нема сингуларних решења.
$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}) = 0$ се сменом $y^{(k)} = z$, трансформише у ДЈ нижег реда.
Ако је ДЈ облика $f(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$, ред ДЈ се снижава за један сменом $y' = z$, где је $y \neq const$ нова независно променљива, а $z = z(y)$ за нову непознату функцију.
Диференцијалној једначини хомогенитета m (односно, $F(x, ty, ty', \dots ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots y^{(n)})$) ред се снижава сменом $y' = yz$, где је $z = z(x)$ нова непозната функција.
Ако је ДЈ уопштена хомогена ДЈ ($F(e^t x, e^{kt}y, e^{(k-1)t}y', \dots e^{(k-n)t}y^{(n)}) = e^{mt}F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ за неке k и m) једначина се трансформише у једначину трећег типа параметризацијом $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, где је t нова независно

променљива, а $u = u(t)$ нова непозната функција.
$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y = f(x)$ је канонски облик линеарне диференцијалне једначине n-тог реда (за $f(x) = 0$ добија се одговарајућа хомогена линеарна ДЈ). Скуп решења посматране једначине образује вектроски простор на пољем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. 1. Решити једначину $x = \frac{y''}{1+y''^2}$.
$y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ има опште решење $-\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c_1x + c_2$, $|x| < 1$.
2. Решити једначину $y'' + 2y' = e^x y'^2$.
$y = -e^{-x} - c_1x + c_1 \ln|1 + c_1e^x| + c_2$, $y = c$.
3. Решити једначину $y''^2 = 4(y' - 1)$.
$y = x + \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2$, $y = x + c$.
4. Решити ДЈ $y'' = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
$y = \frac{1}{2}x\ln^2 x - x\ln x + x + C_1x + C_2$.
5. Решити ДЈ $x - \sin y'' + 2y'' = 0$.
$dy = (t\sin t + \cos t - t^2 + C_1)(\cos t - 2)dt$.
6. Одредити сва решења ДЈ $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$ која задовољавају почетне услове $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$.
$y = C_1\frac{x^3}{6} - C_1^3\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$ је опште решење, $y = \pm\frac{8}{105\sqrt{3}}x^{\frac{7}{2}} + C_4x + C_5$ је сингуларно решење за $u \neq 0$. Постоје 3 решења која адовољавају почетне услове.
7. Решити ДЈ $yy'' - 2yy'\ln y - y'^2 = 0$, $y > 0$.
8. Одредити опште решење ДЈ $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.
9. Решити ДЈ $x^3y'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0$.

15 час, Линеарна ДЈ n-тог реда са константним коефицијентима, метод варијације константи, линеарна ДЈ n-тог реда са функционалним коефицијентима

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$, $a_0, a_1, \ldots a_n, g$ дефинисане на (a, b). Тачку x_0 зовемо сингуларном ако је $a_0(x_0) = 0$, у супротном, тачка је регуларна. Ако су све тачке интервала (a, b) регуларне, можемо добити канонски облик линеарне ДЈ n-тог реда:
$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x)$.
1. Одредити опште решење ДЈ
1. $y''' - 13' - 12 = 0$,
2. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$,
3. $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

2. Одредити Кошијево решење ДЈ $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
3. Решити ДЈ $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.
4. Решити ДЈ методом варијације константи $y'' + 4y = 2\tan x$.
5. Решити ДЈ $x^2y'' - xy' + 4y = \cos\ln x + x\sin\ln x$.
6. Одредити опште решење ДЈ $(x+a)^3y''' + 3(1-b)(x+a)^2y'' + (3b^2-3b+1)(x+a)y' - b^3y = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

16 час, Степени редови

1. У близини координатног почетка одредити опште решење ДЈ $2(x^2+x^3)y'' - (x-3x^2)y' + y = 0$.
$y_1(x) = \frac{c_1x + c_2|x|^{\frac{1}{2}}}{1+x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. Решити ДЈ $x^2y'' + (x^2-3x)y' - (x-4)y = 0$.
$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, $y_1(x) = x^2e^{-x}$,
$y_2(x) = x^2\ln|x|e^{-x} + x^2(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \dots)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

17 час, Гранични проблеми (Гринова функција)

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & \alpha \le t \le s, \\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(s)}, & s \le t \le \beta. \end{cases}$$

1. Наћи Гринову функцију за гранични задатак $t^2x'' - 2x = f(x)$, $x(1) = 0$, $x(2) + 2x'(2) = 0$.

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1-t^3}{3st}, & 1 \le t \le s, \\ \frac{1-s^3}{3st}, & s \le t \le 2. \end{cases}$$

2. Наћи Гринову функцију за гранични задатак: $x'' - x = f(t)$, $x(t)$ ограничено за $t \to \pm\infty$.

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{t-s}}{2}, & -\infty \le t \le s, \\ \frac{e^{s-t}}{2}, & s \le t \le \infty. \end{cases}$$

18 час, Системи диференцијалних једначина

1. Свести на нормални систем ДЈ и систем ДЈ:
1. $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$,
2. $y'' = z$, $z' = \frac{2y}{x^2} - y'$.
2. Методом елиминације решити систем ДЈ $y'' = 2y - 3z$, $z'' = y - 2z$.
3. Сменом $y = u(x)v(x)$, $u, v \in C^2(a, b)$ трансформисати ДЈ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $p \in C^1(a, b)$, $q \in C(a, b)$ у ДЈ без првог извода. (Проналажење инваријанте)
4. Методом елиминације решити $x^2y' - z = 0$, $xz' + x(x^2 + 2)y = 4z$.
5. Методом елиминације решити систем ДЈ $xy' - y - 3z = 0$, $xz' - y + z = 0$.
6. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{x+^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.
7. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+u} = \frac{du}{xy}$.
8. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{4y-3z} = \frac{dy}{4x-2z} = \frac{dz}{2y-3x}$.
9. Решити Кошијев проблем система ДЈ $\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$, $z(0) = -1$, $y(0) = 1$.
10. Одредити опште решење нехомогеног линеарног система ДЈ $y_1' = y_2 + \tan^2 x + 1$, $y_2' = -y_1 + \tan x$.

19 час, Системи диференцијалних једначина

1. Матричном методом решити систем ДЈ

$$y_1' = y_2 + \tan^2 x + 1,$$

$$y_2' = -y_1 + \tan x$$

ако су позната да линеарно независна решења одговарајућег хомогеног система.
2. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2,$$
$$y_2' = 4y_1 + 5y_2.$$

3. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$
$$y_2' = -y_1 + 2y_2.$$

4. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 5y_1 + 2y_2,$$
$$y_2' = -4y_1 - y_2.$$

5. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 3y_1 + y_2,$$
$$y_2' = -y_1 + y_2.$$

6. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$
$$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3,$$
$$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3.$$

7. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3,$$
$$y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3,$$
$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3.$$

8. Решити систем ДЈ

$$xy_1' = -6y_1 + y_2 + 3y_3,$$
$$xy_2' = -23y_1 + 6y_2 + 9y_3,$$
$$xy_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3.$$

20 час, Линеарне парцијалне једначине I реда

1. Решити Кошијев проблем хомогене линеарне ПДЈ $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u|_{x=1} = y + z$.
2. Решити хомогену линеарну ПДЈ $(2z-3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
3. Одредити једначину површи G која садржи круг $x^2 + y^2 = r^2$, $z = h$ и ортогонална је на фамилију хиперболоида $xy = cz^2$, $h, r, c \neq 0$.
4. Решити Пфафове једначине $dz = (2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1)d - 2ydy$ и $(\cos x + e^x)dx + (e^x + e^y z)dy + e^y dz = 0$.
5. Наћи потпуни, општи и сингуларни интеграл једначине $p = (qy + z)^2$ и одредити услове постојања Кошијевог интеграла који садржи криву $y = 1$, $z = g(x)$.
6. Одредити потпуне интеграле посебних типова ПДЈ 1. $A(x, p) = B(y, q)$, ПДЈ која раздваја променљиве,
2. $z = xp + yq + f(p, q)$, Клерова ПДЈ,
3. $F(z, p, q) = 0$.

21 час, Парцијалне једначине II реда

1. Одредити тип ПДЈ $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је хиперболичног типа, а канонски облик је $y_{\xi\eta} = 0$.
2. Одредити тип ПДЈ $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је параболичног типа, а канонски облик је $u_{\eta\eta} + 2(\frac{\xi}{\eta})^2 u_\xi = 0$.
3. Одредити тип ПДЈ $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је елиптичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\xi}{\xi+\eta} + \frac{u_\eta}{2\eta} = 0$.
4. Одредити области у којима је једначина $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ хиперболичног, параболичног и елиптичног типа и у сва три случаја написати формуле трансформације за свођење на канонски облик.
5. Наћи опште решење следећих ПДЈ:
а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 2(x + e^y)$,
б) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.
6. Датом сменом наћи опште решење следећих ПДЈ: а) $\frac{\delta(x^2 u_x)}{\delta x} = x^2 u_{yy}$, $v(x,y) = xu(x,y)$,
б) $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$, $v(x,y) = (x-y)u(x,y)$.
7. Решити Кошијев проблем:
$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y + \frac{u}{4} = 0$,
$u|_{y=0} = x^2 e^{-\frac{x}{4}}$, $u_y|_{y=0} = 0$.
8. Решити следеће Гурсаове проблеме:
а) $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$, $|x| < y$,
$u|_{y=x} = 1$, $u|_{y=-x} = (1+x)e^x$,
б) $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$, $y^3 - 8 < 3x < y^3$, $0 < y < 2$,
$u|_{y=2} = 3x + 8$, $u|_{3x=y^2} = 2y^3$.

Мешовити проблем хомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

Проблем: У области $D = (0,l)\times(0,\infty)$ одредити нетривијално класично решење $u \in C^2(D)\cap C^1(\bar{D})$ хомогене таласне једначине

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x,t \in D$$

која задовољава хомогене граничне услове

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\ \ t > 0,$$

и почетне услове

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u'_t(x,0)=\varphi_1(x),\ x\in(0,l).$$

Посматрани проблем се решава Фуријеовом методом раздвајања променљивих:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t),\ x\in[0,l],\ t\geqslant 0,\\
X(x)T''(t) &= a^2X''(x)T(t),\\
\frac{T''(t)}{a^2T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\ \lambda=const,\ X(0)=X(l)=0.
\end{aligned}$$

што се своди на решавање регуларног Штурм-Лиувиловог проблема

$$\begin{aligned}
X''(x)+\lambda X(x)=0,\\
X(0)=X(l)=0,
\end{aligned}$$

и решавање ОДЈ

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

Интерпретација проблема: Жица дужине l слободно осцилује, $u(x,0)=\varphi_0(x)$ даје положај жице у тренутку $t=0$, а $u'_t(x,o)=\varphi_1(x)$ је почетна брзина осциловања жице. Жица је учвршћена на крајевима: $u(0,t)=u(l,t)=0$ за $t>0$.

Решимо разматрани Штурм-Лиуилов проблем:

$$\begin{aligned}
X''(x)+\lambda X(x) &= 0,\ X(0)=X(l)=0\\
X(x) &= C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,\ X(0)=X(l)=0,\\
C_2 &\neq 0,\sin\sqrt{\lambda}l=0,\\
\lambda_k &= (\frac{k\pi}{l})^2,\\
X_k(x) &= \sin\sqrt{\lambda_k}x=\sin\frac{k\pi x}{l}.
\end{aligned}$$

Решимо разматрану ОДЈ:

$$T''_k(t)+a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t)=0,$$

$$T_k(t)=C_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+D_k\sin\frac{ak\pi t}{l}.$$

Решење полазног проблема је облика $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$, $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, $k \geqslant 1$.

1. Одредити закон осциловања жице дужине l, учвршћене на крајевима, која је у пресецима удаљеним за $\frac{l}{3}$ од крајњих тачака изведена из равнотежног положаја за амплитуду x_0, тако да је средишњи део паралелан њеном равнотежном положају, па потом пуштена да осцилује без почетне брзине.

22 Варијациони рачун

1. Наћи екстремале функционала:
а) $J[y] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$,
б) $J[y] = \int\limits_{1}^{2} (y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$,
в) $J[y] = \int\limits_{0}^{1} yy'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$,
г) $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi} (4y\cos x + y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
а) Ојлер-Лагранжова једначина је облика $6x - y'' = 0$, $y = x^3 + Cx + D$, одакле се сменом у граничне услове добија систем $-1-C+D = 1$, $D = 0$, па је $y = x^3 - 2x$ екстремала посматраног функционала.
б) $-y'' - y' + 2y = 0$ има опште решење облика $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, па се сменом у граничне услове добија систем једначина $C_1e + C_2e^{-2} = 1$, $C_2e^2 + C_2e^{-4} = 0$, чије решење је $C_2 = \frac{e^2}{e^{-3}-1}$, $C_1 = 1 - C_2e^{-2}$.
в) $-y'^2 - 2yy'' = 0$ је ДЈ која се решава сменом $z = y'$: $-z^2 - 2yz'z = 0$, одакле је $z = 0$, $y = C$ или $z' + \frac{z}{2y} = 0$, $y \neq 0$, што је линеарна ДЈ првог реда $(\sqrt{y}z)' = 0$, $z = \frac{C}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = Cdx$, $y = (\frac{3}{2}Cx + \frac{3}{2}D)^{\frac{2}{3}}$. Из граничних услова се добијају екстремале, $y(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$, $y(x) = (-3x+1)^{\frac{2}{3}}$.
г) $y'' + y - 2\cos x = 0$ је ДЈ чији хомогени део решења је $C_1\cos x + C_2\sin x$, а партикуларни део решења је облика $y_p = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, односно након смене у ДЈ $y_p = b\cos x + (x+d)\sin x$. Дакле, опште решење је $y = (x+D_2)\sin x + D_1\cos x$, одакле се сменом у граничне услове налазе екстремале $y = (x+D_2)\sin x$.

2. Наћи екстремале функционала: а) $J[y(x), z(x)] = \int\limits_{1}^{2} (y'^2 + z^2 + z'^2)dx$ $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $z(1) = 0$, $z(2) = 1$,

б) $J[y(x),z(x)] = \int\limits_1^2 (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)dx$ $y(0)=0$, $y(\pi)=1$, $z(0)=0$, $z(\pi)=-1$.

а) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' = 0,$$

$$z - z'' = 0,$$

одакле је

$$y = C_1 x + C_2,$$
$$z = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = x,$$

$$z = \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}$$

. б) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' + 2y - z = 0,$$

$$z'' - y = 0,$$

одакле је елиминацијом z,

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = 0,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x),$$
$$z = y'' + y.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi}\cos x,$$

$$z = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x),$$

где је C_2 произвољна константа.

23 час, Лапласова трансформација, примене на диференцијалне једначине

24 час, Фуријеова трансформација и интеграл

1. Наћи Фуријеову трансформацију функције $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Функција задовољава Дирихлеове услове и апсолутно је интеграбилна на реалној правој ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| = 2\int_0^{\infty} e^{-ax} = \frac{2}{a}$). $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\lambda^2}$.

2. Представити у форми Фуријеовог интеграла функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Функција је дефинисана на реалној оси, део-по-део монотона, има две тачке прекида 1. реда и апсолутно је интеграбилна $\int\limits_{-\infty}^{infty} |f(x)|dx = \int\limits_{-1}^{1} |x|dx = x^2|_0^1 = 1$. Дакле, функција се може представити Фуријеовим интегралом. Функција је непарна, па је $a(\lambda) = 0$; $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t = \frac{2}{\pi\lambda^2}(\sin \lambda - \lambda \cos \lambda)$. У тачкама непрекидности (за $x \neq \pm 1$) је $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}(\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) \sin(\lambda x) d\lambda$, а у тачкама прекида $x = \pm 1$ је $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}(\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.