

# Увод у комутативну алгебру

## Задаци

1. Прстен  $A$  је Нетерин ако је сваки његов идеал коначно генерисан. Показати да ако је прстен  $A$  Нетерин, тада је и прстен полинома  $A[X]$  Нетерин (Хилбертова теорема о бази).
2. Нека је  $A$  прстен. Елемент  $x \in A$  је нилпотентан ако постоји  $n \geq 1$  такав да је  $x^n = 0$ . Скуп нилпотентних елемената прстена  $A$  називамо нилрадикал у ознаци  $N(A)$ .

- 1) Показати да је  $N(A) \triangleleft A$  идеал.
- 2) Показати да је

$$N(A) = \bigcap \{P \mid P \triangleleft A, P \text{ је прост идеал}\}.$$

3. Нека је  $A$  прстен. Пресек његових максималних идеала називамо Џејкобсонов радикал у ознаци  $J(A)$ .

- 1) Показати да је

$$J(A) = \{a \in A \mid (\forall x \in A)(1 - ax \in A^*)\}.$$

- 2) Показати да је збир нилпотентног и инвертибилног елемента инвертибилан елемент.

4. Нека је  $A$  прстен и  $f = a_n x^n + \dots + a_0$  полином над  $A$ .

- 1)  $f$  је делилац нуле ако и само ако постоји ненула елемент  $c \in A$  такав да је  $cf = 0$ .
- 2) Показати да је  $f$  инвертибилан ако и само ако је  $a_0$  инвертибилан и  $a_1, \dots, a_n$  су нилпотентни.
- 3) Показати да је  $f$  нилпотентан ако само ако су  $a_0, \dots, a_n$  нилпотентни.
- 4) Полином  $f = a_n x^n + \dots + a_0$  је примитиван ако је  $\langle a_0, \dots, a_n \rangle = R$ . Показати да је  $fg$  примитиван ако и само ако су  $f$  и  $g$  примитивни (Гаус).

5. Показати да за сваки прстен  $A$  важи једнакост  $N(A[X]) = J(A[X])$ .

6. Нека је  $A$  прстен. Показати да скуп простих идеала има минимални елемент, у односу на инклузију.

7. Нека је  $A$  прстен. За идеал  $I \triangleleft A$  дефинишемо његов радикал:

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid (\exists n \geq 1)(a^n \in I)\}.$$

- 1) Показати да је  $\sqrt{I} \triangleleft A$  идеал.
- 2) За идеал  $I$  прстена  $A$  кажемо да је радикалски ако важи  $I = \sqrt{I}$ . Показати да је идеал  $I$  радикалски ако и само ако је  $I$  пресек неке фамилије простих идеала.

8. Нека је  $A$  прстен. Показати да су наредна тврђења еквивалентна:

- 1) Прстен  $A$  има тачно један прост идеал.
- 2) Сваки елемент у  $A$  је или инвертибилан или нилпотентан.
- 3) Количнички прстен  $A/N(A)$  је поље.

9. Елемент  $e$  прстена  $A$  је идемпотентан уколико важи  $e^2 = e$ . Показати да су 0 и 1 једини идемпотентни елементи локалног прстена.

10. Нека је  $A$  прстен. Ако за сваки елемент  $x \in A$  постоји  $n(x) > 1$  такав да је  $x^{n(x)} = x$ , показати да је сваки прост идеал прстена  $A$  максималан.
11. Нека је  $A$  прстен и  $I$  његов идеал. Означимо мултипликативни скуп  $S = 1 + I$ . Показати да је  $S^{-1}I = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in I, s \in S \right\}$  садржан у Џејкобсоновом радикалу прстена  $S^{-1}A$ .
12. Нека је  $A$  прстен и  $x \in A$ . Показати да је  $x \in A$  нилпотентан ако и само ако за сваки прост идеал  $P$  прстена  $A$ , важи да је  $\frac{x}{1}$  нилпотентан елемент прстена  $A_P$ .
13. Нека је  $A$  прстен. Елемент  $x \in A$  је делитељ нуле ако постоји  $a \neq 0$  такав да је  $ax = 0$ . Скуп делитеља нуле прстена означавамо са  $D(A)$ .

- 1) Показати да за сваки минимални прост идеал  $P$  прстена  $A$  важи  $P \subseteq D(A)$ .
- 2) Прстен  $A$  је редукован ако важи  $N(A) = \{0\}$ . Показати да за редукован прстен важи једнакост:

$$D(A) = \bigcup \{P \mid P \text{ је минимални прост идеал прстена } A\}.$$

14. Нека је  $A$  прстен. Елемент  $x \in A$  је регуларан ако није делитељ нуле. Показати да је  $x \in A$  регуларан ако и само ако за сваки прост идеал  $P$  прстена  $A$ , важи да је  $\frac{x}{1}$  регуларан елемент прстена  $A_P$ .
15. Нека је  $X$  тополошки простор,  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{Q}$  праменови Абелових група на  $X$  и  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$  морфизам праменова. Показати да је  $f$  изоморфизам ако и само ако за све  $x \in X$  важи да је  $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{Q}_x$  изоморфизам.
16. Нека је  $X$  тополошки простор,  $x \in X$  тачка и  $i_x : \{x\} \rightarrow X$  инклузија. Нека је  $\mathcal{A}$  прамен скупова на  $\{x\}$  и  $A = \mathcal{A}(\{x\})$ . Директна слика

$$i_{x,*}A = (i_x)_*(A)$$

назива се облакодерски прамен у тачки  $x$ , са вредностима у  $A$ .

- 1) Показати да важи:

$$(i_{x,*}A)_y = \begin{cases} A, & \text{ако } y \in \overline{\{x\}} \\ \{*\}, & \text{ако } y \notin \overline{\{x\}} \end{cases}.$$

- 2) Ако је  $\mathcal{F}$  прамен скупова на  $X$ , показати да постоји природна бијекција између функција  $\text{Hom}_{\text{Set}}(\mathcal{F}_x, A)$  и морфизама  $\text{Hom}_{\text{Sh}}(\mathcal{F}, i_{x,*}A)$ .

17. Нека је  $k$  алгебарски затворено поље. Показати да  $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0, 0)\}$  није афини варијетет.

18. Испитати да ли је елемент  $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$  цео над прстеном  $\mathbb{Z}$ .

19. Нека је  $R = \mathbb{R}[X^2 - 1]$ ,  $R' = \mathbb{R}[X]$ ,  $P' = \langle X - 1 \rangle \triangleleft R$  и  $P = P' \cap R$ .

- 1) Показати да је раширење  $R \subseteq R'$  цело.
- 2) Показати да раширење  $R_P \subseteq R'_P$  није цело.

20. Нека је  $R$  домен. Показати да је  $R$  нормалан ако и само ако је  $R_P$  нормалан за све максималне идеале  $P$  прстена  $R$ .

21. Испитати да ли су наредна раширења цела над  $R = \mathbb{C}[X]$ .

- 1)  $R' = \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle Z^2 - XY \rangle$ .
- 2)  $R' = \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle Z^2 - XY, Y^3 - X^2 \rangle$ .
- 3)  $R' = \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle Z^2 - XY, X^3 - YZ \rangle$ .

22. Нека је  $k$  поље и  $f \in k[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$  ненула полином. Показати да постоји  $\lambda \in k$  и бројеви  $a_1, \dots, a_n \geq 1$  такви да је полином  $\lambda f(Y_1 + Y_n^{a_1}, \dots, Y_{n-1} + Y_n^{a_{n-1}}, Y_n)$  моничан по  $Y_n$ .

- 23.** Одредити Нетерину нормализацију  $\mathbb{C}$ -алгебре  $A = \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle XY + Z^2, X^2Y - XY^3 + Z^4 - 1 \rangle$ .
- 24.** Одредити минимални примарни растав следећих идеала.
- 1)  $I = \langle x^2 \rangle \triangleleft R = \mathbb{R}[X, Y] / \langle X^2 + Y^2 - 1 \rangle$ , где је  $x = \bar{X}$  класа неодређене  $X$ .
  - 2)  $I = \langle 42 \rangle \triangleleft R = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ .
  - 3)  $I = \langle X, Y \rangle \cdot \langle Y, Z \rangle \triangleleft R = \mathbb{R}[X, Y, Z]$ .
- 25.** Нека је  $M$  модул над прстеном  $R$  и  $f : M \rightarrow M$  хомоморфизам модула.
- 1) Ако је  $M$  Нетерин модул и  $f$  епиморфизам, показати да је  $f$  изоморфизам.
  - 2) Ако је  $M$  Артинов модул и  $f$  мономорфизам, показати да је  $f$  изоморфизам.
- 26.** Нека је  $R$  Нетерин прстен.
- 1) Ако је  $R$  домен, показати да се сваки елемент из  $R \setminus (U(R) \cup \{0\})$  може представити као производ нерастављивих елемената.
  - 2) Ако је  $I \triangleleft R$  идеал, показати да постоји  $n \geq 1$  такав да важи  $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ .
- 27.** Нека је  $R$  прстен и  $S \subseteq R$  мултипликативни скуп.
- 1) Ако је  $R$  Нетерин прстен, показати да је и  $S^{-1}R$  Нетерин прстен.
  - 2) Ако је  $R$  Артинов прстен, показати да је и  $S^{-1}R$  Артинов прстен.
- 28.** Нека је  $R$  прстен и  $M$  модул над  $R$ .
- 1) Ако је  $R$  Нетерин прстен, тада је и  $R/\text{Ann}(M)$  Нетерин прстен.
  - 2) Ако је  $M$  коначно генерисан Артинов модул, тада је  $M$  Нетерин модул.
- 29.** Одредити димензију и све максималне идеале прстена  $R = \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle X^2 - Y^2, Z^2X - Z^2Y \rangle$ .
- 30.** Показати да је  $\dim(\mathbb{Z}[X]) = 2$ .
- 31.** Нека су  $\mathbb{R}[Y] \subset \mathbb{R}[X, Y] / \langle X^2 - Y \rangle$  и  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X] / \langle X^2 - 3 \rangle$  раширења прстенова  $R \subset R'$ .
- 1) Одредити ненула прост идеал  $\mathfrak{p} \triangleleft R$  са јединственим простим идеалом  $\mathfrak{p}' \triangleleft R'$  таквим да важи  $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}'$  и  $R/\mathfrak{p} \cong R'/\mathfrak{p}'$ .
  - 2) Одредити ненула прост идеал  $\mathfrak{p} \triangleleft R$  са јединственим простим идеалом  $\mathfrak{p}' \triangleleft R'$  таквим да важи  $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}'$  и  $R/\mathfrak{p} \not\cong R'/\mathfrak{p}'$ .
  - 3) Одредити ненула прост идеал  $\mathfrak{p} \triangleleft R$  за који постоји више од једног простог идеала  $\mathfrak{p}' \triangleleft R'$  за који важи  $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}'$ .
- 32.** Нека је  $V$  валуациони домен који није поље. Показати да је  $V$  Нетерин ако и само ако је домен са дискретном валуацијом.
- 33.** Нека је  $(V, \mathfrak{m})$  локални домен који није поље, у коме је идеал  $\mathfrak{m}$  главни и важи  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \{0\}$ . Показати да је  $V$  домен са дискретном валуацијом.
- 34.** Показати да су  $I = \langle 2, 3 + \sqrt{-61} \rangle$  и  $J = \langle 5, 3 + \sqrt{-61} \rangle$  инвертибилни идеали у  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-61}]$  и одредити ред њихових класа у  $\text{Pic}(R)$ .
- 35.** Нека је  $I = \langle 2, 1 + \sqrt{-19} \rangle$  идеал прстена  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ .
- 1) Показати да је  $I$  максимални идеал.
  - 2) Показати да важи  $I^2 = 2I$ .
  - 3) Показати да  $\langle 2 \rangle$  није производ простих идеала у прстену  $R$ .