

Одабрана поглавља алгебре

Задаци

1. Нека је R прстен.

- 1) За R кажемо да је тело уколико сваки елемент $x \in R \setminus \{0\}$ има мултипликативни инверз. Показати да ако сваки елемент $a \in R \setminus \{0\}$ има десни инверз, тада је R тело.
- 2) За R кажемо да је домен ако једнакост $ab = 0$ имплицира $a = 0$ или $b = 0$. Показати да је домен R који садржи минимални (ненула) десни идеал I једно тело.
- 3) Показати да ако је $a \in R$ лево инвертибилан и није десни делитељ нуле, тада је a инвертибилан.
- 4) Уколико за $a \in R$ и неко $n \geq 2$ важи да је a^n инвертибилан, тада је и a инвертибилан.
- 5) Ако је за $a \in R$ и $b \in R$ елемент $1 - ab$ десно инвертибилан, тада је и $1 - ba$ десно инвертибилан (*Каплански*).

2. Алгебра кватерниона јесте

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

са стандардним сабирањем по координатама и множењем одређеним релацијама

$$i^2 = j^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

- 1) Показати да је \mathbb{H} једно тело.
- 2) Показати да је

$$R_1 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

једно тело чије елементе називамо рационални кватерниони.

- 3) Означимо потпрстен од R_1 Липшицових кватерниона:

$$R_2 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

Показати да је његова група јединица

$$U(R_2) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

коју називамо кватернионска група и означавамо је са Q .

- 4) Означимо прстен Хурвицових кватерниона са

$$R_3 = \left\{ \frac{a + bi + cj + dk}{2} \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ су исте парности} \right\}.$$

Показати да је његова група јединица

$$U(R_3) = \left\{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2} \right\}.$$

- 5) Показати да важи изоморфизам $U(R_3) / \{\pm 1\} \cong \mathbb{A}_4$ (*Дираков трик*).

3. Нека је R прстен. Ако важи $ab = 1$ и $ba \neq 1$, показати да елемент a има бесконачно много десних инверза (*трик Капланског*).

4. Нека је R потенцијално неуниталан прстен са бар два елемента, у коме за сваки ненула елемент $a \in R$ постоји јединствени $b \in R$ такав да је $aba = a$.
- 1) Показати да је прстен R домен.
 - 2) Показати да важи $bab = b$.
 - 3) Показати да прстен R има јединицу.
 - 4) Показати да је прстен R тело.
5. 1) Навести пример прстена R и елемента $x \in R$ таквог да важи $Rx \subsetneq xR$.
- 2) Нека је R прстен и $x, y \in R$ елементи такви да важи $Rx = Ry$. Показати да тада постоји изоморфизам десних R -модула $f : xR \rightarrow yR$ такав да је $f(x) = y$.
6. 1) Испитати да ли постоји домен са 10 елемената.
- 2) Нека је p прост број. Показати да је сваки прстен са јединицом са p^2 елемената комутативан.
- 3) Нека је p прост број. Конструисати неунитални прстен са p^2 елемената.
- 4) Нека је p прост број. Конструисати пример некомутативног прстена са p^3 елемената.
7. Нека је R комутативан прстен са јединицом и нека су f и g полиноми из $A = R[X]$ такви да је $fg = 0$. Ако је g различито од нуле, доказати да постоји ненула $c \in R$ такав да је $cf = 0$.
8. Нека је R неунитални прстен. На скупу $\bar{R} = R \times \mathbb{Z}$ дефинишемо сабирање

$$(r_1, n_1) + (r_2, n_2) = (r_1 + r_2, n_1 + n_2)$$

и множење

$$(r_1, n_1) \times (r_2, n_2) = (r_1 r_2 + n_2 r_1 + n_1 r_2, n_1 n_2).$$

- 1) Показати да је са овако уведеним операцијама \bar{R} унитални прстен.
 - 2) Уколико је S унитални прстен, показати да постоји природна бијекције $\Phi_{R,S}$ између скупа хомоморфизама прстенова са јединицом $\text{Hom}(\bar{R}, S)$ и скупа хомоморфизама прстенова $\text{Hom}(R, S)$.
9. Нека је R прстен са јединицом, $n \geq 2$ и $S = M_n(R)$. Означимо типичан елемент из S са $A = (a_{ij})$.
- 1) Ако је $1 \leq k \leq n$, показати да је скуп свих $A \in S$ таквих да је $a_{ij} = 0$ за $i \neq k$ десни идеал прстена S .
 - 2) Ако је $1 \leq k \leq n$, показати да је скуп свих $A \in S$ таквих да је $a_{ij} = 0$ за $j \neq k$ леви идеал прстена S .
10. Дати пример прстена R , модула M и N над њим и елемента $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ који није R -модулски хомоморфизам.
11. Нека је R прстен. Посматрамо комутативан дијаграм модула и R -хомоморфизама

$$\begin{array}{ccccccccc} M_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 \\ \phi_0 \downarrow & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 \\ N_0 & \xrightarrow{\beta_0} & N_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N_3 & \xrightarrow{\beta_3} & N_4 \end{array}$$

при чему су врсте тачни низови.

- 1) Показати да ако су $\phi_0, \phi_1, \phi_3, \phi_4$ изоморфизми, тада је и ϕ_2 изоморфизам (*Стинродова пет лема*).
- 2) Испитати да ли се услови могу ослабити.

12. Нека је R прстен. Посматрамо комутативан дијаграм модула и R -хомоморфизама

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

при чему су врсте тачни низови.

- 1) Показати да је при задатим ϕ_1 и ϕ_3 хомоморфизам ϕ_2 одређен до на хомоморфизам $M_3 \rightarrow N_3$.
- 2) Уколико су задати хомоморфизми ϕ_1 и ϕ_3 , испитати да ли увек постоји ϕ_2 такав да дијаграм комутира.

13. Нека је $\omega : R \rightarrow S$ хомоморфизам прстенова.

- 1) Нека је M један S -модул. Спољашњим множењем $r \cdot m = \omega(r)m$ за $r \in R$ и $m \in M$, он природно постаје један R -модул који ћемо означити са M^ω . Показати да додела $M \mapsto M^\omega$ дефинише функтор $U^\omega : {}_S \mathfrak{M} \rightarrow {}_R \mathfrak{M}$.
- 2) Посматрамо функтор $F^\omega : {}_R \mathfrak{M} \rightarrow {}_S \mathfrak{M}$ дефинисан са $F^\omega(M) = \text{Hom}_R(S^\omega, M)$. Ако је M леви R -модул и N леви S -модул, показати да постоји природна бијекција

$$\Phi_{M,N} : \text{Hom}_R(N^\omega, M) \rightarrow \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S^\omega, M)).$$

14. 1) Показати да је $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ (*Koши*).

2) Показати да је $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

15. Нека је R прстен.

- 1) Ако су A и $\{B_i \mid i \in I\}$ леви модули над R , показати да постоји природни хомоморфизам

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(A, B_i) \rightarrow \text{Hom}_R\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right)$$

и испитати да ли је изоморфизам.

- 2) Ако су B и $\{A_i \mid i \in I\}$ леви модули над R , показати да постоји природни хомоморфизам

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(A_i, B) \rightarrow \text{Hom}_R\left(\prod_{i \in I} A_i, B\right)$$

и испитати да ли је изоморфизам.

16. У овом примеру је базни прстен \mathbb{Z} и сви модули и хомоморфизми су над њим.

1) Нека је A Абелова група. Одредити $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, A)$ за све $n \geq 2$.

2) Нека је p прост број. Одредити прстен $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$.

17. Нека је R прстен. Показати да ако је низ

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A'', B) \xrightarrow{\epsilon^*} \text{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}_R(A', B)$$

тачан за све R -модуле B , тада је тачан низ

$$A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\epsilon} A'' \longrightarrow 0.$$

18. За прстен R дефинишемо његов центар као

$$Z(R) = \{r \in R \mid (\forall z \in R)(rz = zr)\}.$$

- 1) Показати да је центар прстена његов комутативни потпрстен и испитати да ли је идеал.
- 2) Показати да је за леве модуле M и N над прстеном R , скуп хомоморфизама $\text{Hom}_R(M, N)$ природно један модул над $Z(R)$.
- 19.** Нека је R прстен.
- 1) Одредити центар матричног прстена $M_n(R)$ за све $n \geq 1$.
- 2) Нека је G коначна група. Одредити центар групног прстена $R[G]$.
- 20.** Нека су I и J идеали комутативног прстена са јединицом R . Показати да важи изоморфизам модула $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J)$.
- 21.** Нека је R комутативан прстен са јединицом, I његов идеал и M један R -модул. Дефинишемо подмодул
- $$IM = \{i_1 m_1 + \dots + i_r m_r \mid i_1, \dots, i_r \in I \text{ и } m_1, \dots, m_r \in M\}.$$
- Показати да важи изоморфизам $M/IM \cong M \otimes_R R/I$.
- 22.** Нека је $\{e, f\}$ једна база векторског простора $V = \mathbb{R}^2$. Показати да се $e \otimes f + f \otimes e \in V \otimes_{\mathbb{R}} V$ не може написати у облику $v \otimes w$ за $v, w \in V$.
- 23.** Нека је $I = \langle 2, X \rangle$ идеал прстена $R = \mathbb{Z}[X]$.
- 1) Показати да се тензор $2 \otimes X + X \otimes 2 \in I \otimes_R I$ не може написати у облику $a \otimes b$ за $a, b \in I$.
- 2) Показати да је $t = 2 \otimes X - X \otimes 2 \in I \otimes_R I$ ненула елемент.
- 3) Показати да је $2t = 0$ и $X \cdot t = 0$.
- 4) Показати да је $\langle t \rangle \cong R/I$.
- 24.** Нека је R прстен. Показати да функтор $M \otimes_R$ у општем случају није тачан.
- 25.** Нека је за све $i \in \mathbb{N}$ модул $M_i \cong \mathbb{Z}$ слободан \mathbb{Z} -модул са једним генератором и $M = \prod_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Означимо и његов подмодул $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Показати да M није слободан \mathbb{Z} -модул на следећи начин. Претпоставимо да M јесте слободан \mathbb{Z} -модул, са базом \mathcal{B} . Кроз наредне кораке извести контрадикцију.
- 1) Доказати да је N пребројив.
- 2) Доказати да постоји пребројив подскуп \mathcal{B}_1 од \mathcal{B} такав да је N садржан у подмодулу N_1 генерисаним скупом \mathcal{B}_1 . Доказати да је и N_1 пребројив.
- 3) Нека је $\bar{M} = M/N_1$. Показати да је \bar{M} слободан \mathbb{Z} -модул. Закључити да ако је $\bar{x} \in \bar{M}$ ненула елемент, постоји коначно много различитих позитивних целих бројева k таквих да је $\bar{x} = k\bar{m}$ за неки $m \in M$.
- 4) Нека је $S = \{m \in M \mid m_i = \pm i!, \text{ за све } i\}$. Доказати да је S непребројив скуп. Закључити да постоји $s \in S$ такав да је $s \notin N_1$.
- 5) Показати да за сваки позитиван цео број k постоји $m \in M$ такав да је $\bar{s} = k\bar{m}$.
- 26.** Показати да је $\{0\}$ једина Абелова група која је уједно пројективна и инјективна.
- 27.** Нека је R прстен. Показати да је леви R -модул M инјективан ако и само ако важи да се за сваки леви идеал J , сваки хомоморфизам $f : J \rightarrow M$ проширује на R (*Беров критеријум*).
- 28.** Нека је R прстен. За леви R -модул M дефинишемо дуални модул $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ који има природну структуру десног R -модула.
- 1) Показати да је $M = \{0\}$ ако и само ако важи $M^* = \{0\}$.

2) Показати да је

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

тачан низ R -модула ако и само ако је

$$L^* \xrightarrow{g^*} N^* \xrightarrow{f^*} M^*$$

тачан низ.

29. Нека је R прстен и P пројективан R -модул. Показати да постоји слободан R -модул F такав да важи $P \oplus F \cong F$ (*Ајленбергов трик*).

30. Нека је R прстен и нека су

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

и

$$0 \longrightarrow S' \longrightarrow P' \xrightarrow{f'} M \longrightarrow 0$$

кратки тачни низови модула, при чему су P и P' пројективни модули над R . Показати да тада важи изоморфизам $S \oplus P' \cong S' \oplus P$ (*Шанцелова лема*).

31. Нека је R прстен. Показати да је директна сума инјективних R -модула инјективан R -модул ако и само ако је прстен R Нетерин (*Бас-Пан*).

32. Нека је $f : R \rightarrow S$ хомоморфизам прстенова. Ако је S Нетерин R -модул, показати да је сваки Нетерин S -модул уједно и Нетерин R -модул.

33. Нека је R прстен. За R -модул M кажемо да је *Артинов* ако за сваки низ $\{M_n \mid n \geq 1\}$ подмодула од M такав да је $M_{n+1} \subseteq M_n$ за све $n \geq 1$, важи да постоји $N \geq 1$ такав да је $M_N = M_{N+n}$ за све $n \geq 1$.

(1) Показати да је M Артинов модул ако и само ако свака непразна фамилија његових подмодула има минимални елемент, у односу на инклузију.

(2) Ако је

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

кратак тачан низ R -модула, показати да је M Артинов модул ако и само ако су M' и M'' Артинови модули.

34. Нека је R прстен. *Џејкобсонов радикал* прстена R у ознаци $J(R)$ је пресек свих његових максималних левих идеала.

1) Показати да важи:

$$J(R) = \{t \in R \mid (\forall r \in R) (1 - rt \text{ има леви инверз})\}.$$

2) Показати да је $J(R)$ десни идеал прстена R .

3) Ако је R лево Артинов прстен, показати да је његов Џејкобсонов радикал нилпотентан.

4) Ако је R лево Артинов прстен, показати да је његов Џејкобсонов радикал пресек коначно много максималних левих идеала.

3) Показати да комутативан Артинов прстен има коначно много максималних идеала.

35. Посматрајмо прстен

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ и } r \in \mathbb{Q} \right\}.$$

1) Показати да прстен R јесте и лево Нетерин и лево Артинов.

2) Показати да прстен R није ни десно Нетерин ни десно Артинов.

36. Неке је R прстен, M модул над R и $f : M \rightarrow M$ хомоморфизам модула.
- 1) Ако је M Нетерин модул и f епиморфизам, показати да је f изоморфизам.
 - 2) Ако је M Артинов модул и f мономорфизам, показати да је f изоморфизам.
37. Показати да се сваки модул над доменом D може уложити у дељив модул.
38. Нека је $A = \prod_p \mathbb{Z}_p$ Абелова група, где је производ задат по свим простим бројевима.
- 1) Показати да је $\bigoplus_p \mathbb{Z}_p$ торзиона подгрупа групе A .
 - 2) Показати да торзиона подгрупа групе A није њен директан сабирак.
39. Нека је D главни домен, M слободан D -модул ранга $n \geq 1$ и N ненула подмодул од M . Показати да постоји D -база $\{y_1, \dots, y_n\}$ модула M , број $m \leq n$ и ненула елементи $a_1, \dots, a_m \in D$ такви да важи:
- 1) Скуп $\{a_1 y_1, \dots, a_m y_m\}$ је D -база модула N .
 - 2) За све $i = 1, \dots, m - 1$ важи $a_i \mid a_{i+1}$.
40. Нека је k алгебарски затворено поље и нека је V један k -простор коначне димензије n . Ако је $L : V \rightarrow V$ једно k -линеарно пресликавање, доказати да постоји k -база e простора V таква да је матрица $[L]_e$ Жорданова.
41. Нека је R прстен и M модул над R . Показати да су следећа тврђења еквивалентна:
- 1) M је генератор.
 - 2) R је директан сабирак директне суме коначно много модула M .
 - 3) Ако је $f : A \rightarrow B$ ненула хомоморфизам, постоји хомоморфизам $g : M \rightarrow A$ такав да је $f \circ g \neq 0$.
 - 4) Ако је $f_* : \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B)$ изоморфизам, тада је и f изоморфизам.
 - 5) Ако је $f_* : \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B)$ епиморфизам, тада је и f епиморфизам.
42. Нека је R прстен и M модул над R који је генератор. Показати да је произвољан R -модул A изоморфан количнику директне суме копија модула M .
43. Нека је R прстен и M модул над R . Означимо $S = \text{End}_R(M)$ и $C = \text{End}_S(M)$.
- 1) Показати да је $S = \text{End}_C(M)$.
 - 2) Показати да је сваки коначно генерисан пројективан R -модул један S -генератор.
 - 3) Показати да је сваки R -генератор коначно генерисан S -модул.
44. Нека је $f : R \rightarrow S$ хомоморфизам прстенова. Показати да ако је M један R -генератор, тада је $N = M \otimes_R S$ један S -генератор.
45. Нека је R комутативан прстен и M коначно генерисан модул над R . Анулатор модула M је идеал прстена R :
- $$\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rM = \{0\}\}$$
- Показати да за идеал I прстена R важи да је $IM = M$ ако и само ако је $R = \text{Ann}_R(M) + I$.
46. Нека је R прстен и M модул над R .
- 1) Показати да ако је M коначно генерисан пројективан R -модул, важи $\text{Tr}(M)M = M$.
 - 2) Ако је прстен R комутативан, показати да је коначно генерисан пројективан R -модул M генератор ако и само ако има тривијалан анулатор.
47. Нека је R прстен, M коначно генерисан R -модул и $I \subset J(R)$ идеал. Ако је $IM = M$ показати да је $M = 0$ (*Накајамина лема*).
48. Нека је R прстен.

- 1) Показати да су до на изоморфизам прости R -модули тачно количници облика R/\mathfrak{m} , где је \mathfrak{m} максимални леви идеал.
 - 2) Показати да је полупрост леви R -модул M Нетерин ако и само ако је Артинов.
- 49.** Нека је R лево Артинов прстен.
- 1) Показати да је количнички прстен $R/J(R)$ полупрост прстен.
 - 2) Показати да је R лево Нетерин прстен (*Хопкинс*).
- 50.** Нека је R прстен и G група. Показати да је групни прстен $R[G]$ полупрост ако и само важи да је R полупрост прстен и G је коначна група чији је ред $N = |G|$ инвертибилан у R .