Далибор Даниловић
1014/2021

Основни појмови алгебарске K-теорије кроз мање познате примере

Ментор : проф. др Зоран Петровић

Универзитет у Београду
Математички факултет

Садржај

Предговор

Циљ овог рада је да се представе основни појмови алгебарске K-теорије, са акцентом на пуно примера који се не срећу превише често у стандардној литератури. Организован је у четири главе.

Глава 1 је уводног карактера и у њој се дефинише најважнија класа модула коју проучава алгебарска K-теорија, а то су пројективни модули. Наведена је њихова карактеризација и велики број примера какви су пројективни модули над одређеним класама прстена. Показана је лема 1.2 која је у раду пуно пута искоришћена као први корак у опису пројективних модула. У примеру 1.4 описани су пројективни модули над важним примером прстена који није комутативан. У примеру 1.5 описана је Свонова коресподенција по којој је тополошка K-теорија, која је за многе ауторе синоним за K-теорију, специјалан случај алгебарске K-теорије. Пројективни модули над локалним прстенима су од посебног значаја и они су описани у теореми 1.4. У наставку су истакнути радикалски идеали, а међу њима посебно важни и нилпотентни идеали (дефиниција 1.6) у односу на чију редукцију се пројективни модули природно понашају. Један од кључних делова ове главе јесте дефинисање ранга пројективног модула и доказивање његових својстава кроз теореме 1.10, 1.11, 1.12.

У глави 2 прстену је придружена важна инваријанта, Пикарова група. Важан алат за њено израчунавање јесте теорема 2.2 која Милноровом квадрату додељује тачан низ који повезује групу јединица са Пикаровом групом прстена из квадрата. Гранични хомоморфизам тог низа базиран је на Милноровом ушивању, и у примеру 2.4 је показано да је сваки модул добијен као резултат ушивања, у случају Милноровог квадрата. Посебно је истакнута лема 2.1 помоћу које је у примеру 2.5 детаљно израчуната Пикарова група прстена који није Дедекиндов домен. Потом је показано да се у случају Дедекиндових домена, Пикарова група природно поклапа са класном групом идеала (теорема 2.6). За крај ове главе уведено је извесно уопштење Дедекиндових домена, Крулови домени и скицирана је теорема 2.13 коју је показао Клаборн, по којој се свака Абелова група G реализује као класна група идеала неког Дедекиндовог домена.

У глави 3 је детаљно описан Гротендиков функтор који Абеловом моноиду M на универзалан начин додељује Абелову групу $\mathcal{G}(M)$ коју називамо Гротендикова група. Показана су својства те групе, њена продуктибилност у теореми 3.7 и да она има природну структуру прстена уколико је M Абелов полупрстен. У примеру 3.4 Гротендиков функтор се примењује на коначну групу G којој се додељује Бернсајдов прстен који је базиран на коначним скуповима на који група G дејствује, чија су основна својства наведена у теореми 3.8.

Глава 4 је централни део рада, и у њој се дефинише важна инваријанта а то је Гротендикова група прстена. Показани су њена функторијалност (теорема 4.1) као и својство продуктибилности (теорема 4.3) помоћу које је одређена Гротендикова група Артиновог прстена у примеру 4.5. Артинов прстен је коначан производ локалних прстена, а у примеру 4.4 је одређена Гротендикова група локалног прстена. У случају групне алгебре коначне групе, пример 4.7 указује да се она своди на проучавање репрезентација те групе, над алгебарски затвореним пољем. За коначан Булов прстен у примеру 4.6 дато је експлицитно одређивање елемената његове Гротендикове групе. Показано је затим (теорема 4.4) да је у случају Нетериног прстена могућа редукција на прстене који немају нетривијалних нилпотентних елемената. Уведени су по компонентама слободни модули, и помоћу њих је у теореми 4.7 одређена Гротендикова група фон Нојман регуларних прстена. То је потом искоришћено у примеру 4.10 да се покаже да Гротендиков функтор у општем случају не комутира са бесконачним производима. Даље је уведен трансфер, хомоморфизам који има интересантна својства, од којих је посебно истакнуто да задовољава формулу пројекције (теорема 4.8). Такође, у примеру 4.14 показано је како у специјалном случају можемо помоћу трансфера приступити елиминацији торзије Гротендикове групе. На крају је дата веза Гротендикове и Пикарове групе. У леми 4.3 показано је да је Пикарова група заправо подгрупа Гротендикове, а да се Гротендикова група Дедекиндовог домена своди на израчунавање његове Пикарове групе доказано је у теореми 4.11. Као врло нетривијалан резултат, теорема 4.12 даје да се свака Абелова група реализује као нетривијална компонента Гротендикове групе неког прстена који се заправо може одабрати да буде Дедекиндов домен.

Изјаве захвалности

Велику захвалност дугујем свом ментору, професору Зорану Петровићу, на подршци при избору теме, знању и стрпљењу које је уложио током стварања овог рада. Захвалност дугујем и осталим члановима комисије чије су сугестије допринеле бољем изгледу рада. Хвала колегама са којима сам у неформалним дискусијама у зборници схватио неке важне ставке изложене у овом раду. Велико хвала мојој породици и пријатељима, који су увек веровали у мене.

Глава 1

Пројективни модули

У овом раду, под појмом прстен подразумеваћемо комутативни прстен са јединицом, а модули које ћемо посматрати биће леви модули. Циљ ове главе јесте да уведемо пројективне модуле, наведемо неке важне примере и својства која ћемо користити касније.

1.1 Пројективни модули

Почињемо следећом дефиницијом. Фиксирамо прстен R. Док не нагласимо другачије, под модулом ћемо подразумевати леви R-модул. Хомоморфизми модула ће бити R-линеарна пресликавања. Са Id_P ћемо означавати идентичан хомоморфизам модула P.

Дефиниција 1.1. Модул P је *пројективан* уколико постоји модул Q такав да је $P \oplus Q$ слободан модул.

На основу дефиниције, слободни модули су пројективни. Наредна теорема даје карактеризацију пројективних модула (видети [9], [14]).

Теорема 1.1. *За R-модул P, следећи услови су еквивалентни.*

1) Модул P је пројективан.

2) За епиморфизам $f : M \to P$ постоји хомоморфизам $s : P \to M$ такав да је $f \circ s = \mathrm{Id}_P$.

3) За хомоморфизам $\phi : P \to N$ и епиморфизам $f : M \to N$ постоји хомоморфизам $\hat{\phi} : P \to M$ такав да је $f \circ \hat{\phi} = \phi$.

Доказ. Придружимо најпре одговарајући дијаграм који одговара својству 3:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\hat{\phi}"'] \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

За хомоморфизам $\hat{\phi}$ кажемо да је *решење* овог дијаграма уколико дијаграм комутира.

[3) $\Rightarrow$ 2)] Поставимо $P = N$, $\phi = \mathrm{Id}_P$ одакле је јасно из горњег дијаграма да је његово решење тражени хомоморфизам s.

[2) $\Rightarrow$ 1)] За модул P, постоји слободан модул F и епиморфизам $f : F \to P$ који можемо добити тако што за F узмемо слободан модул над скупом P и f узмемо тако да слика генератор $[p]$ у p, за $p \in P$. Тада имамо природан кратки тачан низ:

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow F \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0.$$

Када на епиморфизам f применимо својство 2), добијемо хомоморфизам $s : P \to F$ такав да је $f \circ s = \mathrm{Id}_P$. Посматрамо сада хомоморфизам

$$\phi : P \oplus \ker(f) \to F$$

дефинисан са $\phi(p, q) = s(p) + q$ и покажимо да је изоморфизам. Покажимо прво да је injeк-тиван. Нека је $\phi(p, q) = 0$ односно $s(p) + q = 0$. Када применимо f добијамо

$$f(s(p)) + f(q) = p + 0 = 0$$

одакле је $p = 0$ а самим тим и $q = 0$. Покажимо још да је сурјективан, па сходно томе уочимо $x \in F$. Ако означимо $p = f(x)$ и $q = x - s(p)$, тада имамо да је $s(p) + q = x$ и

$$f(q) = f(x - s(p)) = f(x) - f(s(p)) = f(x) - p = f(x) - f(x) = 0$$

односно $q \in \ker(f)$. Дакле, модул P је пројективан.

[1) $\Rightarrow$ 3)] Нека је модул P пројективан и нека је Q модул такав да је $P \oplus Q \cong F$ где је модул F слободан. Посматрамо дијаграм:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & O. \end{tikzcd}$$

чије решење тражимо. Посматрамо сада дијаграм

$$\begin{tikzcd} & P \oplus Q \arrow[d, "\pi_P"] & \\ & P \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & O. \end{tikzcd}$$

Означимо композицију $G = \phi \circ \pi_P$. Из универзалног својства слободног модула, дијаграм има решење. Заиста, уочимо базни елемент a слободног модула $P \oplus Q \cong F$. Пресликамо га у елемент $b = G(a) \in N$. Пошто је f епиморфизам, то постоји елемент $c \in M$ такав да је $G(c) = b$. Продужавањем до јединственог хомоморфизма $\hat{G}$ који проширује додељивање базних елемената $a \mapsto c$, добијамо решење дијаграма:

$$\begin{tikzcd} & P \oplus Q \arrow[d, "\pi_P"] \arrow[ddl, "\hat{G}"'] & \\ & P \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Коначно, посматрамо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "i_P"] & \\
& P \oplus Q \arrow[d, "\pi_P"] \arrow[ddl, "\hat{G}"'] & \\
& P \arrow[d, "\phi"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

где је $i_P\left(p\right) = \left(p, 0\right)$ и дефинишимо $\hat{\phi} = \hat{G} \circ i_P$. Покажимо да тада комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, "\hat{\phi}"'] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Заиста, за $p \in P$ важи да је

$$\begin{aligned}
\left(f \circ \hat{\phi}\right)\left(p\right) &= f\left(\hat{\phi}\left(p\right)\right) \\
&= f\left(\hat{G}\left(i_P\left(p\right)\right)\right) \\
&= f\left(\hat{G}\left(p, 0\right)\right) \\
&= \phi\left(\pi_P\left(p, 0\right)\right) \\
&= \phi\left(p\right).
\end{aligned}$$

То комплетира доказ. □

Својство 3) у претходној теореми је универзално својство које карактерише пројективне модуле. У терминима хомолошке алгебре, модул је пројективан ако и само ако је функтор $\mathrm{Hom}\left(P, -\right)$ тачан. Наиме, знамо да је он лево тачан, па је његова тачност еквивалентна својству 3). За улогу пројективних модула у хомолошкој алгебри видети [13].

За нас ће најважнији бити коначно генерисани пројективни модули. Пратећи доказ претходне теореме, можемо закључити следеће. Ако је модул P коначно генерисан са n елемената и пројективан, то избором слободног модула F над скупом од n елемената и посматрањем природног епиморфизма $R^n \overset{\pi}{\to} P$, за модул $Q = ker\left(\pi\right)$ важи $P \oplus Q \cong R^n$. И обрнуто, ако модул P испуњава да постоји модул Q такав да је $P \oplus Q \cong R^n$, тада је модул P пројективан и коначно генерисан јер је епиморфна слика природне пројекције $P \oplus Q \overset{\pi}{\to} P$ а R^n је коначно генерисан. Такође, ово све важи и за модул Q.

Лема 1.1. *Важе следећа тврђења:*

1) *Уколико су $P, \bar{P}$ изоморфни модули, тада је P пројективан ако и само ако је $\bar{P}$ пројективан.*

2) *Директна сума пројективних модула је пројективан модул. Додатно, директна сума коначно много коначно генерисаних пројективних модула је коначно генерисан пројективан модул.*

3) Тензорски производ коначно много коначно генерисаних пројективних модула је коначно генерисан пројективан модул.

Доказ. Прво, нека је $f : P \to \bar{P}$ изоморфизам модула и нека је модул P пројективан. По дефиницији, тада постоји модул Q такав да је $P \oplus Q$ слободан модул. Када на изоморфизам f применимо директну суму са Id_Q што је такође изоморфизам, добијамо да је $f \oplus \mathrm{Id}_Q : P \oplus Q \to \bar{P} \oplus Q$ изоморфизам одакле је $\bar{P} \oplus Q$ слободан модул, односно $\bar{P}$ је пројективан модул. Нека је сада дата фамилија $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пројективних модула. За $\lambda \in \Lambda$, постоји модул Q_λ такав да је $P_\lambda \oplus Q_\lambda$ слободан модул. Када применимо директну суму, пошто је директна сума слободних модула слободан модул, то је $(\oplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda) \oplus (\oplus_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda)$ слободан модул. Други део тврђења под 2) следи из чињенице да је директна сума коначно много коначно генерисаних слободних модула коначно генерисан слободан модул. Тврђење под 3) је довољно показати за два модула, јер општи случај једноставно следи индукцијом по броју модула. Нека су стога P, M коначно генерисани пројективни модули. Тада постоје модули Q, N и $m, n \geqslant 1$ такви да важи $P \oplus Q \cong R^m$, $M \oplus N \cong R^n$. Сада посматрамо тензорски производ ова два слободна модула, па применом својстава тензорског производа ([5]) добијамо следеће изоморфизме:

$$R^{mn} \cong R^m \otimes R^n \cong (P \oplus Q) \otimes (M \oplus N) \cong (P \otimes M) \oplus (P \otimes N) \oplus (Q \otimes M) \oplus (Q \otimes N)$$

одакле следи тврђење. □

Дефиниција 1.2. Модул M над прстеном R је *коначно представљив* уколико постоји тачан низ R-модула

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

За доказ наредне теореме погледати [13].

Теорема 1.2. *Пројективан модул M над прстеном R је раван. Уколико је M коначно генерисан, онда је коначно представљив.*

Пре него што наведемо примере пројективних модула, докажимо једну корисну лему.

Лема 1.2. *Уколико су сви коначно генерисани идеали прстена R пројективни R-модули, тада је сваки коначно генерисан пројективан R-модул P изоморфан суми $I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$ где су $I_1, \ldots, I_k$ коначно генерисани идеали прстена R.*

Доказ. Уочимо коначно генерисан пројективан модул P са n генератора. Он је изоморфан директном сабирку P' слободног модула R^n јер је пројективан. Уочимо природну пројекцију $\pi_n : R^n \to R$ на последњу координату односно $\pi_n(x) = x_n$. Покажимо индукцијом по n да је P' изоморфан суми од највише n коначно генерисаних идеала прстена R. Уколико је $n = 1$, P' је коначно генерисан идеал у R па тврђење следи. Претпоставимо сада да су пројективни модули, подмодули од R^n, изоморфни некој суми од највише n коначно генерисаних идеала. Посматрамо сада π_{n+1} и претпоставимо прво да је $P' \leqslant \ker(\pi_{n+1})$. Тада је, обзиром на $\ker(\pi_{n+1}) \cong R^n$, по индуктивној хипотези P' изоморфан суми од највише n коначно генерисаних идеала.

У општем случају, посматрајмо кратак тачан низ:

$$0 \longrightarrow P' \cap \ker(\pi_{n+1}) \xrightarrow{i} P' \xrightarrow{\pi_{n+1}} \pi_{n+1}(P') \longrightarrow 0$$

где је прва стрелица инклузија, а друга рестрикција природне пројекције. По индуктивној хипотези, $P' \cap \ker(\pi_{n+1})$ је изоморфан суми коначно генерисаних идеала $I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$ са $k \leqslant n$ док је $I_{k+1} = \pi_{n+1}(P')$ коначно генерисан идеал у R као слика коначно генерисаног модула. Додатно, низ се цепа јер је I_{k+1} пројективан модул односно важи:

$$P' \cong \big(P' \cap \ker(\pi_{n+1})\big) \oplus \pi_{n+1}(P') \cong I_1 \oplus \ldots \oplus I_{k+1}.$$

Стога је модул P' изоморфан суми од $k+1 \leqslant n+1$ коначно генерисаних идеала па је то и модул P јер је $P \cong P'$. $\square$

1.2 Примери

Сада ћемо навести разне примере пројективних модула. Неки од њих ће од значаја бити и касније, када ћемо навести још важних примера. Примери које овде наводимо ће бити коначно генерисани пројективни модули, док не нагласимо другачије.

Пример 1.1. У случају када је прстен $R = \mathbb{F}$ поље, његови модули су векторски простори над $\mathbb{F}$ па како сваки векторски простор има базу, то су у овом случају пројективни модули тачно слободни модули. Специјално, добијамо да су до на изоморфизам, коначно генерисани слободни $\mathbb{F}$-модули $\{\mathbb{F}^n\}$ за $n \geqslant 0$. Штавише, важи $\mathbb{F}^n \cong \mathbb{F}^m$ ако и само ако је $m = n$. $\square$

Пример 1.2. Елемент $e \in R$ је *идемпотентан* ако је $e^2 = e$. Ако је e идемпотентан, елемент $f = 1 - e$ је такође идемпотентан и важи да је $R \cong \langle e \rangle \oplus \langle f \rangle$ одакле следи да идемпотентни елементи генеришу идеале који су пројективни модули. Прстен R је *Булов прстен* ако је сваки његов елемент идемпотентан. Није тешко показати да су коначно генерисани идеали у Буловом прстену главни. Заиста, нека је задат коначно генерисан идеал $I = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ Буловог прстена R. Покажимо индукцијом по k да је I главни идеал. Ако је $k = 1$, немамо ништа да доказујемо па претпоставимо да су идеали генерисани са k елемената главни и уочимо идеал $I = \langle a_1, \ldots, a_{k+1} \rangle$. Тада је

$$I = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle + \langle a_{k+1} \rangle .$$

По индуктивној хипотези, $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle a \rangle$ па је $I = \langle a, a_{k+1} \rangle$. Уочимо сада елемент

$$x = a + a_{k+1} + aa_{k+1} \in I.$$

Пошто $x \in I$ то је $\langle x \rangle \subset I$. Са друге стране имамо

$$ax = aa + aa_{k+1} + aaa_{k+1} = a^2 + aa_{k+1} + a^2 a_{k+1} = a + 2aa_{k+1}.$$

Пошто је прстен Булов, то је

$$1 + a = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 = 1 + 2a + a$$

одакле је $2a = 0$ испуњено за сваки елемент $a \in R$. Стога је $ax = a \in \langle x \rangle$. Аналогно је $a_{k+1} x = a_{k+1} \in \langle x \rangle$ па је $I \subset \langle x \rangle$. Дакле, коначно генерисани идеали Буловог прстена су главни идеали. Стога коначно генерисани идеали Буловог прстена R јесу пројективни R-модули, па је по леми 1.2 сваки коначно генерисан пројективан R-модул изоморфан коначној суми главних идеала прстена R. $\square$

Пример 1.3. Прстен R је *фон Нојман регуларан* уколико за сваки елемент $r \in R$ постоји елемент $x \in R$ такав да је $r = r^2 x$. Булови прстени су специјалан случај фон Нојман регуларних прстена јер је у том случају $r = r^2 \cdot 1$ за свако $r \in R$. Други пример фон Нојман регуларног прстена јесте производ $R = \prod_{s \in S} \mathbb{F}$ поља $\mathbb{F}$ по индексном скупу S. Заиста, за елемент $r \in R$ формирамо елемент x такав да је $x_s = r_s^{-1}$ ако је r_s различит од нуле односно $x_s = 0$ ако је $r_s = 0$. Тада је тривијално испуњено $r = r^2 x$.

Слично као у примеру 1.2, показује се да је сваки коначно генерисан идеал у фон Нојман регуларном прстену главни идеал генерисан идемпотентним елементом (видети [8]). Самим тим, сваки коначно генерисан идеал је коначно генерисан пројективан R-модул па је по леми 1.2 сваки коначно генерисан пројективан R-модул изоморфан коначној директној суми главних идеала од којих је сваки генерисан идемпотентним елементом. □

Пример 1.4. Иако се овде бавимо комутативним прстенима, покажимо да за коначну групу G, *сви* модули над групном алгебром $\mathbb{C}[G]$ јесу пројективни. Уочимо епиморфизам $f : U \to V$, $\mathbb{C}[G]$-модула. Ово јесте $\mathbb{C}[G]$-линеарно пресликавање, па је специјално и $\mathbb{C}$-линеарно. Пошто је $\mathbb{C}$ поље, то постоји сечење $s : V \to U$ које је $\mathbb{C}$-линеарно, такво да је $f \circ s = \mathrm{Id}_V$. Сада придружимо:

$$S(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g s\left(g^{-1} x\right)$$

Најпре, ово јесте $\mathbb{C}[G]$-линеарно пресликавање. Заиста, за $h \in G, x \in U$, пошто је транслација у групи бијекција, важи

$$\begin{aligned} S(hx) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g s\left(g^{-1} h x\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h^{-1} g = t \in G} h t s\left(t^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} h t s\left(t^{-1} x\right) \\ &= h \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t s\left(t^{-1} x\right) \\ &= h S(x) \end{aligned}$$

Остало је још да проверимо да је S сечење од f, што директно рачунамо

$$(f \circ S)(x) = f\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g s\left(g^{-1} x\right)\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g f\left(s\left(g^{-1} x\right)\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g g^{-1} x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x.$$

Тиме комплетирамо овај пример. □

Напоменимо да исти доказ пролази уколико посматрамо групну алгебру $\mathbb{F}[G]$ где је $\mathbb{F}$ произвољно поље карактеристике нула или поље коначне карактеристике p при чему p не дели ред групе G.

Наредни пример је тополошке природе и наводимо га ради комплетности. За детаље и доказ Свонове теореме погледати чувени Свонов рад [12] као и [2], [9].

Пример 1.5. Нека је X Хаусдорфов тополошки простор и нека је

$$R = \mathrm{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{F} : f - \textit{непрекидна}\}$$

прстен непрекидних функција из X у поље $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ на којем посматрамо стандардну топологију. Операције сабирања и множења на R су дефинисане стандардно тачка по тачка. Додатно, R је и једна $\mathbb{F}$-алгебра са множењем скалара дефинисаним тачка по тачка. *Векторско* $\mathbb{F}$-*раслојење* над простором X је непрекидна сурјекција $\pi : E \to X$ таква да је за сваку тачку $x \in X$ *слој* $\pi^{-1}(x)$ један $\mathbb{F}$-простор и свака тачка $x \in X$ има отворену околину U за коју постоји хомеоморфизам $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{F}^n$ тако да је за сваку тачку $y \in U$ његова рестрикција $\pi^{-1}(y) \to \{y\} \times \mathbb{F}^n$ један $\mathbb{F}$-изоморфизам и комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{F}^n \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

где је p природна пројекција. Број n из горњег дијаграма назива се ранг раслојења на отвореном подскупу U и не мора бити исти за све отворене околине које испуњавају горње својство. Међутим, он је локално константан па ако је простор X повезан, онда је тај број константан и у том случају кажемо да је n *ранг* векторског раслојења. Када је из контекста јасно шта је пресликавање π које називано пројекција раслојења, често пишемо само E да назначимо векторско раслојење над простором X. Показује се да векторска $\mathbb{F}$-раслојења над Хаусдорфовим простором чине једну категорију.

Свако векторско раслојење $\pi : E \to X$ над простором X индукује један R-модул дефинисан са

$$\Gamma(E) = \{s \in \mathrm{C}(X, E) : \pi \circ s = \mathrm{Id}_X\}$$

који називамо модул *глобалних сечења* векторског раслојења E. Додељивање $E \mapsto \Gamma(E)$ остварује један адитивни функтор из категорије векторских раслојења над X у категорију R-модула, који називамо функтор сечења. Теорема Свона тада каже да, када је X *компактан* Хаусдорфов простор, функтор сечења остварује еквиваленцију између категорије векторских $\mathbb{F}$-раслојења и категорије коначно генерисаних пројективних R-модула.

Другим речима, сваки коначно генерисан пројективан модул над прстеном R непрекидних функција $X \to \mathbb{F}$ када је X компактан Хаусдорфов простор је модул сечења неког векторског $\mathbb{F}$-раслојења над простором X и класа изоморфности тог раслојења јединствено одређује класу изоморфности пројективног модула. Наведена еквиваленција се назива још и Свонова кореспонденција. $\square$

Пример 1.6. Нека је R главноидеалски домен (главни домен). Уколико посматрамо идеал I у R различит од нуле, он је генерисан неким елементом $r \in I$ различитим од нуле. Пошто је R по претпоставци домен, то једнакост $ar = 0$ имплицира да мора бити $a = 0$. Стога је идеал I слободан R-модул са базом $\{r\}$. Последично, сви идеали прстена R су коначно генерисани слободни R-модули па самим тим и коначно генерисани пројективни R-модули. Према леми 1.2 коначно генерисан пројективан R-модул P је изоморфан коначној директној суми идеала па како су сви они слободни R-модули, то закључујемо да је P слободан R-модул и ако P има n генератора, тада је $P \cong R^k$ за $k \leqslant n$. $\square$

1.3 Локални прстени

Циљ овог одељка је да опишемо коначно генерисане пројективне модуле у важном случају локалних прстена, што је од великог значаја за дефинисање ранга пројективног модула. Полазимо од наредне дефиниције.

Дефиниција 1.3. Прстен R је *локални* уколико има тачно један максимални идеал $\mathfrak{m}$.

Уколико желимо да нагласимо његов максимални идеал, рећи ћемо да је $(R, \mathfrak{m})$ локални прстен. Тада су сви елементи у $R \setminus \mathfrak{m}$ инвертибилни. Количник $R/\mathfrak{m}$ је тада једно поље које називамо *поље остатака* прстена R.

Пример 1.7. Уколико је R прстен и p прост идеал у R, локализација R_p је локални прстен, са максималним идеалом $\mathfrak{m}_p = \left\{ \frac{a}{b} : a \in p, b \notin p \right\}$. $\square$

Коначно генерисане пројективне модуле над локалним прстеном описаћемо тако што ћемо показати да је свака идемпотентна матрица над локалним прстеном слична дијагоналној матрици $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. Најпре наводимо следећу теорему чији се доказ може погледати у [11].

Теорема 1.3. *Нека је R комутативан прстен са јединицом и матрица $A \in \mathrm{M}_n(R)$ таква да је $A^2 = A$. Уколико постоје инвертибилне матрице $P, Q \in M_n(R)$ и дијагонална матрица $D \in M_n(R)$ такве да је $PAQ = D$, тада постоји инвертибилна матрица $C \in M_n(R)$ таква да је $CAC^{-1} = D$.*

Дакле, ако је идемпотентна матрица над прстеном еквивалентна дијагоналној матрици, онда је она слична тој дијагоналној матрици. Покажимо сада да идемпотентне матрице над локалним прстеном испуњавају услов из претходне теореме.

Лема 1.3. *Нека је $(R, \mathfrak{m})$ локални прстен и матрица $A \in M_n(R)$ таква да је $A^2 = A$. Тада постоје инвертибилне матрице $P, Q \in M_n(R)$ и дијагонална матрица $D \in M_n(R)$ такве да је $PAQ = D$.*

Доказ. Доказ спроводимо индукцијом по n. Уколико је $n = 1$ тврђење је тривијално. Нека тврђење важи за све матрице формата $n-1$ и посматрајмо идемпотентну матрицу A формата n. Уколико су све компоненте матрице A из идеала $\mathfrak{m}$, тада је A нула матрица. Заиста, када посматрамо матрицу $I - A$ где је I јединична матрица, она на дијагонали има редом елементе $1 - a_{11}, \ldots, 1 - a_{nn}$ који су инвертибилни јер $a_{11}, \ldots, a_{nn} \in \mathfrak{m}$. Посматрањем прве колоне, применом елементарних трансформација на врстама можемо добити матрицу у чијој су првој колони сви елементи нула осим почетног који је инвертибилан. То постижемо множењем прве врсте одговарајућим елементом и додавањем на остале, што је могуће јер је $1 - a_{11}$ инвертибилан. Елементи на дијагонали матрице тада остају инвертибилни јер када на $1 - a_{ii}$ за $i = 2, \ldots, n$ додамо елемент $(1 - a_{11})^{-1}(-a_{i1}) \in \mathfrak{m}$ он остаје облика $1 - m$ за $m \in \mathfrak{m}$ па је инвертибилан. Тако настављајући, закључујемо да је матрица $I - A$ слична троугаоној матрици са инвертибилним дијагоналним елементима, па је и сама инвертибилна. Пошто је матрица A идемпотентна то је
$$A - A^2 = A(I - A) = 0$$
па пошто је $I - A$ инвертибилна то мора бити $A = 0$ што смо и тврдили. Специјално, то показује да је за матрицу A тада испуњено тврђење. Уколико постоји поље $a_{ij} \notin \mathfrak{m}$ тада је a_{ij}

инвертибилан, па га заменом његове врсте са првом врстом односно његове колоне са првом колоном можемо поставити на поље у првој врсти и првој колони (на почетну позицију матрице). Замена врста односно колона је елементарна трансформација па добијамо еквивалентну матрицу почетној. Применом елементарних трансформација на врстама односно колонама даље трансформишемо матрицу у њој еквивалентну тако да су у првој врсти односно првој колони сва поља нула осим поља на дијагонали које је инвертибилно. Применом индукцијске хипотезе на остатак матрице који је формата $n-1$ добијамо да се матрица елементарним трансформацијама на врстама и колонама трансформише у, њој еквивалентну, дијагоналну матрицу што комплетира доказ. □

У наредној леми показујемо да локални прстен нема нетривијалних идемпотентних елемената.

Лема 1.4. *Нека је $(R, \mathfrak{m})$ локални прстен и $e \in R$ такав да је $e^2 = e$. Тада је $e = 0$ или $e = 1$.*

Доказ. Посматрамо једнакост
$$e - e^2 = e\,(1-e) = 0.$$
Уколико $e \in \mathfrak{m}$ тада $1-e$ не припада $\mathfrak{m}$ јер би му тада и јединица припадала, па је елемент $1-e$ инвертибилан одакле је $e = 0$. Са друге стране, ако e не припада $\mathfrak{m}$ онда је тај елемент инвертибилан па мора бити $1-e = 0$ односно $e = 1$ што комплетира доказ. □

Теорема 1.4. *Уколико је $(R, \mathfrak{m})$ локални прстен и M коначно генерисан пројективан R-модул, тада је M слободан R-модул.*

Доказ. Постоји R-модул N такав да је $M \oplus N \cong R^n$ па је модул M изоморфан модулу M' који је подмодул од R^n. Као такав, он дефинише идемпотентну матрицу $A \in M_n(R)$ што је заправо матрица пројекције $\pi : R^n \to R^n$ на директни сабирак M'. По претходној леми, матрица A еквивалентна је дијагоналној матрици D па по теореми 1.3 постоји инвертибилна матрица $C \in M_n(R)$ таква да је $CAC^{-1} = D$. Пошто је $A^2 = A$ то је и $D^2 = D$ односно на дијагонали матрице D су идемпотентни елементи прстена R. По леми 1.4 на дијагонали матрице D су само нуле и јединице. Уз евентуалну замену врста и колона, она је еквивалентна а самим тим и слична дијагоналној матрици D' која на првих $r \leqslant n$ дијагоналних поља има јединицу, и све остале нуле. Прецизније, постоји инвертибилна матрица $T \in M_n(R)$ таква да је $TD'T^{-1} = D$ одакле је
$$T^{-1}CAC^{-1}T = D'$$
односно матрица A слична је матрици D'. Слика пресликавања одређеног матрицом D' је слободан R-модул, док је слика пресликавања одређеног матрицом A модул M'. Пошто су те две матрице сличне, слике одговарајућих пресликавања које оне одређују су изоморфни модули, што комплетира доказ. □

Дефиниција 1.4. Уколико је $(R, \mathfrak{m})$ локални прстен и M коначно генерисан пројективан R-модул, број $r(M) = \dim_{R/m}(M/\mathfrak{m}M)$ називамо *ранг* модула M.

За коначно генерисан пројективан R-модул M, број $r(M)$ из претходне дефиниције испуњава $M \cong R^{r(M)}$. Заиста, по теореми 1.4 постоји број n такав да је $M \cong R^n$. Из изоморфизама $R/\mathfrak{m}$-модула
$$M/\mathfrak{m}M \cong M \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong R^n \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong (R/\mathfrak{m})^n$$
следи тврђење. Показује се (видети [1]) да је $r(M)$ уједно и минималан број R-генератора модула M.

1.4 Радикалски идеали

У овом одељку ћемо увести неке класе идеала прстена и видети како се понашају пројективни модули при преласку на количнички прстен. Полазимо од наредне дефиниције.

Дефиниција 1.5. Идеал I прстена R је *радикалски* уколико важи да је за сваки $i \in I$, $1+i$ инвертибилан елемент.

Пример 1.8. Максимални идеал $\mathfrak{m}$ локалног прстена R је радикалски идеал. □

Пример 1.9. Идеал I који је садржан у нилрадикалу $N(R)$ прстена R је радикалски идеал. Заиста, за $i \in I$ постоји $n \geqslant 1$ такво да је $i^n = 0$ одакле је

$$(1+i)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-i)^k\right) = 1-(-i)^n = 1-0 = 1$$

што комплетира доказ. □

Пример 1.10. Нека је I радикалски идеал прстена R. Покажимо да је тада и $M_n(I)$ радикалски идеал прстена $M_n(R)$. Пођимо од матрице $A \in M_n(I)$. Матрица $I+A$ има на дијагонали елементе $1+a_{11},\ldots,1+a_{nn}$ који су инвертибилни јер је по претпоставци идеал I радикалски, док су јој остала поља из I. Применом елементарних трансформација на врстама као у леми 1.3, матрица $A+I$ је елементарно еквивалентна троугаоној матрици на чијој су дијагонали елементи облика $1+i_{11},\ldots,1+i_{nn}$ који су инвертибилни, па је инвертибилна. □

Теорема 1.5. *Нека је I радикалски идеал прстена R и нека су M_1, M_2 коначно генерисани пројективни R-модули. Ако важи изоморфизам R/I-модула $M_1/IM_1 \cong M_2/IM_2$ тада су модули M_1 и M_2 изоморфни.*

Доказ. Означимо изоморфизме R/I-модула $F_1 : M_1/IM_1 \to M_2/IM_2$ и $F_2 : M_2/IM_2 \to M_1/IM_1$. Означимо са $\pi_1 : M_1 \to M_1/IM_1$ и $\pi_2 : M_2 \to M_2/IM_2$ природне пројекције и посматрајмо следећи дијаграм

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\pi_1"] & M_1/IM_1 \arrow[r] \arrow[d, "F_1"'] & 0 \\
M_2 \arrow[r, "\pi_2"] & M_2/IM_2 \arrow[r] \arrow[d, "F_2"'] & 0 \\
M_1 \arrow[r, "\pi_1"] & M_1/IM_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Посматрањем горњег нивоа, пошто је M_1 пројективан R-модул и $F_1 \circ \pi_1$ један R-хомоморфизам, то постоји R-хомоморфизам $f_1 : M_1 \to M_2$ такав да је $F_1 \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f_1$. Потпуно аналогно, посматрањем доњег нивоа дијаграма, пошто је M_2 пројективан R-модул, то постоји R-хомоморфизам $f_2 : M_2 \to M_1$ такав да је $F_2 \circ \pi_1 = \pi_1 \circ f_2$. Тако добијамо комутативан дијаграм

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M_1/IM_1 & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle F_1}\downarrow & & \\ M_2 & \xrightarrow{\pi_2} & M_2/IM_2 & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle F_2}\downarrow & & \\ M_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M_1/IM_1 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Из комутативности дијаграма тада следи да је за хомоморфизам $\phi_1 = f_2 \circ f_1 : M_1 \to M_1$ испуњено

$$\pi_1 \circ \phi_1 = (F_2 \circ F_1) \circ \pi_1 = \pi_1$$

односно за сваки елемент $m \in M_1$ важи да је $\phi_1(m) - m \in IM_1$. Уочимо сада генераторни скуп $m_1, \ldots, m_n$ модула M_1. За сваки m_i за $i = 1, \ldots, n$ постоје елементи $l_{i1}, \ldots, l_{in} \in I$ такви да је

$$\phi_1(m_i) - m_i = l_{i1}m_1 + \ldots + l_{in}m_n$$

односно важи

$$\phi_1(m_i) = m_i + l_{i1}m_1 + \ldots + l_{in}m_n.$$

Посматрамо сада матрицу $A = \left[\bar{l}_{ij}\right]$ где је $\bar{l}_{ii} = 1 + l_{ii}$ односно $\bar{l}_{ij} = l_{ji}$ за различите i, j. Она је по примеру 1.10 инвертибилна па пошто је њоме одређен хомоморфизам ϕ_1 то је ϕ_1 један изоморфизам. Потпуно аналогно је и $\phi_2 = f_2 \circ f_1 : M_2 \to M_2$ изоморфизам, одакле су модули M_1 и M_2 изоморфни. $\square$

Дефиниција 1.6. Идеал I прстена R је *нилпотентан* уколико постоји природан број $n \geqslant 1$ такав да је $I^n = 0$.

Услов $I^n = 0$ значи да је производ било којих n елемената идеала I нула, па је специјално нилпотентан идеал садржан у нилрадикалу прстена R и самим тим је радикалски идеал.

Пример 1.11. Ако је прстен R Нетерин, тада је нилрадикал $N(R)$ нилпотентан идеал. Заиста, пошто је R Нетерин прстен, идеал $N(R)$ је коначно генерисан односно постоје елементи $a_1, \ldots, a_k$ такви да је $N(R) = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Пошто су ти елементи нилпотентни, то постоје $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ такви да је $a_i^{n_i} = 0$ за све $i = 1, \ldots, k$. За природан број r, степен $N(R)^r$ генерисан је производима дужине r генератора $a_1, \ldots, a_k$ односно елементима $a_1^{r_1} \ldots a_k^{r_k}$ за $r_1 + \ldots + r_k = r$. Уочимо сада број $N = n_1 + \ldots + n_k$. Тада је за бројеве $r_1, \ldots, r_k$ такве да је $r_1 + \ldots + r_k = N$ за бар један од тих бројева $r_j \geqslant n_j$ па је $a_1^{r_1} \ldots a_k^{r_k} = 0$ односно $N(R)^N = 0$ што комплетира доказ. $\square$

Пример 1.12. Нека је I нилпотентан идеал прстена R. Тада је свака матрица $A \in M_n(I)$ нилпотентна. Заиста, уколико је $r \geqslant 1$ такав да је $I^r = 0$ то су сви производи r елемената из I нула. Уочимо сада матрицу $A \in M_n(I)$. Тада су сва поља матрице A^r елементи идеала I. Заиста, уколико је $n = 1$ тврђење је тривијално. Посматрамо сада $A^{r+1} = AA^r$ па по индукцијској хипотези, сва поља матрице A^r јесу из I^r. По формули за множење матрица, произвољно поље A_{ij}^{r+1} матрице A^{n+1} је облика

$$A_{ij}^{r+1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}A_{kj}^r$$

па по индукцијској хипотези важи да $A^r_{kj} \in I^r$ одакле $A^{r+1}_{ij} \in I^{r+1}$. Пошто је по претпоставци $I^r = 0$ то је $A^r = 0$ што смо и желели да покажемо. $\square$

Наредна важна теорема (видети и [10], [8]) се често назива и *теорема о подизању идемпотентних.*

Теорема 1.6. *Нека је $x \in R/N(R)$ такав да је $x^2 = x$. Тада постоји елемент $e \in R$ такав да је $e^2 = e$ и $[e] = x$.*

Доказ. Пођимо од елемента $r \in R$ таквог да је $[r] = x$. Означимо и елемент $s = 1 - r$. Тада је $[r]^2 = [r]$ као $[r]^N = [r]$ за све $N \geqslant 1$. По услову је $rs = r(1-r) \in N(R)$ односно постоји $l \geqslant 1$ такав да је $(rs)^l = 0$. Пошто је $[r] + [s] = [r+s] = [1]$ то применом биномне формуле на елементе r, s добијамо да је

$$(r+s)^l = r^l + s^l + n_0 = 1$$

при чему $n_0 \in N(R)$ одакле следи да је $r^l + s^l = 1 - n_0$ па пошто је n_0 нилпотентан, то је елемент $r^l + s^l$ инвертибилан. Стога постоји $u \in R$ такав да је

$$ur^l + us^l = 1$$

и $u - 1 \in N(R)$ јер је

$$u\left(r^l + s^l\right) = u(1 + n_0) = 1$$

односно $u - 1 = -un_0 \in N(R)$. Додатно важи да је

$$ur^l us^l = u^2 r^l s^l = u^2 (rs)^l = 0$$

односно елемент ur^l испуњава

$$ur^l\left(1 - ur^l\right) = ur^l us^l = 0$$

што показује да је ur^l идемпотентан. Коначно, пошто је $\left[ur^l\right] = [u][r]^l = [r] = x$ то је доказ комплетиран. $\square$

Дакле, сваки идемпотентан елемент у количничком прстену $R/N(R)$ је заправо класа идемпотентног елемента прстена R. Приметимо сада једну важну ствар. У доказу теореме 1.6 о подизању идемпотентних, једино што смо користили било је да елементи u, r, s међусобно комутирају сваки са сваким. За елементе r, s је то увек случај јер јединица прстена комутира са свим елементима. Додатно, елемент u је задат као сума елемената који комутирају са r, s па и он са њима комутира. Сходно томе, имамо директну наредну последицу која захтева посебну формулацију јер у општем случају збир два нилпотентна елемента прстена који није комутативан неће бити нилпотентан елемент, али хоће ако они комутирају.

Теорема 1.7. *Нека је R прстен који не мора бити комутативан. Уколико је елемент $x \in R$ такав да је $x^2 - x$ нилпотентан, тада постоји идемпотентан елемент $e \in R$ такав да је $e - x$ нилпотентан.*

У наредној теореми показујемо да се заправо редукцијом прстена по нилпотентном идеалу, коначно генерисани пројективни модули количника такође добијају редукцијом.

Теорема 1.8. *Нека је I нилпотентан идеал прстена R. Тада за коначно генерисан пројективан R/I-модул M постоји коначно генерисан пројективан R-модул P такав да је $M \cong P/IP$.*

Доказ. Модул M одређује модул N такав да је $M \oplus N \cong (R/I)^n$ па је $M \cong M'$ за подмодул M' модула $(R/I)^n$. Он дефинише идемпотентну матрицу $\bar{A} \in M_n(R/I)$ за неку $A \in M_n(R)$ што је матрица пројекције $\pi_{M'} : (R/I)^n \to (R/I)^n$ на сабирак M'. Пошто је $\bar{A} = \bar{A}^2$ у прстену $M_n(R/I)$ то је $A - A^2 \in M_n(I)$ па је по примеру 1.12 матрица $A - A^2$ нилпотентна. Стога по теореми 1.7 постоји идемпотентна матрица $B \in M_n(R)$ таква да је $A - B \in M_n(I)$ одакле имају исту редукцију $\bar{B} = \bar{A}$. Следи да је $L_{\bar{B}} = \pi_{M'}$ где је $L_{\bar{B}} : (R/I)^n \to (R/I)^n$ хомоморфизам индукован матрицом $\bar{B}$. Дефинишемо сада R-модул $P = \mathrm{Im}(L_B)$ где је $L_B : R^n \to R^n$ одређено пројекцијом B. Тако смо добили комутативан дијаграм

$$\begin{array}{ccc} R^n & \xrightarrow{L_B} & R^n \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ (R/I)^n & \xrightarrow{\pi_{M'}} & (R/I)^n \end{array}$$

где су вертикални хомоморфизми природне пројекције. Дефинишемо сада морфизам $f : P \to M'$ са $f(p) = \pi(p)$. Пошто дијаграм комутира и $M' = \mathrm{Im}(\pi_{M'})$ то је ово добро дефинисан хомоморфизам. Покажимо прво да је сурјекција. За $y \in M'$ важи да је $y = \pi_{M'}(\pi(x))$ за неко $x \in R^n$ па је из комутативности дијаграма

$$f(L_B(x)) = \pi(L_B(x)) = \pi_{M'}(\pi(x)) = y.$$

За $x \in R^n$ важи да $L_B(x) \in \ker(f)$ ако и само ако је $\pi(L_B(x)) = 0$ ако и само ако $L_B(x) \in I \times \ldots \times I$ односно ако и само ако је $L_B(x) = (i_1, \ldots, i_n)$ за неке $i_1, \ldots, i_n \in I$. Тада је

$$L_B(x) = L_B(L_B(x)) = L_B((i_1, \ldots, i_n)) = i_1 L_B(e_1) + \ldots + i_n L_B(e_n)$$

односно $L_B(x) \in IP$. То показује да је $\bar{f} : P/IP \to M'$ изоморфизам и комплетира доказ. $\square$

1.5 Ранг модула

Инваријанта која раздваја коначнодимензионе векторске просторе јесте димензија. У случају слободних модула над комутативним прстеном, важи следећа теорема (видети [1] и [5]).

Теорема 1.9. *За комутативан прстен са јединицом R, постоји изоморфизам R-модула $R^m \cong R^n$ ако и само ако је $m = n$.*

У општем случају модула над прстеном, издвајамо следеће. Означимо са $\mathrm{Spec}(R)$ спектар прстена R, што је скуп његових простих идеала. На њему посматрамо топологију Зарисског, у којој су затворени скупови:

$$\mathrm{V}(I) = \{p \in X | I \subseteq p\}$$

где је I идеал прстена R. Нека је P коначно генерисан пројективан R-модул. Дефинишемо функцију $\rho_P : \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}$ на следећи начин (видети и [14]). За прост идеал $p \in \mathrm{Spec}(R)$, локализација R_p је локални прстен. Покажимо прво да је локализација модула P_p коначно генерисан пројективан R_p-модул. Заиста, пошто је P пројективан, то постоји R-модул Q такав да је $P \oplus Q \cong R^n$. Када применимо локализацију по p, добијамо:

$$P_p \oplus Q_p \cong (P \oplus Q)_p \cong (R^n)_p \cong (R_p)^n .$$

По теореми 1.4 је $P_p \cong (R_p)^k$ за јединствени број $k \leqslant n$ и тада дефинишемо $\rho_P(p) = k$. Наравно, важи да је $\rho_P(p) = r(P_p)$ где је $r(P_p)$ ранг пројективног модула P_p над локалним прстеном R_p као у дефиницији 1.4.

Дефиниција 1.7. Функција $\rho_P : \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{Z}$ горе дефинисана са $\rho_P(p) = r(P_p)$ назива се *функција ранга* модула P.

Вредност $\rho_P(p)$ је ранг модула P по простом идеалу p. Уколико је $P = R^n$, тада је $P_p \cong (R_p)^n$ одакле је ранг слободног модула R^n константно n. Показаћемо ускоро да наведена дефиниција уопштава дефиницију 1.4 ранга у случају када је прстен R локални. За пројективан модул P кажемо да је *константног ранга* уколико је његова функција ранга константна.

Покажимо прво како се ранг модула слаже са проширењем скалара (видети и [2], [4]). Нека су R, S прстени, $f : R \to S$ хомоморфизам прстена и M коначно генерисан пројективан R-модул. Тада постоји R-модул N такав да је $M \oplus N \cong R^n$. Применимо ли на ово тензорисање са S, добијамо следеће изоморфизме S-модула (видети и [5])

$$(S \otimes_R M) \oplus (S \otimes_R N) \cong S \otimes_R (M \oplus N) \cong S \otimes_R R^n \cong S^n$$

односно и модул $M \otimes_R S$ добијен проширењем скалара јесте коначно генерисан пројективан S-модул. Хомоморфизам f индукује пресликавање између спектара прстена $f^\star : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ одређено са $f^*(q) = f^{-1}(q)$. При овим ознакама, важи следећа теорема.

Теорема 1.10. *Уколико је $f : R \to S$ хомоморфизам прстена и M коначно генерисан пројективан R- модул, тада следећи дијаграм комутира*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(S) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\rho_{M\otimes_R S}"'] & & \mathrm{Spec}(R) \arrow[dl, "\rho_M"] \\ & \mathbb{N}. & \end{tikzcd}$$

Доказ. Нека је $q \in \mathrm{Spec}(S)$ прост идеал у S и $p = f^*(q)$ одговарајући прост идеал у R. Приметимо прво да је тада S_q један R_p-модул, одређен хомоморфизмом прстена $\hat{f} : R_p \to S_q$, $f\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{f(r)}{f(t)}$ који је добро дефинисан јер је $f(R \setminus p) \subset S \setminus q$ (видети [1], [5]). Оно је одређено тако да комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_R"'] & S \arrow[d, "i_S"] \\ R_p \arrow[r, "\hat{f}"] & S_q. \end{tikzcd}$$

Сходно томе, имамо следеће изоморфизме S_q-модула (видети [5])

$$(M \otimes_R S)_q \cong (M \otimes_R S) \otimes_S S_q \cong M \otimes_R S_q.$$

Пошто је S_q један R_p-модул, то је даље

$$M \otimes_R S_q \cong M \otimes_R \left(R_p \otimes_{R_p} S_q\right) \cong (M \otimes_R R_p) \otimes_{R_p} S_q \cong (R_p)^{\rho_M(p)} \otimes_{R_p} S_q \cong S_q^{\rho_M(p)}$$

што комплетира доказ. $\square$

Претходна теорема указује на природност функције ранга коначно генерисаног пројективног модула (видети и [14], [4]). Специјално закључујемо да ако је M коначно генерисан пројективан R-модул константног ранга n, тада је $M \otimes_R S$ коначно генерисан пројективан S-модул такође константног ранга n. Покажимо сада две важне последице овог тврђења.

Последица 1.10.1. *Уколико је M коначно генерисан пројективан R-модул, $p \in \operatorname{Spec}(R)$ и Q_p поље разломака домена R/p,тада важи*

$$\rho_M(p) = \dim_{Q_p}\left(M/pM \otimes_{R/p} Q_p\right)$$

Доказ. Полазимо од следећег комутативног дијаграма:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & R_p \arrow[d, "\phi"] \\ R/p \arrow[r, "i"] & Q_p \end{tikzcd} .$$

Овде смо са i означили одговарајуће хомоморфизме у локализацију а са π природну пројекцију. Пошто се елементи из $R \setminus p$ са $i \circ \pi : R \to Q_p$ сликају у инвертибилне елементе, то на основу универзалног својства локализације (видети [1], [10]) постоји јединствени хомоморфизам прстена $\phi : R_p \to Q_p$ такав да дијаграм комутира. По дефиницији ранга модула, $\rho_M(p) = n$ такав да је $M \otimes_R R_p \cong (R_p)^n$ изоморфизам R_p-модула. Са једне стране (видети [5], [10]) имамо изоморфизам Q_p-модула

$$M \otimes_R Q_p \cong (M \otimes_R R_p) \otimes_{R_p} Q_p \cong (R_p)^n \otimes_{R_p} Q_p \cong (Q_p)^n$$

док је са друге стране (пошто је $i \circ \pi = \phi \circ i$)

$$M \otimes_R Q_p \cong (M \otimes_R R/p) \otimes_{R/p} Q_p \cong M/pM \otimes_{R/p} Q_p$$

такође изоморфизам Q_p-модула одакле следи резултат. $\square$

Последица 1.10.2. *Нека су $p, q \in \operatorname{Spec}(R)$ и M коначно генерисан пројективан R-модул. Ако је $p \subset q$ тада је $\rho_M(p) = \rho_M(q)$.*

Доказ. Ако је $p \subset q$ тада је $R \setminus q \subset R \setminus p$ па је R_p један R_q-модул јер се при природном хомоморфизму у локализацију $i_p : R \to R_p$ сви елемент из $R \setminus q$ сликају у инвертибилне, па из универзалног својства локализације постоји јединствени хомоморфизам прстена $\phi : R_q \to R_p$ такав да комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "i_q"] \arrow[dr, "i_p"'] & & R_q \arrow[dl, "\phi"] \\ & R_p & \end{tikzcd}$$

Стога ако је $\rho_M(q) = n$ из комутативности дијаграма имамо изоморфизме R_p-модула

$$M \otimes_R R_p \cong (M \otimes_R R_q) \otimes_{R_q} R_p \cong (R_q)^n \otimes_{R_q} R_p \cong (R_p)^n$$

што комплетира доказ.

□

На основу претходне две последице лако можемо да покажемо да се ранг коначно генерисаног пројективног модула над локалним прстеном из дефиниције 1.4 поклапа са функцијом ранг из дефиниције 1.7 и да су сви коначно генерисани пројективни модули над локалним прстеном константног ранга. Заиста, ако је прстен R локални и M коначно генерисан пројективан R-модул, тада је за прост идеал p у R испуњено $p \subset \mathfrak{m}$ где је $\mathfrak{m}$ јединствени максимални идеал у R. Сходно томе имамо једнакости

$$\rho_M(p) = \rho_M(\mathfrak{m}) = \dim_{Q(R/\mathfrak{m})}\left(M/\mathfrak{m}M \otimes_{R/\mathfrak{m}} Q(R/\mathfrak{m})\right)$$

али пошто је $R/\mathfrak{m}$ поље, његово поље разломака $Q(R/\mathfrak{m})$ је природно изоморфно $R/\mathfrak{m}$ па следи једнакост две дефиниције ранга у случају локалних прстена.

Наредна теорема говори о непрекидности функције ранга. Погледати и [14], [9], [10].

Теорема 1.11. *Нека је P коначно генерисан пројективан модул. Уколико на $\mathbb{N}$ посматрамо дискретну топологију, функција ранга модула P је непрекидна.*

Доказ. Пошто на кодомену посматрамо дискретну топологију, то је сваки подскуп од $\mathbb{N}$ отворен у тој топологији, па пошто је сваки подскуп унија једночланих подскупова, то је довољно показати да је инверзна слика једночланог скупа отворен скуп у топологији Зариског, односно да је функција ранга локално константна функција. Уочимо стога прост идеал $p \in X$ и означимо $k = \rho_P(p)$. По последици 1.10.1, овај број се поклапа са димензијом R/p-модула $P/pP \otimes_{R/p} Q_p$ над Q_p. Пођимо сада од тога да постоји модул S такав да је $P \oplus S \cong R^n$ и нека је $\rho_S(p) = l$. Тензоришемо сада ово са R/p, добијамо:

$$P/pP \oplus S/pS \cong (P \otimes R/p) \oplus (S \otimes R/p) \cong (P \oplus S) \otimes R/p \cong (R^n) \otimes R/p \cong (R/p)^n .$$

Ови тензорски производи су над R. Стога модул P/pP дефинише идемпотентни хомоморфизам $\pi : (R/p)^n \to (R/p)^n$ што је заправо пројекција на сабирак који одговара модулу P/pP. Он одређује своју матрицу над доменом R/p и ранг ове матрице над пољем разломака Q_p јесте управо број $\dim_{Q_p}\left(P/pP \otimes_{R/p} Q_p\right)$. Стога, ранг модула P је највише $k-1$ ако и само ако је ранг матрице пројекције највише $k-1$ што је еквивалентно томе да су детерминанте главних k-минора нула, а како су те детерминанте елементи количника R/p, то је ранг матрице пројекције највише $k-1$ ако и само ако су те детерминанте елементи идеала p. То нам дефинише затворен скуп у топологији Зариског, одређеним идеалом I_P који је генерисан детерминантама главних k-минора пројекције. Када пређемо на комплемент, закључујемо да је ранг пројекције по идеалу q бар k ако и само ако $q \in X \setminus \mathrm{V}(I_P)$. Применимо сада све исто на број l који је дефинисан за модул S, па важи да је ранг модула S по идеалу q бар l ако и само ако је $q \in X \setminus \mathrm{V}(I_S)$. Али, оно што је константно јесте збир бројева k, l јер је $k + l = n$. Стога закључујемо да је за све идеале $q \in X \setminus (\mathrm{V}(I_P) \cup \mathrm{V}(I_S))$ ранг модула P по идеалу q једнак k. □

Уколико је спектар прстена R повезан простор у топологији Зариског, онда је функција ранга сваког коначно генерисаног пројективног модула константна и писаћемо $\rho(M)$ за вредност његове функције ранга. То је специјално испуњено у случају када је прстен домен, и тада је ранг једнак $\dim_Q(M \otimes_R Q)$ где је Q поље разломака домена R.

Покажимо за крај поглавља како се функција ранга слаже са основним операцијама над модулима. Уведимо најпре један појам.

Дефиниција 1.8. Нека је M модул над прстеном R. *Дуални модул* модула M је модул $M^* = \mathrm{Hom}(M, R)$.

Теорема 1.12. *За коначно генерисане пројективне модуле M, N над прстеном R važи:*

1) $\rho_{M \oplus N} = \rho_M + \rho_N$.

2) $\rho_{M \otimes N} = \rho_M \rho_N$.

3) *Дуални модул M^* је коначно генерисан пројективан модул и важи $\rho_M = \rho_{M^*}$.*

Доказ. Нека је p прост идеал прстена R. Прва два својства следе из адитивности локализације и њеног комутирања са тензорским производом.

$$(M \oplus N)_p \cong M_p \oplus N_p \cong (R_p)^{\rho_M(p)} \oplus (R_p)^{\rho_N(p)} \cong (R_p)^{\rho_M(p)+\rho_N(p)}.$$

$$(M \otimes N)_p \cong M_p \otimes_{R_p} N_p \cong (R_p)^{\rho_M(p)} \otimes_{R_p} (R_p)^{\rho_N(p)} \cong (R_p)^{\rho_M(p)\rho_N(p)}.$$

Пошто је M коначно генерисан пројективан модул, то постоји модул M' такав да је $M \oplus M' \cong R^n$. Сада из адитивности $\mathrm{Hom}(-, R)$ функтора имамо да важи:

$$M^* \oplus (M')^* = \mathrm{Hom}(M, R) \oplus \mathrm{Hom}(M', R) \cong \mathrm{Hom}(M \oplus M', R) \cong \mathrm{Hom}(R^n, R) \cong R^n$$

односно модул M^* је такође коначно генерисан пројективан модул. Додатно, пошто су коначно генерисани пројективни модули коначно представљиви (теорема 1.2), то локализација комутира са $\mathrm{Hom}(-, R)$-функтором (видети [13]), односно важи:

$$(\mathrm{Hom}_R(M, R))_p \cong \mathrm{Hom}_{R_p}(M_p, R_p) \cong \mathrm{Hom}_{R_p}\left((R_p)^{\rho_M(p)}, R_p\right) \cong (R_p)^{\rho_M(p)}$$

одакле следи једнакост функције ранга модула M и M^*. □

Глава 2

Пикарова група прстена

Циљ ове главе је да уведемо инвертибилне модуле и Пикарову групу прстена. Навешћемо нека њена основна својства и један тачан низ који ћемо искористити да израчунамо Пикарову групу једног афиног прстена. Даље ће бити уведени Дедекиндови и Крулови домени и њима придружене класне групе. У случају Дедекиндовог домена, показаћемо да је класна група изоморфна Пикаровој групи. За крај ће бити скициран доказ теореме Клаборна по којој за сваку Абелову групу G постоји Дедекиндов домен R чија је класна група изоморфна са G.

2.1 Инвертибилни модули

Почињемо следећом дефиницијом (видети и [7], [14], [10]).

Дефиниција 2.1. Модул M над прстеном R је *инвертибилан* уколико постоји R-модул N такав да је $M \otimes_R N \cong R$.

Покажимо сада карактеризацију инвертибилних модула (видети и [10]).

Теорема 2.1. *За модул M, следећи услови су еквивалентни:*

1) M је коначно генерисан пројективан модул константног ранга 1.

2) Постоји изоморфизам $M \otimes M^* \cong R$.

3) Модул M је инвертибилан.

Доказ. Нека важи 1). По теореми 1.12, дуални модул M^* је коначно генерисан пројективан модул ранга 1. Уочимо сада природно упаривање:

$$A_M : M \otimes M^* \to R$$

дефинисано са $A_M\,(x, \phi) = \phi\,(x)$. Ово је хомоморфизам, и уколико за прост идеал p применимо локализацију по p, добијамо комутативан дијаграм (видети и [13], [10]).

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R M^*)_p \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "(A_M)_p"'] & & M_p \otimes_{R_p} (M_p)^* \arrow[dl, "A_{M_p}"] \\
& R_p &
\end{tikzcd}.$$

Хоризонтални изоморфизам је композиција изоморфизама $(M \otimes_R M^*)_p \cong M_p \otimes_{R_p} (M^*)_p \cong M_p \otimes_{R_p} (M_p)^*$ док је упаривање A_{M_p} изоморфизам јер је по претпоставци $M_p \cong R_p$ (видети и [13], [10]). Сходно томе, локализација $(A_M)_p$ је изоморфизам за сваки прост идеал p па пошто је изоморфност модула локално својство (видети [1]), упаривање A_M је изоморфизам што смо и желели да покажемо.

Смер 2) $\Rightarrow$ 3) је очигледан, па претпоставимо још да је модул M инвертибилан. Нека је N модул такав да је $M \otimes N \cong R$. Покажимо прво да је модул M пројективан. Уочимо слободан модул F и епиморфизам $f : F \to M$. Применимо на ово тензорисање са N, добијамо епиморфизам $f \otimes \mathrm{Id}_N : F \otimes N \to M \otimes N \cong R$ што индукује кратак тачан низ

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow F \otimes N \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Пошто је R пројективан модул, то имамо цепање

$$F \otimes N \cong L \oplus R$$

Применимо сада на ово тензорски производ са M :

$$(L \otimes M) \oplus (R \otimes M) \cong (L \oplus R) \otimes M \cong (F \otimes N) \otimes M \cong F \otimes (M \otimes N) \cong F \otimes R \cong F$$

одакле је $M \otimes R \cong M$ директан сабирак слободног модула па је пројективан.

Покажимо сада да је M коначно генерисан. Полазимо од тога да постоји модул P такав да је $M \oplus P \cong F$ (то наравно може бити и горе добијени модул). Применимо ли на ово тензорски производ са N добијамо

$$R \oplus (P \otimes N) \cong (M \otimes N) \oplus (P \otimes N) \cong F \otimes N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N$$

односно слободан модул R је директан сабирак модула $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N$. Посматрамо сада природну пројекцију $\pi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N \to R$. Постоје $n_1, \ldots, n_k \in N$ тако да је

$$\pi (n_1 + \ldots + n_k) = 1$$

па пошто 1 генерише модул R, то постоји *коначан* подскуп $\Lambda_0 \subset \Lambda$ од k елемената такав да је R директан сабирак од $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} N$ односно постоји модул Q такав да важи

$$R \oplus Q \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} N.$$

Применимо ли још једном тензорски производ са M, добијамо

$$M \oplus (Q \otimes M) \cong (R \otimes M) \oplus (Q \otimes M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} N \otimes M$$

Пошто је

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} N \otimes M \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} (M \otimes N) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} R \cong R^k$$

то следи да је модул M коначно генерисан пројективан модул. Коначно, по теореми 1.12 следи да је

$$\rho_M \rho_N = \rho_{M \otimes N} = \rho_R = 1$$

одакле је ρ_M константно 1 што комплетира доказ. $\square$

За инвертибилан модул M, са $[M]$ ћемо означавати његову класу изоморфности.

Дефиниција 2.2. *Пикарова група* прстена R у ознаци $\operatorname{Pic}(R)$ је скуп класа изоморфности инвертибилних R-модула са операцијом

$$[M]\,[N] = [M \otimes_R N]\,.$$

Неутрал за уведену операцију је $[R]$. Пошто је она асоцијативна и комутативна, то је по претходној теореми $\operatorname{Pic}(R)$ једна Абелова група, са инверзним елементом $[M]^{-1} = [M^*]$.

Пример 2.1. Уколико су сви коначно генерисани пројективни модули над прстеном R слободни, тада је Пикарова група тривијална $\operatorname{Pic}(R) = \{[R]\}$. То је специјално испуњено у случају када је R поље, главни домен или локални прстен. $\square$

2.2 Милнорова конструкција

У овом одељку увешћемо Милнорову конструкцију помоћу које можемо конструисати пројективне модуле, и која ће индуковати један тачан низ који повезује групу инвертибилних елемената прстена са његовом Пикаровом групом. Полазимо од следеће дефиниције (видети и [7], [14], [10]).

Дефиниција 2.3. *Милноров квадрат* је комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & R_1 \arrow[d, "f_1'"] \\ R_2 \arrow[r, "f_2'"] & R' \end{tikzcd}$$

комутативних прстена са јединицом такав да је прстен R повлачење дијаграма.

Прстен R у претходној дефиницији је *повлачење* дијаграма ако је тачан низ

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\Delta} R_1 \times R_2 \xrightarrow{D} R'$$

где су хомоморфизми задати као дијагонала $\Delta(r) = (f_1(r), f_2(r))$ и разлика $D(r_1, r_2) = f_1'(r_1) - f_2'(r_2)$. Ако је $f_1'(r_1) = f_2'(r_2)$ тада постоји јединствени $r \in R$ такав да је $f_1(r) = r_1$ и $f_2(r) = r_2$. Напоменимо да је ово повлачење дијаграма у категоријалном смислу. Из тачности горњег низа, имамо изоморфизам прстена

$$f : R \to \left\{(r_1, r_2) \in R_1 \times R_2 : f_1'(r_1) = f_2'(r_2)\right\}$$

одређен са $f(r) = \Delta(r)$.

Пример 2.2. Нека је $f : R \to S$ хомоморфизам прстена и нека су $I \subset R$, $J \subset S$ идеали прстена такви да се при f идеал I изоморфно слика у идеал J. Тада је добро дефинисан индуковани хомоморфизам прстена $\bar{f} : R/I \to S/J$, $\bar{f}([r]) = [f(r)]$ па добијамо комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R/I \arrow[r, "\bar{f}"] & S/J \end{tikzcd}$$

при чему су вертикални хомоморфизми природне пројекције. Нека су $[r] \in R/I, s \in S$ такви да је $\bar{f}([r]) = [s]$ односно $[f(r)] = [s]$. Тада $f(r) - s = j \in J$ па пошто $j \in J = f(I)$ то постоји јединствено $i \in I$ такво да је $j = f(i)$ односно $f(r) - f(i) = f(r-i) = s$. Стога је $r - i \in R$ такав да важи $f(r-i) = s$ и $[r-i] = [r] \in R/I$. Ако су $r_1, r_2 \in R$ такви да је $f(r_1) = f(r_2)$ и $[r_1] = [r_2]$ тада најпре друга једнакост имплицира да $r_2 - r_1 \in I$ односно $r_2 - r_1 = i$ за $i \in I$. Тада је

$$f(i) = f(r_2 - r_1) = f(r_2) - f(r_1) = 0$$

па пошто је по претпоставци рестрикција хомоморфизма f на идеал I изоморфизам, то је $r_2 = r_1$ што показује да је овај дијаграм један Милноров квадрат. □

Важан специјалан случај претходног примера је наредни пример.

Пример 2.3. Нека су R, S прстени такви да је $R \subset S$ раширење прстена и нека је хомоморфизам прстена $i : R \to S$ инклузија. Уочимо идеал

$$I = \{r \in R : rS \subset R\}$$

који називамо *кондуктор* раширења прстена $R \subset S$. Кондуктор је максимални (у односу на инклузију) идеал прстена S садржан у прстену R. Тада је

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ R/I & \longrightarrow & S/I \end{array}$$

Милноров квадрат, при чему су вертикални хомоморфизми природне пројекције а хоризонтални инклузије. Овде уместо кондуктора можемо посматрати било који идеал прстена S садржан у прстену R. □

Фиксирајмо сада Милноров квадрат из примера 2.2

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ R/I & \xrightarrow{\bar{f}} & S/J \end{array}$$

и нека су задати S-модул M_1, R/I-модул M_2 и изоморфизам $\phi : M_1 \otimes_S S/J \to M_2 \otimes_{R/I} S/J$ S/J-модула.

Дефиниција 2.4. *Милнорово ушивање* модула M_1 и M_2 *дуж* изоморфизма ϕ јесте R-модул M такав да је повлачење дијаграма

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M_1 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi_1} \\ M_2 & \xrightarrow{\psi_2} & M_1 \otimes_S S/J \end{array}$$

где су

$$\psi_1(m_1) = m_1 \otimes 1$$

и

$$\psi_2(m_2) = \phi^{-1}(m_2 \otimes 1)$$

за $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$.

Приметимо да су сви хомоморфизми у горњем дијаграму хомоморфизми R-модула. За модул M из претходне дефиниције пишемо $M = (M_1, M_2, \phi)$ и кажемо да је модул M настао *уширањем* модула M_1, M_2 дуж изоморфизма ϕ. То је модул одређен јединствено до на изоморфизам такав да постоје хомоморфизми R-модула $f_1 : M \to M_1, f_2 : M \to M_2$ и тачан је низ

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\Delta} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{D} M_1 \otimes_{S/J} S/J$$

где су $\Delta(m) = (f_1(m), f_2(m))$ и $D(m_1, m_2) = \psi_1(m_1) - \psi_2(m_2)$.

Пример 2.4. Напоменимо још једном да посматрамо фиксирани Милноров квадрат као у примеру 2.2. Нека је M коначно генерисан пројективан R-модул. Покажимо да постоје S-модул M_1, R/I-модул M_2 и изоморфизам S/J-модула $\phi : M_1 \otimes_S S/J \to M_2 \otimes_{R/I} S/J$ такав да је $M \cong (M_1, M_2, \phi)$. Посматрамо $M_1 = M \otimes_R S$, $M_2 = M \otimes_R R/I$. Тада је

$$M_1 \otimes_S S/J = (M \otimes_R S) \otimes_S S/J \overset{\phi_1}{\to} M \otimes_R S/J$$

при чему се тензор $(m \otimes s) \otimes [s']$ слика у $m \otimes [ss']$ изоморфно. Аналогно,

$$M_2 \otimes_{R/I} S/J = (M \otimes_R R/I) \otimes_{R/I} S/J \overset{\phi_2}{\to} M \otimes_R S/J$$

при чему се тензор $(m \otimes [r]) \otimes [s]$ слика у $m \otimes [f(r)s]$ изоморфно, за $m \in M, s \in S, r \in R$. Сада поставимо изоморфизам

$$\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : M_1 \otimes_S S/J \to M_2 \otimes_{R/I} S/J.$$

По дефиницији Милноровог квадрата, тачан је низ R-модула

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\Delta} S \oplus R/I \xrightarrow{D} S/J$$

па када овај низ тензоришемо са M, пошто је он коначно генерисан пројективан модул, он је раван па добијамо тачан низ

$$0 \longrightarrow M \otimes_R R \xrightarrow{U} (M \otimes_R S) \oplus (M \otimes_R R/I) \xrightarrow{V} M \otimes_R S/J$$

при чему су хомоморфизми U, V одређени са

$$U(m \otimes r) = (m \otimes f(r), m \otimes [r])$$

и

$$V(m_1 \otimes s, m_2 \otimes [r]) = m_1 \otimes [s] - m_2 \otimes [f(r)].$$

Сада $M \otimes_R S/J$ заменимо са њему изоморфним модулом $(M \otimes_R S) \otimes_S S/J$ односно добијамо тачан низ

$$0 \longrightarrow M \otimes_R R \xrightarrow{U} (M \otimes_R S) \oplus (M \otimes_R R/I) \xrightarrow{V_1} (M \otimes_R S) \otimes_S S/J$$

где је сада $V_1(m_1 \otimes s, m_2 \otimes [r]) = \phi_1^{-1}(m_1 \otimes [s]) - \phi_1^{-1}(m_2 \otimes [f(r)])$. Уколико је још $V_1 = \psi_1 - \psi_2$ где су ψ_1, ψ_2 из дефиниције уширања, то је $M \otimes_R R$ изоморфно Милноровом уширању (M_1, M_2, ϕ). Сада рачунамо

$$\begin{aligned}\psi_1(m_1 \otimes s) - \psi_2(m_2 \otimes [r]) &= (m_1 \otimes s) \otimes 1 - \phi^{-1}((m_2 \otimes [r]) \otimes 1) \\ &= \phi_1^{-1}(m_1 \otimes s) - \phi_1^{-1}(\phi_2(m_2 \otimes [r]) \otimes 1) \\ &= \phi_1^{-1}(m_1 \otimes s) - \phi_1^{-1}(m_2 \otimes [f(r)]).\end{aligned}$$

Сходно томе, дијаграм

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes_R R \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & M \otimes_R S \arrow[d, "\psi_1"] \\
M \otimes_R R/I \arrow[r, "\psi_2"] & (M \otimes_R S) \otimes_S S/J
\end{tikzcd}
$$

јесте Милноров квадрат што комплетира доказ. □

Наводимо сада важан тачан низ помоћу којег ћемо у примеру моћи да израчунамо Пикарову групу. За групе које се у њој појављују, користимо мултипликативну нотацију. Са $R^\times$ означавамо групу инвертибилних елемената прстена R. За доказ наредне теореме погледати [7] и [10].

Теорема 2.2. *За Милноров квадрат*

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
R/I \arrow[r, "\bar{f}"] & S/J
\end{tikzcd}
$$

уколико је R-модул $M = (M_1, M_2, \phi)$ настао Милноровим ушивањем важи следеће :

1) *Ако је M_1 коначно генерисан пројективан S-модул и M_2 коначно генерисан пројективан R/I-модул, тада је и M коначно генерисан пројективан R-модул.*

2) *$M \otimes_R S \cong M_1$ и $M \otimes_R R/I \cong M_2$.*

3) *Постоји тачан низ Абелових група*

$$1 \longrightarrow R^\times \xrightarrow{\quad\Delta\quad} S^\times \times (R/I)^\times \xrightarrow{\quad D\quad} (S/J)^\times \xrightarrow{\quad\partial\quad}$$

$$\xrightarrow{\quad\partial\quad} \operatorname{Pic}(R) \xrightarrow{\ \Delta\ } \operatorname{Pic}(S) \times \operatorname{Pic}(R/I) \xrightarrow{\ D\ } \operatorname{Pic}(S/J)$$

при чему су прва два хомоморфизма одређена са

$$\Delta(r) = (f(r), [r])$$

$$D(s, [r]) = [s][f(r)]^{-1}$$

и аналогно за последња два.

Тачан низ из претходне теореме повезује групе инвертибилних елемената прстена у Милноровом квадрату са њиховим Пикаровим групама. Наведимо како се конструише хомоморфизам

$$\partial : (S/J)^\times \to \operatorname{Pic}(R)$$

у том тачном низу. За $\beta \in (S/J)^\times$, $\partial(\beta) = [(S, R/I, \phi)]$ где је изоморфизам ϕ одређен множењем са β, односно ϕ је композиција

$$S \otimes_S S/J \xrightarrow{h_1} S/J \xrightarrow{\times\beta} S/J \xrightarrow{h_2^{-1}} R/I \otimes_{R/I} S/J$$

где су $h_1(s \otimes [s']) = [ss']$ и $h_2^{-1}([s]) = 1 \otimes [s]$ природни изоморфизми S/J-модула. Сходно томе, имамо да је

$$\phi(1 \otimes [s]) = 1 \otimes \beta [s].$$

Докажимо сада једну веома корисну лему.

Лема 2.1. *Нека за прстене важи $R \subset S$, I је кондуктор овог раширења и $s_0 \in S$ је такав да $[s_0] \in (S/I)^\times$. Ако s_0 није делитељ нуле, тада је $\partial([s_0]) = \langle s_0 \rangle \cap R$ где је $\langle s_0 \rangle$ главни идеал у S генерисан са s_0.*

Доказ. Означимо $[s_0] = \beta$. Пођимо од дијаграма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "\psi_1"] \\ R/I \arrow[r, "\psi_2"] & S \otimes_S S/I \end{tikzcd}$$

где је $\psi_1(s) = s \otimes 1 = 1 \otimes [s]$ односно $\psi_2([r]) = \phi^{-1}([r] \otimes 1)$ при чему је ϕ задато као композиција

$$S \otimes_S S/I \xrightarrow{h_1} S/I \xrightarrow{\times \beta} S/I \xrightarrow{h_2^{-1}} R/I \otimes_{R/I} S/I$$

Означимо сада са $B : S/I \to S/I$ изоморфизам задат множењем елементом β. Његов инверз јесте множење са β^{-1}. Сходно томе, можемо рачунати, за $r \in R$

$$\psi_2([r]) = \phi^{-1}([r] \otimes 1) = \left(h_2^{-1} \circ B \circ h_1\right)^{-1}([r] \otimes 1) = \left(h_1^{-1} \circ B^{-1} \circ h_2\right)([r] \otimes 1)$$

односно пошто је $h_2([r] \otimes 1) = [r]$ јер је хомоморфизам f у Милноровом квадрату инклузија, то имамо даље да је

$$\psi_2([r]) = h_1^{-1}\left(B^{-1}([r])\right) = h_1^{-1}\left(\beta^{-1}[r]\right) = 1 \otimes \beta^{-1}[r].$$

Покажимо сада да је идеал прстена R, $J = \langle s_0 \rangle \cap R$, повлачење овог дијаграма ако s_0 није делитељ нуле. Посматрамо

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S \arrow[d, "\psi_1"] \\ R/I \arrow[r, "\psi_2"] & S \otimes_S S/I \end{tikzcd}$$

где су $f_1(rs_0) = r$ односно $f_2(j) = [j]$ за $rs_0, j \in J$. Пресликавање f_1 је добро дефинисано јер ако је $j = r_1 s_0 = r_2 s_0$ то пошто s_0 није прави делитељ нуле следи да је $r_1 = r_2$. Дијаграм комутира јер је за $j = rs_0 \in J$ испуњено

$$\psi_1(f_1(rs_0)) = \psi_1(r) = 1 \otimes [r]$$

док је са друге стране

$$\psi_2(f_2(rs_0)) = \psi_2([rs_0]) = 1 \otimes [s_0]^{-1}[rs_0] = 1 \otimes [s_0]^{-1}[s_0][r] = 1 \otimes [r].$$

Претпоставимо још да важи $\psi_1(s) = \psi_2([r])$ односно по претходно одређеном да је

$$1 \otimes [s] = 1 \otimes [s_0]^{-1}[r].$$

Када на ово применимо изоморфизам h_1 добијамо да је

$$[s] = [s_0]^{-1} [r]$$

испуњено у S/I односно важи да је

$$[s_0] [s] = [s_0 s] = [r]$$

односно постоји $i \in I$ тако да важи

$$r = ss_0 + i.$$

Одавде следи најпре да $r - i = ss_0 \in J$ одакле следи да је $f_1 (ss_0) = s$ и $f_2 (ss_0) = [ss_0] = [r]$. Уколико и елемент $s_1 s_0$ испуњава да је $f_1 (s_1 s_0) = f_1 (ss_0) = s$ и $f_2 (s_1 s_0) = f_2 (ss_0)$ то из дефиниције хомоморфизма f_1 следи да је $s_1 = s$ а самим тим и $s_1 s_0 = ss_0$. $\square$

Пример 2.5. Нека је K поље. Нека је

$$R = K [X, Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle$$

и одредимо његову Пикарову групу. Нека је $S = K [t]$. Покажимо прво да је R изоморфан потпрстену прстена S односно прецизније важи

$$R = K [X, Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle \cong K \left[t^2, t^3\right].$$

Заиста, пођимо од хомоморфизма прстена (штавише, хомоморфизма K-алгебри)

$$f : K [X, Y] \to K [t]$$

дефинисаног са

$$f (p) = p \left(t^2, t^3\right)$$

односно f је одређен са $X \mapsto t^2$ и $Y \mapsto t^3$. Слика овог хомоморфизма јесте $K \left[t^2, t^3\right]$ па одредимо још његово језгро. Пошто је

$$f \left(Y^2 - X^3\right) = \left(t^3\right)^2 - \left(t^2\right)^3 = 0$$

то важи инклузија

$$\langle Y^2 - X^3 \rangle \subset \ker (f)$$

па покажимо још и другу инклузију. Уочимо стога $p \in \ker (f)$ односно полином за који важи $p \left(t^2, t^3\right) = 0$. Уколико је полином $p \in K [X]$ то је претходни услов еквивалентан са $p \left(t^2\right) = 0$ одакле мора бити $p = 0$ па претпоставимо стога да је p полином по Y са коефицијентима у $K [X]$. Пошто је полином $Y^2 - X^3$ моничан полином по Y са коефицијентима у $K [X]$ то можемо поделити p са њим односно постоје полиноми $a, b, r \in K [X]$ такви да важи

$$p = \left(Y^2 - X^3\right) r (X) + a (X) Y + b (X).$$

Сходно томе важи да

$$a (X) Y + b (X) = p - \left(Y^2 - X^3\right) r (X) \in \ker (f)$$

односно
$$a\left(t^2\right)t^3+b\left(t^2\right)=0.$$
Полином $b\left(t^2\right)$ има ненула коефицијенте евентуално уз парне степене од t. Са друге стране, $a\left(t^2\right)t^3=\left(t^2a\left(t^2\right)\right)t$ има ненула коефицијенте евентуално уз непарне степене од t. Стога из једнакости $a\left(t^2\right)t^3+b\left(t^2\right)=0$ мора следити да је $a\left(t^2\right)t^3=0$ и $b\left(t^2\right)=0$ одакле је $a=b=0$. Тако закључујемо да $p=\left(Y^2-X^3\right)r\left(X\right)\in\langle Y^2-X^3\rangle$ што показује да је
$$\ker\left(f\right)=\langle Y^2-X^3\rangle$$
и комплетира доказ.

У наставку радимо са прстеном $K\left[t^2,t^3\right]$. Кондуктор раширења прстена $R=K\left[t^2,t^3\right]\subset K\left[t\right]=S$ јесте идеал $I=\langle t^2\rangle$, при чему напомињемо још једном да је ово главни идеал у прстену S који је садржан у прстену R. За моном облика t^{2r} је испуњено
$$t^2t^{2r}=t^{2r+2}=t^{2(r+1)}$$
што је полином по t^2 па припада прстену $K\left[t^2,t^3\right]$ док је за моном облика t^{2r+1} испуњено
$$t^2t^{2r+1}=t^{2r+3}=t^{2r}t^3$$
што је полином по t^2,t^3 па припада прстену $K\left[t^2,t^3\right]$. Следи да је $t^2t^r\in K\left[t^2,t^3\right]$ па је и за произвољан полином $p\in K\left[t\right]$ испуњено $t^2p\in K\left[t^2,t^3\right]$. Сходно томе, закључујемо да је t^2 у кондуктору па је и идеал $\langle t^2\rangle$ садржан у кондуктору. Ако они не би били једнаки, онда би морало важити да је $\langle t\rangle$ садржано у кондуктору што из $t\notin K\left[t^2,t^3\right]$ није тачно.

Тако добијамо Милноров квадрат
$$\begin{array}{ccc} K\left[t^2,t^3\right] & \longrightarrow & K\left[t\right] \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle & \longrightarrow & K\left[t\right]/\langle t^2\rangle \end{array}.$$
Прстен $K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle$ изоморфан је прстену K. Сходно томе, прстени $K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle$, $K\left[t\right]$ су главни домени па су њихове Пикарове групе тривијалне. Издвојимо део тачног низа из теореме 2.2
$$\left(K\left[t\right]\right)^\times\times\left(K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle\right)^\times\xrightarrow{D}\left(K\left[t\right]/\langle t^2\rangle\right)^\times\xrightarrow{\partial}\operatorname{Pic}\left(K\left[t^2,t^3\right]\right)\longrightarrow 1$$
из којег закључујемо да је хомоморфизам ∂ епиморфизам. Посматрајмо сада прстен
$$K\left[t\right]/\langle t^2\rangle=\{at+b:a,b\in K\}$$
при чему је множење одређено са
$$\left(a_1t+b_1\right)\left(a_2t+b_2\right)=\left(a_1b_2+b_1a_2\right)t+b_1b_2.$$
Тада је елемент $at+b\in K\left[t\right]/\langle t^2\rangle$ инвертибилан ако и само ако постоји елемент a_1t+b_1 такав да је $ab_1+ba_1=0$ и $bb_1=1$. Сходно томе важи да $b\in K^\times$ па имамо још да је $a_1=-\frac{ab_1}{b}$ односно важи да је
$$\left(K\left[t\right]/\langle t^2\rangle\right)^\times=\left\{at+b:b\in K^\times\right\}.$$

Даље, $(K[t])^{\times} = K^{\times}$ са природном идентификацијом односно $\left(K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle\right)^{\times} = K^{\times}$. Додатно,

$$D\left((K[t])^{\times} \times \left(K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle\right)^{\times}\right) = \left\{b : b \in K^{\times}\right\}$$

односно у слици су тачно инвертибилни елементи поља K што тривијално следи јер су инвертибилни елементи у $(K[t])^{\times} \times \left(K\left[t^2,t^3\right]/\langle t^2\rangle\right)^{\times}$ облика (u,v) при чему $u \in K^{\times}$, $v \in K^{\times}$ и они се са D сликају у uv^{-1} што је из $K^{\times}$ док за $v = 1$ покривамо све инвертибилне у K. Специјално, ако је $a = 0$ тада је $\partial(b) = 1 \in \operatorname{Pic}(R)$. Сходно томе, елемент $at + b \in (K[t])^{\times}$ испуњава

$$\partial(at+b) = \partial\left(b\left(1+\frac{a}{b}t\right)\right) = \partial\left(1+\frac{a}{b}t\right)$$

односно закључујемо да је

$$\operatorname{Pic}(R) = \{\partial(1+at) : a \in K\}.$$

Посматрајмо сада

$$f : K \to \operatorname{Pic}(R)$$

дефинисано са

$$f(a) = \partial(1-at)$$

при чему посматрамо $1 - at \in K[t]/\langle t^2\rangle$. Ово је по претходном бијекција, па покажимо још да је хомоморфизам група при чему на домену посматрамо операцију сабирања. Заиста, за $a, b \in K$ имамо да важи

$$f(a+b) = \partial(1-at-bt) = \partial\left(1-at-bt+abt^2\right)$$

па како важи $(1-at)(1-bt) = 1-at-bt+abt^2$ имамо да је

$$f(a+b) = \partial((1-at)(1-bt)) = \partial(1-at)\,\partial(1-bt) = f(a)\,f(b).$$

Дакле,

$$\operatorname{Pic}(R) \cong K.$$

Одредимо сада ближе како изгледају класе инвертибилних модула $f(a) = \partial(1-at) \in \operatorname{Pic}(R)$ за $a \in K^{\times}$. Пошто је $S = K[t]$ домен, то ниједан ненула елемент није делитељ нуле, односно можемо применити претходну лему по којој је за $a \in K^{\times}$ испуњено

$$f(a) = \beta_a = \langle 1-at\rangle \cap R.$$

Покажимо сада да је

$$\beta_a = \langle 1-a^2t^2, t^2-at^3\rangle$$

при чему је ово прави идеал у прстену R. Прво, пошто је

$$1-a^2t^2 = (1-at)(1+at)$$

и

$$t^2-at^3 = t^2(1-at)$$

то важи инклузија $\langle 1-a^2t^2, t^2-at^3\rangle \subset \beta_a$ па покажимо још другу инклузију. Нека је стога $p \in K[t]$ такав да је $p\cdot(1-at) \in K\left[t^2,t^3\right]$. Пошто у прстену R нема полинома степена један, то полином p не може бити степена 0 односно константа. Полином p запишимо као збир линеарног дела и остатка

$$p(t) = ut + v + t^2 q$$

па имамо да је

$$p \cdot (1 - at) = \left(ut + v + t^2 q\right)(1 - at) = \left(t^2 (1 - at)\right) q + (ut + v)(1 - at)$$

Покажимо сада индукцијом по степену полинома p да тада $p \cdot (1 - at) \in \langle 1 - a^2t^2, t^2 - at^3 \rangle$. Пошто је линеарни део производа $p \cdot (1 - at)$ једнак линеарном делу од

$$(ut + v) \cdot (1 - at) = v + (u - av) \cdot t - uat^2 \in R$$

то следи да коефицијент уз t мора бити нула односно важи $u = av$. Сходно томе важи

$$ut + v = avt + v = v(1 + at)$$

одакле је

$$(ut + v) \cdot (1 - at) = v(1 + at) \cdot (1 - at) = v\left(1 - a^2t^2\right)$$

одакле следи да важи да $t^2 (1 - at) q \in \langle 1 - a^2t^2, t^2 - at^3 \rangle$. Ако је $v \in K^\times$ тада су u, v различити од нуле па је степен полинома $t^2 q$ строго мањи од степена полинома p па по индукцијској хипотези следи да $t^2 q \in \langle 1 - a^2t^2, t^2 - at^3 \rangle$. Ако је $u = v = 0$ односно $p = t^2 q$ тада имамо да је

$$p \cdot (1 - at) = t^2 (1 - at) q = q \cdot \left(t^2 - at^3\right) \in R.$$

Запишимо сада полином q у облику

$$q = (1 + at) \cdot r + \lambda$$

за $\lambda \in K$ и полином r. Тада је

$$p \cdot (1 - at) = t^2 ((1 + at) r + \lambda)(1 - at) = (1 + at) \cdot (1 - at) \cdot \left(t^2 r\right) + \lambda t^2 (1 - at)$$

односно за $A = t^2 r \in R$ (јер је t^2 елемент кондуктора) важи

$$p \cdot (1 - at) = \left(1 - a^2t^2\right) A + \lambda \left(t^2 - at^3\right)$$

одакле

$$p \cdot (1 - at) \in \langle 1 - a^2t^2, t^2 - at^3 \rangle$$

што смо и желели да покажемо. $\square$

У претходном примеру смо показали да ненула елементу $a \in K$ при изоморфизму група $f : K \to \mathrm{Pic}\left(K\left[t^2, t^3\right]\right)$ одговара класа инвертибилног модула $\beta_a = \langle 1 - a^2t^2, t^2 - at^3 \rangle$ који је идеал прстена $K\left[t^2, t^3\right]$. Када посматрамо прстен $R = K[X, Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle$ изоморфан прстену $K\left[t^2, t^3\right]$, важи $K \cong \mathrm{Pic}(R)$ при чему ненула елементу $\alpha \in K$ одговара класа инвертибилног модула

$$\mathfrak{P}_\alpha = \langle 1 - \alpha^2 X, X - \alpha Y \rangle.$$

Напоменимо да ћемо класу полинома p у прстену R означавати такође са p при чему водимо рачуна о томе када два полинома одређују исту класу. Опишимо сада још мало идеал $\mathfrak{P}_a$. Посматрамо скуп тачака

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in K \times K : y^2 - x^3 = 0\right\}.$$

Свака тачка $A \in \Gamma$ је облика $A = \left(\alpha^2, \alpha^3\right)$ за јединствено $\alpha \in K$. Заиста, ако је $x = 0$ тада је и $y = 0$ па је и $\alpha = 0$. У супротном, ако је x различит од нуле, поставимо $\alpha = \frac{y}{x} \in K$ па тада имамо да је

$$\alpha^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$$

и аналогно

$$\alpha^3 = \frac{y^3}{x^3} = \frac{yy^2}{x^3} = y.$$

За ненула $\alpha \in K$ означимо тачку $A_\alpha = \left(\alpha^{-2}, \alpha^{-3}\right) \in \Gamma$ и посматрајмо следећи епиморфизам

$$\phi_\alpha : K\left[X, Y\right] / \langle Y^2 - X^3 \rangle \to K$$

дефинисан са

$$\phi_\alpha\left(p\right) = p\left(A_\alpha\right)$$

и покажимо да је испуњено

$$\ker\left(\phi_\alpha\right) = \mathfrak{P}_\alpha$$

односно ненула елементу $\alpha \in K$ одговара тачно максимални идеал полиномских функција $\Gamma \to K$ које ишчезавају у тачки A_α. Пошто је $\left(1 - \alpha^2 X\right)\left(A_\alpha\right) = \left(X - \alpha Y\right)\left(A_\alpha\right) = 0$ то је $\mathfrak{P}_\alpha \subset \ker\left(\phi_\alpha\right)$. Претпоставимо стога да је $p \in \ker\left(\phi_\alpha\right)$. Ако је p полином по X то услов да је $0 = p\left(A_\alpha\right) = p\left(\alpha^{-2}\right)$ по Безуовом ставу имплицира да је за неки полином $r \in K\left[X\right]$

$$p = \left(X - \alpha^{-2}\right) r\left(X\right) = -\alpha^{-2}\left(1 - \alpha^2 x\right) r\left(X\right) \in \mathfrak{P}_\alpha.$$

Претпоставимо сада да је p полином по Y са коефицијентима у $K\left[X\right]$. Као у доказу претходне леме, поделимо са остатком полином p моничним (по Y) полиномом $Y^2 - X^3$ па је за неке полиноме $a, b, r \in K\left[X\right]$ испуњено

$$p = \left(Y^2 - X^3\right) r\left(X\right) + a\left(X\right) Y + b\left(X\right)$$

одакле следи да када пређемо на прстен R добијамо да је

$$p = a\left(X\right) Y + b\left(X\right).$$

Поделимо сада са остатком полиноме a, b полиномом $1 - \alpha^2 X$ односно постоје полиноми $c, d \in K\left[X\right]$ и λ_1, λ_2 такви да важи

$$a\left(X\right) Y + b\left(X\right) = \left(\left(1 - \alpha^2 X\right) c + \lambda_1\right) Y + \left(1 - \alpha^2 X\right) d + \lambda_2$$

одакле је

$$a\left(X\right) Y + b\left(X\right) = \left(cY + d\right)\left(1 - \alpha^2 X\right) + \left(\lambda_1 Y + \lambda_2\right)$$

одакле и $\lambda_1 Y + \lambda_2 \in \ker\left(\phi_\alpha\right)$ па покажимо још да $\lambda_1 Y + \lambda_2 \in \mathfrak{P}_\alpha$. Услов да $\lambda_1 Y + \lambda_2 \in \ker\left(\phi_\alpha\right)$ имплицира да је

$$\lambda_1 \alpha^{-3} + \lambda_2 = 0$$

одакле је
$$\lambda_2 = -\lambda_1 \alpha^{-3}$$
па је
$$\lambda_1 Y + \lambda_2 = -\lambda_1 \left(\alpha^{-3} - Y\right).$$
Пошто је у прстену R испуњено
$$1 = \alpha^2 X$$
то је такође
$$\alpha^{-3} = \alpha^{-3}\alpha^2 X = \alpha^{-1} X$$
па је коначно
$$\lambda_1 Y + \lambda_2 = -\lambda_1 \left(\alpha^{-1} X - Y\right) = -\lambda_1 \alpha^{-1} (X - \alpha Y) \in \mathfrak{P}_\alpha.$$
одакле $p \in \mathfrak{P}_\alpha$ што смо и желели да покажемо.

2.3 Дедекиндови домени

Уводимо сада класу прстена за коју је Пикарова група нарочито интересантна (видети и [1], [7], [14], [10], [15]).

Дефиниција 2.5. Комутативан домен са јединицом R је *Дедекиндов* уколико испуњава следеће услове

1) Прстен R је Нетерин.

2) Прости идеали у R различити од нуле су максимални.

3) Интегрално је затворен.

Фиксирајмо сада ознаку Q за поље разломака Дедекиндовог домена R.

Пример 2.6. Главни домени су основни и најједноставнији примери Дедекиндових домена. Поља су тривијални примери Дедекиндових домена, па се углавном у дефиницији наглашава да прстен R није поље (видети [1], [15]). □

Пример 2.7. Уколико је $\mathbb{F}$ алгебарско бројевно поље, односно коначно раширење поља $\mathbb{Q}$, прстен $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ алгебарских целих бројевног поља $\mathbb{F}$ који је интегрално затворење прстена $\mathbb{Z}$ у пољу $\mathbb{F}$ је Дедекиндов домен, и њега проучава алгебарска теорија бројева (видети [7], [15]). □

Нека је R комутативан домен са јединицом. На скупу његових идеала уводимо следећу релацију
$$\mathfrak{a}|\mathfrak{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \mathfrak{c} \triangleleft R)\,(\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c})$$
и тада кажемо да идеал $\mathfrak{a}$ *дели* идеал $\mathfrak{b}$. На десној страни еквиваленције је производ идеала односно
$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \left\{\sum b_i c_i : b_i \in \mathfrak{b}, c_i \in \mathfrak{c}\right\}$$
јесте идеал генерисан производима елемената из ових идеала. Ова операција је асоцијативна, комутативна и за неутрал има идеал R (видети [15]). Ова релација уопштава дељивост бројева, јер када је прстен R главни домен, тада идеал $\langle a\rangle$ дели идеал $\langle b\rangle$ ако и само ако елемент a дели елемент b. За доказ наредне теореме погледати [7], [15].

Теорема 2.3. *Комутативан домен са јединицом је Дедекиндов домен ако и само ако за свака два идеала $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ важи да $\mathfrak{a}|\mathfrak{b}$ ако и само ако је $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.*

Означимо са $\mathrm{Cl}\,(R)$ скуп класа изоморфности ненула идеала прстена R, где су два идеала изоморфна ако су изоморфни као R-модули. За идеал $\mathfrak{a}$ прстена R, са $\{\mathfrak{a}\}$ означавамо одговарајућу класу у $\mathrm{Cl}\,(R)$. На том скупу уводимо операцију са

$$\{\mathfrak{a}\}\{\mathfrak{b}\} = \{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\}.$$

Ова операција је добро дефинисана (видети [7]) асоцијативна и комутативна, јер је то одговарајућа операција на скупу идеала прстена R, са неутралом $\{R\}$. Класа $\{R\}$ садржи тачно класе главних идеала који су генерисани ненула елементима.

Уочимо сада ненула идеал $\mathfrak{a}$ у R. Тада постоји елемент $a_0 \in \mathfrak{a}$ различит од нуле па је $\langle a_0 \rangle \subset \mathfrak{a}$. По теореми 2.3 тада постоји идеал $\mathfrak{b}$ такав да је $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \langle a_0 \rangle \cong R$. Стога можемо формулисати наредну теорему.

Теорема 2.4. *Скуп* $\mathrm{Cl}\,(R)$ *у односу на уведену операцију множења идеала је Абелова група коју називамо класна група идеала Дедекиндовог домена R.*

За еквивалентне дефиниције класне групе идеала видети [9], [15]. Покажимо сада једну лему која ће нам требати за доказ наредне теореме (видети и [5]).

Лема 2.2. *Нека је прстен R домен са пољем разломака Q и M ненула R-модул садржан у Q. Тада важи*

1) *Сваки елемент $x \in M \otimes_R Q$ је облика $m \otimes t$ за неке $m \in M, t \in Q$.*

2) *Постоји изоморфизам R-модула $f : M \otimes_R Q \to Q$ такав да је $f\,(m \otimes t) = mt$.*

Доказ. Уочимо прво произвољно $x \in M \otimes_R Q$. Постоје $m_1, \dots, m_l \in M$ и $t_1, \dots, t_l \in Q$ такви да је

$$x = m_1 \otimes t_1 + \ldots + m_l \otimes t_l.$$

Означимо сада $m_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, m_l = \frac{a_l}{b_l}$ и претпоставимо да су сви они ненула и поставимо елемент $a = a_1 \cdots a_l \in R$ који сходно томе није нула. Означимо $c_1 = \frac{a}{a_1}, \dots, c_l = \frac{a}{a_l} \in R$. Тада имамо да је $a = a_i c_i = b_i c_i m_i \in M$ за све $i = 1, \dots, l$. Пошто је $b_i c_i$ различито од нуле,то постоје $q_1, \dots, q_l \in Q$ такви да је $t_i = b_i c_i q_i$ за све $i = 1, \dots, l$. Сада рачунамо:

$$m_i \otimes t_i = m_i \otimes b_i c_i q_i = b_i c_i m_i \otimes q_i = a \otimes q_i$$

за све $i = 1, \dots, l$. Сходно томе је

$$m_1 \otimes t_1 + \ldots + m_l \otimes t_l = a \otimes q_1 + \ldots + a \otimes q_l = a \otimes (q_1 + \ldots + q_l)$$

што показује први део тврђења.

Уочимо сада R-билинеарно пресликавање $B : M \times Q \to Q$ дефинисано са $B\,(m, t) = mt$ које потом индукује R-линеарно $f : M \otimes_R Q \to Q$ одређено са $f\,(m \otimes t) = tm$ и покажимо да је оно изоморфизам. Пошто је модул M различит од нуле, то постоји елемент $m \in M$ различит од нуле. Нека је $t \in Q$ произвољан. Тада је $f\left(m \otimes \frac{t}{m}\right) = \frac{t}{m} m = t$ односно f је епиморфизам. Претпоставимо још да је $f\,(x) = 0$. По претходном делу тврђења, постоје $m \in M, t \in Q$ такви да је $x = m \otimes t$ па је

$$f\,(x) = f\,(m \otimes t) = tm = 0$$

одакле је $t = 0$ или $m = 0$ јер је Q поље, одакле је и $x = 0$ што комплетира доказ. $\square$

Први део леме заправо каже да су сви тензори у $M \otimes_R Q$ ранга један. Тврђење леме је специјално испуњено за ненула идеале прстена R када их посматрамо као R-модуле у Q при природном мономорфизму $i_R : R \to Q$, $i_R(r) = \frac{r}{1}$.

Теорема 2.5. *Ако је R Дедекиндов домен, тада је R-модул M инвертибилан ако и само ако је изоморфан идеалу прстена R. Додатно, за идеале $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ важи изоморфизам R-модула*

$$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Доказ. Претпоставимо прво да је M инвертибилан R-модул. По теореми 2.1, M је тада коначно генерисан пројективан R-модул ранга $\dim_Q (M \otimes_R Q) = 1$. Коначно генерисани пројективни модули су равни по теореми 1.2 па ако посматрамо мономорфизам R-модула $R \to Q$ и на њега применимо тензориски производ са M добијамо

$$M \cong M \otimes_R R \to M \otimes_R Q \cong Q$$

при чему је $M \otimes_R R \to M \otimes_R Q$ мономорфизам. Закључујемо стога да је M изоморфан R-модулу N садржаном у пољу разломака Q. Пошто је M коначно генерисан R-модул, то је и N коначно генерисан са скупом генератора

$$\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_l}{b_l}$$

па ако пређемо на заједнички именилац добијамо скуп генератора

$$\frac{n_1}{B}, \ldots, \frac{n_l}{B}.$$

Стога је

$$N = \left\{ r_1 \frac{n_1}{B} + \ldots + r_l \frac{n_l}{B} : r_1, \ldots, r_l \in R \right\} = \frac{1}{B} \left\{ r_1 n_1 + \ldots + r_l n_l : r_1, \ldots, r_l \in R \right\}$$

па ако издвојимо идеал $\mathfrak{a} = \{ r_1 n_1 + \ldots + r_l n_l : r_1, \ldots, r_l \in R \} = \langle n_1, \ldots, n_l \rangle$ видимо да пресликавање

$$f : \mathfrak{a} \to N$$

одређено са $f(x) = \frac{x}{B}$ дефинише изоморфизам R-модула N и (идеала) $\mathfrak{a}$ што показује да су инвертибилни R-модули изоморфни идеалима у R.

Нека је сада $\mathfrak{a}$ (ненула) идеал прстена R. Покажимо прво да је $\mathfrak{a}$ пројективан (коначно је генерисан јер је прстен R Нетерин). Пошто је прстен R Дедекиндов, то постоји идеал $\mathfrak{b}$ такав да је $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = R$. Сходно томе, постоје елементи $a_1, \ldots, a_l \in \mathfrak{a}$ и $b_1, \ldots, b_l \in \mathfrak{b}$ такви да је $a_1 b_1 + \ldots + a_l b_l = 1$. Посматрамо сада хомоморфизам

$$f : R^l \to \mathfrak{a}$$

дефинисан са $f(r_1, \ldots, r_l) = r_1 a_1 + \ldots + r_l a_l$ и хомоморфизам

$$s : \mathfrak{a} \to R^l$$

дефинисан са $s(x) = (b_1 x, \ldots, b_l x)$. Због $a_1 b_1 + \ldots + a_l b_l = 1$ имамо да је $f \circ s = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}}$ одакле је $\mathfrak{a}$ пројективан R-модул.

Ако још покажемо да постоји изоморфизам $\mathfrak{ab} \cong \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ то ће следити и да је $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \cong R$ што ће комплетирати доказ. Пођимо стога од изоморфизма

$$f : \mathfrak{a} \otimes_R Q \to Q$$

одређеног са $f\left(a \otimes \frac{p}{q}\right) = \frac{ap}{q}$ из претходне леме. Нека је $i : \mathfrak{b} \to Q$ мономорфизам R-модула $i(b) = \frac{b}{1}$. Пошто је $\mathfrak{a}$ раван R-модул, када тензоришемо i са $\mathfrak{a}$ добијамо мономорфизам $i \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \otimes Q$. Стога је модул $\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b}$ изоморфан својој слици при композицији

$$\phi : \mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \otimes_R Q \to Q$$

где је други морфизам f. Коначно, пошто је по дефиницији

$$\phi(a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_l \otimes b_l) = a_1 b_1 + \ldots + a_l b_l$$

то следи изоморфизам $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \cong \mathfrak{ab}$. □

Као директну последицу добијамо следећу

Теорема 2.6. *Ако је прстен R Дедекиндов, пресликавање*

$$\phi : \mathrm{Cl}(R) \to \mathrm{Pic}(R)$$

одређено са $\phi(\{\mathfrak{a}\}) = [a]$ јесте добро дефинисано и остварује изоморфизам између класне групе идеала и Пикарове групе прстена R.

Израчунавање класне групе идеала Дедекиндовог домена је у општем случају тешко. Показује се да је класна група идеала Дедекиндовог домена $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ за алгебарско раширење $\mathbb{F}$ поља $\mathbb{Q}$ коначна група (видети [15]).

2.4 Крулови домени

Може се поставити природно питање да ли за Абелову групу G постоји комутативан прстен са јединицом R такав да је $\mathrm{Pic}(R) \cong G$. Прилично неочекивано, одговор је потврдан и заправо за сваку Абелову групу G постоји Дедекиндов домен R такав да је $\mathrm{Cl}(R) \cong G$. У овом одељку скицираћемо доказ овог тврђења које је показао Клаборн (видети [3]). За почетак овог одељка, уводимо класу прстена која је извесно уопштење Дедекиндових домена. Наше излагање прати [6] и изостављени докази и детаљи се могу тамо наћи.

Дефиниција 2.6. Комутативан домен са јединицом R са пољем разломака је *Крулов домен* уколико постоји фамилија $\{V_i\}_{i \in I}$ прстена са дискретном валуацијом садржаних у пољу K таква да је

$$R = \bigcap_{i \in I} V_i$$

и за свако $f \in R \setminus \{0\}$ важи да је инвертибилан у свим осим коначно много V_i.

За домен R, са $\mathrm{Spec}^{(1)}(R)$ ћемо означити скуп простих идеала висине 1, односно минималних ненула простих идеала. За прост идеал p домена R, локализацију R_p природно видимо као потпрстен његовог поља разломака Q. Тада важи следећа теорема.

Теорема 2.7. *Домен R је Крулов домен ако и само ако важи да је за сваки $p \in \mathrm{Spec}^{(1)}(R)$ локализација R_p прстен са дискретном валуацијом,*

$$R = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}^{(1)}(R)} R_p$$

и сваки $f \in R \setminus \{0\}$ садржан је у највише коначно много $p \in \mathrm{Spec}^{(1)}(R)$.

Пример 2.8. Ако је R Крулов домен и $T \subset \mathrm{Spec}^{(1)}(R)$ подскуп тада је на основу претходне теореме и прстен

$$A = \bigcap_{p \in T} R_p$$

такође Крулов домен за који кажемо да је потпресек домена R. За просте идеале висине један из $\mathrm{Spec}^{(1)}(R) \setminus T$ кажемо да су *изостављени* при конструкцији домена A.

Пример 2.9. Прстен R је Дедекиндов домен ако и само ако је Крулов домен у којем је сваки ненула прост идеал максималан. □

Круловим доменима ћемо сада придружити једну групу која у случају Дедекиндових домена одговара класној групи идеала. Најпре уводимо следећи појам (видети [6]).

Дефиниција 2.7. *Разломачки идеал* домена R са пољем разломака K је ненула R-модул M садржан у коначно генерисаном R-модулу $N \subset K$.

Разломачки идеали домена R су дакле ненула подмодули коначно генерисаних R-модула садржаних у његовом пољу разломака K. То су специјално и сви коначно генерисани ненула R-модули у K. За R-модуле $M, N \subset K$ уводимо

$$M : N = \{x \in K : xN \subset M\}.$$

као и производ

$$MN = \left\{ \sum_i m_i n_i : m_i \in M, n_i \in N \right\}.$$

Дефиниција 2.8. Разломачки идеал M домена R се назива *дивизорски идеал* уколико је испуњено $M = R : (R : M)$.

Напомена. Показује се да је домен R Дедекиндов домен ако и само ако су сви разломачки идеали дивизорски односно ако и само ако су сви разломачки идеали инвертибилни.

Теорема 2.8. *Нека је R Крулов домен са пољем разломака K. На скупу $D(R)$ свих дивизорских разломачких идеала домена R добро је дефинисана операција $(M, N) \mapsto R : (R : MN)$ у односу на коју $D(R)$ постаје Абелова група. Додатно, пресликавање $f : K^\times \to D(R)$ дефинисано са $f(x) = xR$ јесте хомоморфизам група.*

Слику хомоморфизма f из претходне теореме означавамо са $\mathrm{Prin}(R)$ и називамо групом *главних* дивизорских разломачких идеала прстена R.

Дефиниција 2.9. *Класна група дивизора* Круловог домена R је количничка група $\mathrm{Cl}(R) = D(R) / \mathrm{Prin}(R)$.

Напомена. Уколико је R Дедекиндов домен, класна група дивизора и класна група идеала се природно идентификују.

Наредну значајну теорему је показао Нагата (видети [6]).

Теорема 2.9. *Нека је R Крулов домен и A потпресек од R по $T \subset \operatorname{Spec}^{(1)}(R)$. Тада инклузија $R \to A$ индукује епиморфизам $\operatorname{Cl}(R) \to \operatorname{Cl}(A)$ чије је језгро генерисано класама изостављених идеала $\operatorname{Spec}^{(1)}(R) \setminus T$.*

Нека је $p \in \operatorname{Spec}^{(1)}(R)$ за Крулов домен R и M разломачки идеал. По теореми 2.7, локализација R_p је тада прстен са дискретном валуацијом одакле следи да постоји јединствени ненегативан број r такав да је $M_p = (pR_p)^r$ где је заправо на десној страни r-ти степен максималног идеала у прстену R_p. Тада поставимо $v_p(M) = r$. Такође, по теореми 2.7, $v_p(M) = 0$ за све осим коначно много $p \in \operatorname{Spec}^{(1)}(R)$. Показује се да је за разломачке идеале M, N испуњено и $v_p(MN) = v_p(M) + v_p(N)$.

Дефиниција 2.10. *Симболички n-ти степен* од $p \in \operatorname{Spec}^{(1)}(R)$ јесте разломачки идеал

$$p^{(n)} = \{x \in K : v_p(xK) \geqslant n\}.$$

На значај симболичког степена указује следећа

Лема 2.3. *За разломачки идеал M Круловог домена R, важи да је*

$$R : (R : M) = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}^{(1)}} p^{(v_p(M))}.$$

Из леме специјално следи да је за дивизорски разломачки идеал M испуњено

$$M = \bigcap_p p^{(v_p(M))}$$

одакле је операција на $D(R)$ задата са $(M, N) \mapsto \bigcap_p p^{(n_p)}$ где је $n_p = v_p(MN)$.

Након увођења неопходних појмова и прелиминарних резултата, приступимо скицирању доказа теореме Клаборна. У првом кораку наводимо наредну теорему, по којој за сваки Крулов домен постоји Дедекиндов домен са изоморфном класном групом дивизора. Напоменимо да је не наводимо у пуној општости.

Теорема 2.10. *Нека је A Крулов домен. Тада постоји Дедекиндов домен B такав да је $\operatorname{Cl}(A) \cong \operatorname{Cl}(B)$.*

Сходно томе, довољно је показати да за произвољну Абелову групу G постоји Крулов домен R такав да је $\operatorname{Cl}(R) \cong G$. У том правцу, покажимо најпре да то важи за слободну Абелову групу. Најпре, за скуп S и прстен R, нека је

$$R^{(S)} = R\left[\{X_s, Y_s, U_s, V_s\}_{s \in S}\right] / \langle \{X_s V_s - Y_s U_s\}_{s \in S} \rangle$$

што је заправо прстен полинома по промењљивим индексираним скупом S посечен по одређеном идеалу. Уколико скуп S има само један елемент, тада је прстен

$$R^{(S)} = R[X, Y, U, V] / \langle XV - YU \rangle.$$

Малим словима x_s, y_s, u_s, v_s означаваћемо одговарајуће класе неодређених у $R^{(S)}$. Имамо на уму да за њих тада важи $x_s v_s - y_s u_s = 0$. Додатно, за скуп S, означимо са $\mathbb{Z}^{(S)}$ слободну Абелову групу над скупом S.

Теорема 2.11. *Уколико је R Крулов домен и S скуп, тада је и $R^{(S)}$ Крулов домен. Уколико је $R = K$ једно поље, тада је* $\mathrm{Cl}\left(K^{(S)}\right) = \mathbb{Z}^{(S)}$.

Доказ. Покажимо други део тврђења. Означимо прстене $B = K\left[\{x_s, y_s, u_s, v_s\}_{s\in S}\right]$ и $C = K\left[\left\{x_s, y_s, \frac{u_s}{x_s}\right\}_{s\in S}\right]$. Важи да је $\mathrm{Cl}\,(C) = 0$ и да је прстен C потпресек прстена B па је по Нагатиној теореми $\ker\left(\mathrm{Cl}\,(B) \to \mathrm{Cl}\,(C)\right) = \mathrm{Cl}\,(B)$ генерисано простим идеалима који су изостављени при формирању прстена C и показује се да су то тачно $\langle x_s, y_s\rangle$ за $s \in S$ односно $\mathrm{Cl}\,(B)$ је генерисано простим дивизорским идеалима $\langle x_s, y_s\rangle$ за $s \in S$. Покажимо још да међу њима нема нетривијалних релација. Претпоставимо стога да је сума $\sum_{s\in S} n_s\langle x_s, y_s\rangle = fB$ за елемент f из поља разломака $\mathbb{F}$ домена B. Прстени B, C имају исто поље разломака $\mathbb{F}$ па их сматрамо потпрстенима тог поља. На левој страни је комбинација елемената из $\mathrm{Cl}\,(B)$ са највише коначно много ненула n_s. То имплицира да је

$$fB = \bigcap_{s\in S}\langle x_s, y_s\rangle^{(n_s)}$$

узимајући у обзир коментар након леме 2.3 па је специјално испуњено и $f \in B$ па је и $f \in C$. За фиксирано s, посматрамо $\langle x_s, y_s\rangle^{(n_s)}$. Пошто у идеалу $\langle x_s, y_s\rangle$ није u_s то је његов степен инвертован односно $u_s^{-n_s} \in \langle x_s, y_s\rangle^{(n_s)}$. Сада посматрамо идеал у C генерисан елементом f. Пошто њему припада $u_s^{-n_s}$ а припада му и $\frac{u_s}{x_s}$ то му и $x_s^{-n_s}$ припада. Сходно томе, идеал генерисан са f у C садржи инвертибилан елемент па је једнак целом C. Следи да је f инвертибилан елемент у C па мора бити из K. Последично, класе елемената из K су инвертибилне у B одакле је $fB = B$. Стога сви n_s морају бити нула, што комплетира доказ. $\square$

Последњи резултат који нам је потребан јесте

Теорема 2.12. *Нека је R Крулов домен и H подгрупа класне групе дивизора* $\mathrm{Cl}\,(R)$. *Тада постоји раширење прстена $R \to S$ такво да је S Крулов домен и постоји кратак тачан низ*

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Cl}\,(R) \longrightarrow \mathrm{Cl}\,(S) \longrightarrow 0$$

при чему је мономорфизам инклузија подгрупе H.

У последњем кораку лако комбинујемо претходне резултате и показујемо резултат Клаборна.

Теорема 2.13. *Нека је G Абелова група. Тада постоји Дедекиндов домен R такав да је* $\mathrm{Cl}\,(R) \cong G$.

Доказ. Полазимо од слободне Абелове групе F и њене подгрупе H такве да је $G \cong F/H$. По теореми 2.11 постоји Крулов домен A такав да је $\mathrm{Cl}\,(A) \cong F$. По теореми 2.12 постоји Крулов домен B такав да је $\mathrm{Cl}\,(B) \cong F/H \cong G$ што следи из кратког тачног низа

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Cl}\,(A) \longrightarrow \mathrm{Cl}\,(B) \longrightarrow 0$$

и прве теореме о изоморфизму. Коначно, по теореми 2.10 постоји Дедекиндов домен R такав да је $\mathrm{Cl}\,(R) \cong \mathrm{Cl}\,(B) \cong G$ што комплетира доказ. $\square$

Глава 3

Гротендикова конструкција

Циљ ове главе јесте да уведемо Гротендикову конструкцију, која представља један универзални начин да конструишемо Абелову групу полазећи од Абеловог моноида. Почетак сваке К-теорије почиње групним комплетирањем одређеног Абеловог моноида.

3.1 Гротендиков функтор

Полазимо од *Абеловог моноида* M, односно од скупа са комутативном, асоцијативном операцијом $+$ која има неутрални елемент 0. Хомоморфизам (Абелових) моноида је пресликавање $f : M \to N$ које испуњава $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Абелови моноиди са хомоморфизмима моноида чине једну категорију, где је композиција морфизама дефинисана уобичајено, што се једноставно проверава. Пример Абеловог моноида јесте скуп природних бројева $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ са сабирањем природних бројева. Абелова група јесте Абелов моноид, као и било који адитивно затворен скуп Абелове групе који садржи неутрал. Да би Абелов моноид био Абелова група, потребно је да сваки елемент има инверз у односу на сабирање. Уколико посматрамо хомоморфизам моноида $f : M \to G$ при чему је G Абелова група, то слика сваког елемента $f(m), m \in M$ има инверз у односу на сабирање, овај пут у G.

Гротендикова идеја се заснива на томе да Абеловом моноиду придружимо Абелову групу на што универзалнији начин, односно да свака Абелова група која садржи хомоморфну слику почетног моноида, садржи и хомоморфну слику придружене Абелове групе (видети [9], [14], [10]).

Дефиниција 3.1. *Гротендикова група* Абеловог моноида M је Абелова група $\mathcal{G}(M)$ заједно са хомоморфизмом моноида $i_M : M \to \mathcal{G}(M)$ таквим да ако је G Абелова група и $f : M \to G$ хомоморфизам моноида, постоји јединствени хомоморфизам $\hat{f} : \mathcal{G}(M) \to G$ такав да је $\hat{f} \circ i_M = f$.

За Абелову групу $\mathcal{G}(M)$ кажемо још да је Гротендикова конструкција придружена Абеловом моноиду M. Ако је потребно прецизније нагласити, за пар $(\mathcal{G}(M), i_M)$ ћемо такође рећи да је Гротендикова група Абеловог моноида M. Такође, ако је из контекста јасно о ком се Абеловом моноиду ради, писаћемо само i за хомоморфизам моноида i_M. За својство које дефинише групу $\mathcal{G}(M)$ кажемо да је универзално.

Теорема 3.1. *За сваки Абелов моноид M постоји његова Гротендикова група и одређена је јединствено до на изоморфизам.*

Доказ. Покажимо прво јединственост Гротендикове групе, до на изоморфизам. Нека стога парови (G_1, i_1) и (G_2, i_2) испуњавају универзално својство из дефиниције Гротендикове групе. Тада применом дефиниције на пар (G_1, i_1) и хомоморфизам моноида $i_2 : M \to G_2$ добијамо хомоморфизам група $f_1 : G_1 \to G_2$ такав да је $f_1 \circ i_1 = i_2$. Сада применимо дефиницију на пар (G_2, i_2) и хомоморфизам моноида $i_1 : M \to G_1$ да добијемо хомоморфизам група $f_2 : G_2 \to G_1$ такав да је $f_2 \circ i_2 = i_1$. Додатно, хомоморфизми f_1, f_2 су једини такви. Уколико сада $f_1 \circ i_1 = i_2$ укомбинујемо са f_2, добијамо:

$$f_2 \circ f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2 = i_1$$

Дакле, $F_1 = f_2 \circ f_1 : G_1 \to G_1$ је хомоморфизам група за који важи $F_1 \circ i_1 = i_1$. Пошто је то испуњено и за идентични хомоморфизам на G_1 односно $\mathrm{Id}_{G_1} \circ i_1 = i_1$ и пошто је (G_1, i_1) Гротендикова група, то је хомоморфизам група $f : G_1 \to G_1$ за који је $f \circ i_1 = i_1$ јединствен односно важи $F_1 = f_2 \circ f_1 = \mathrm{Id}_{G_1}$. Потпуно аналогно је $f_1 \circ f_2 = \mathrm{Id}_{G_2}$ односно групе G_1, G_2 су изоморфне, и то тако да комутира наредни дијаграм:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} & M \\ {\scriptstyle i_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_2} \\ G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_2 \end{array}$$

и аналогно дијаграм:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} & M \\ {\scriptstyle i_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_1} \\ G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_1 \end{array}$$

Покажимо сада егзистенцију Гротендикове групе. Полазимо од скупа $M \times M$ на којем уводимо релацију еквиваленције

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow (\exists p \in M)\,(m_1 + n_2 + p = m_2 + n_1 + p)$$

и поставимо $G = M \times M/\sim$ количнички скуп релације. За $x, y \in M$ означимо са $[x, y]$ класу еквиваленције елемента (x, y). Уводимо сада операцију на G:

$$[x, y] + [z, t] = [x + z, y + t]\,.$$

Покажимо прво да је релација добро дефинисана. Претпоставимо да је $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ и $(z_1, t_1) \sim (z_2, t_2)$. Тада постоје елементи $p, q \in M$ такви да важи

$$x_1 + y_2 + p = x_2 + y_1 + p$$

$$z_1 + t_2 + q = z_2 + t_1 + q.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо

$$x_1 + z_1 + y_2 + t_2 + p + q = x_2 + z_2 + y_1 + t_1 + p + q$$

односно по дефиницији је испуњено $(x_1 + z_1, y_1 + t_1) \sim (x_2 + z_2, y_2 + t_2)$. Како је сабирање у M комутативно и асоцијативно, то је и уведено сабирање у G комутативно и асоцијативно при чему је неутрални елемент $[0, 0]$ где је 0 неутрални елемент у M. Инверзни елемент од $[x, y]$

јесте $[y,x]$ јер је $x+y+0=y+x+0$ у M па је $[x,y]+[y,x]=[x+y,y+x]=[0,0]$. Сходно томе, G је Абелова група. Дефинишемо сада пресликавање

$$i_M : M \to G$$

са $i_M(m)=[m,0]$. Ово је хомоморфизам моноида:

$$i_M(m+n)=[m+n,0]=[m+n,0+0]=[m,0]+[n,0]=i_M(m)+i_M(n)$$

и приметимо да је у G испуњено

$$[x,y]=[x,0]+[0,y]=[x,0]-[y,0]=i_M(x)-i_M(y)$$

па слика овог хомоморфизма генерише групу G. Покажимо још да испуњава универзално својство Гротендикове групе. Уочимо стога Абелову групу H и хомоморфизам моноида $f : M \to H$. Тада индукујемо хомоморфизам Абелових група

$$\hat{f} : G \to H$$

са $\hat{f}([x,y])=f(x)-f(y)$. Ово је добро дефинисан хомоморфизам јер ако је $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ тада по дефиницији постоји елемент $p\in M$ такав да је испуњено $x_1+y_2+p=x_2+y_1+p$. Када на ово применимо f добијамо

$$f(x_1)+f(y_2)+f(p)=f(x_2)+f(y_1)+f(p)$$

па пошто је H група, након скраћивања остаје

$$f(x_1)+f(y_2)=f(x_2)+f(y_1)$$

односно

$$f(x_1)-f(y_1)=f(x_2)-f(y_2).$$

Директно имамо да је за $m\in M$ испуњено

$$\hat{f}(i_M(m))=\hat{f}([m,0])=f(m)-f(0)=f(m)$$

односно важи $\hat{f}\circ i_M=f$. Ако је и $\phi : G\to H$ хомоморфизам за који је $\phi\circ i_M=f$ тада се хомоморфизми $\hat{f},\phi$ поклапају на слици хомоморфизма i_M а пошто је та слика генераторни скуп групе G, то се поклапају на целој групи односно $\hat{f}=\phi$ што комплетира доказ. $\square$

Користићемо убудуће ознаку $i_M(m)=[m]$ за $m\in M$, без страха од забуне са претходно коришћеном ознаком. Јасно, елементи $[m], m\in M$ чине генераторни скуп групе $\mathcal{G}(M)$.

Пример 3.1. Уколико је $M=\mathbb{N}$ са стандардним сабирањем природних бројева, тада је $\mathcal{G}(M)\cong\mathbb{Z}$ са стандардним сабирањем, што лако видимо јер $\mathbb{Z}$ испуњава универзално својство Гротендикове групе. $\square$

Пример 3.2. Уколико је M Абелова група, тада је $\mathcal{G}(M)\cong M$ са $i_M=\mathrm{Id}_M$, а ако је M подмоноид Абелове групе G, тада је $\mathcal{G}(M)$ изоморфно подгрупи $\langle M\rangle$ од G генерисаној скупом M. Заиста, пошто је M Абелов моноид, то је инклузија $M\to\langle M\rangle$ хомоморфизам моноида, и свака два хомоморфизма из $\langle M\rangle$ у Абелову групу који се поклапају на подскупу M, поклапају се на целој групи $\langle M\rangle$ јер је M њен генераторни скуп. $\square$

Уочимо сада хомоморфизам Абелових моноида $f : M \to N$. Када укомпонујемо то са i_N, добијамо хомоморфизам моноида $i_N \circ f : M \to \mathcal{G}(N)$ па постоји јединствени хомоморфизам група $\hat{f} : \mathcal{G}(M) \to \mathcal{G}(N)$ такав да важи $\hat{f} \circ i_M = i_N \circ f$. За хомоморфизам група $\hat{f}$ овако дефинисан кажемо да је *индукован* хомоморфизмом моноида f. Њега можемо окарактерисати тиме да је то јединствени хомоморфизам из $\mathcal{G}(M)$ у $\mathcal{G}(N)$ такав да комутира наредни дијаграм:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle i_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_N} \\ \mathcal{G}(M) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{G}(N) \end{array} .$$

Специјално, уколико је $f = \mathrm{Id}_M$, за $\hat{f} = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}(M)}$ дијаграм комутира. Уколико имамо хомоморфизам моноида

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$$

тада одговарајући индоковани дијаграм јесте:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L \\ {\scriptstyle i_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_N} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_L} \\ \mathcal{G}(M) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{G}(N) & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathcal{G}(L) \end{array} .$$

Пошто оба квадрата комутирају по дефиницији индукованог хомоморфизма, то цео дијаграм комутира односно важи

$$i_L \circ (g \circ f) = \left(\hat{g} \circ \hat{f}\right) \circ i_M$$

односно важи $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$. Сходно томе можемо формулисати наредну теорему.

Теорема 3.2. *Гротендикова конструкција остварује један функтор из категорије MAb Абелових моноида и хомоморфизама међу њима у категорију Ab Абелових група и хомоморфизама.*

Функтор из претходне теореме називамо *Гротендиков функтор.* Уколико посматрамо *заборавни* функтор из категорије Абелових група у категорију Абелових моноида, универзално својство које дефинише Гротендикову групу показује да је Гротендиков функтор *лево адјунгован* заборавном функтору (видети [9], [13], [14]) односно постоји природни изоморфизам

$$\mathrm{Hom}_{MAb}(M, G) \cong \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathcal{G}(M), G)$$

за Абелов моноид M и Абелову групу G. Додељивање $f \mapsto \hat{f}$ остварује овај изоморфизам.

У наредној теореми сумирамо основна својства Гротендикове групе, што следи директно из конструкције.

Теорема 3.3. *Нека је M Абелов моноид. Тада важи:*

1) *Сваки елемент групе $\mathcal{G}(M)$ је облика $[m] - [n]$ за неке $m, n \in M$.*

2) *За елементе $m, n \in M$ важи да је $[m] = [n]$ ако и само ако постоји $p \in M$ такав да је $m + p = n + p$.*

Својство 1) претходне теореме нам говори да Гротендикова група моноида M јесте скуп формалних разлика елемената моноида M односно неформално говорећи, група $\mathcal{G}(M)$ настаје од M додавањем само инверза елемената који већ немају инверз у M. Својство 2) нам са друге стране говори када су слике елемената из M у $\mathcal{G}(M)$ једнаке, и видимо да је хомоморфизам моноида i_M инјективан ако и само ако је сваки елемент моноида M *регуларан* односно ако је у M испуњено:

$$m + p = n + p \Rightarrow m = n.$$

Кажемо још да моноид M има својство скраћивања.

Дефиниција 3.2. Подмоноид L Абеловог моноида M је *кофиналан* уколико за свако $m \in M$ постоји $n \in M$ такав да је $m + n \in L$.

Иако ћемо о томе говорити у наредној глави, наведимо сада ради комплетности важан пример кофиналног моноида, а то је скуп класа изоморфности коначно генерисаних слободних модула над прстеном R у Абеловом моноиду класа изоморфности коначно генерисаних пројективних модула над R, где је операција задата директном сумом.

У наредној теореми наводимо кључна својства:

Теорема 3.4. *Уколико је L кофинални подмоноид Абеловог моноида M, тада важи:*

1) *$\mathcal{G}(L)$ је подгрупа групе $\mathcal{G}(M)$.*

2) *Сваки елемент групе $\mathcal{G}(M)$ је облика $[m] - [l]$ за неке $m \in M, l \in L$.*

3) *Ако је $[m] = [n]$ у $\mathcal{G}(M)$, тада постоји $l \in L$ такав да је $m + l = n + l$.*

Доказ. Прво, инклузија моноида $j : L \to M$ индукује хомоморфизам група $\hat{j} : \mathcal{G}(L) \to \mathcal{G}(M)$ за који тврдимо да је мономорфизам. Он је одређен једнакошћу $\hat{j}([m]) = [m]$. Нека је $\hat{j}([m] - [n]) = 0$, односно $[m] - [n] = 0$ али у $\mathcal{G}(M)$. По претходној теореми, постоји елемент $p \in M$ за који је $m + p = n + p$. Пошто је L кофинални, то постоји $l \in M$ такав да $q = p + l \in L$. Сходно томе, $m + q = n + q$ односно $[m] = [n]$ овај пут у групи $\mathcal{G}(L)$ што показује да је $\mathcal{G}(L)$ подгрупа од $\mathcal{G}(M)$. Приметимо да ово уједно показује и ставку 3) тврђења. Што се тиче 2), уочимо $x \in \mathcal{G}(M)$. Тада постоје $m, n \in M$ такви да је $x = [m] - [n]$. Уочимо даље $p \in M$ такав да $l = n + p \in L$. Тада је за $m' = m + p \in M$ испуњено $x = [m'] - [l]$ што комплетира доказ. $\square$

3.2 Гротендикова конструкција полупрстена

Нека је M Абелов *полупрстен* односно Абелов моноид са још једном операцијом $\cdot$ која је асоцијативна, комутативна, дистрибутивна према сабирању и има неутрални елемент 1. Хомоморфизам моноида $f : M \to N$ је хомоморфизам полупрстена ако испуњава $f(mn) = f(m) f(n)$. Основни пример јесте скуп природних бројева $\mathbb{N}$ са стандардним сабирањем и множењем. Када пређемо на Гротендикову групу $\mathcal{G}(M)$ у односу на адитивну структуру, добијамо Абелову групу и природно је питање да ли се множење преноси на $\mathcal{G}(M)$ тако да добијемо прстен. Уколико посматрамо случај полупрстена $\mathbb{N}$, одговор је потврдан и множење у скупу целих бројава је проширено множење природних. Одговор у општем случају је такође потврдан, и то показујемо у наредној теореми.

Теорема 3.5. *Нека је* $(M,+,\cdot)$ *Абелов полупрстен. Тада Гротендикова група* $\mathcal{G}(M)$ *Абеловог моноида* $(M,+)$ *допушта операцију множења у односу на коју постаје комутативан прстен са јединицом и важи* $[m][n]=[m\cdot n]$ *за све* $m,n\in M$.

Доказ. Сваки елемент у $\mathcal{G}(M)$ је разлика два генератора, па је природан начин да дефинишемо множење:

$$\big([m]-[m']\big)\big([n]-[n']\big)=\big[mn+m'n'\big]-\big[mn'+m'n\big].$$

Уколико покажемо да је ово добро дефинисано, једноставно се проверава да овако дефинисано множење испуњава услове теореме. Да би показали добру дефинисаност, претпоставимо да је $[m]-[m']=[m_1]-[m_1']$ као и $[n]-[n']=[n_1]-[n_1']$. То имплицира да постоје елементи $p,q\in M$ такви да је $m+m_1'+p=m_1+m'+p$ и $n+n_1'+q=n_1+n'+q$. Рачунамо сада:

$$\big(m+m_1'+p\big)\big(n_1+n'+q\big)=mn_1+mn'+mq+m_1'n_1+m_1'n'+m_1'q+pn_1+pn'+pq \tag{3.1}$$

$$\big(m+m_1'+p\big)\big(n+n_1'+q\big)=mn+mn_1'+mq+m_1'n+m_1'n_1'+m_1'q+pn+pn_1'+pq \tag{3.2}$$

$$\big(m'+m_1+p\big)\big(n_1+n'+q\big)=m'n_1+m'n'+m'q+m_1n_1+m_1n'+m_1q+pn_1+pn'+pq \tag{3.3}$$

$$\big(m'+m_1+p\big)\big(n+n_1'+q\big)=m'n+mn_1'+m'q+m_1n+m_1n_1'+m_1q+pn+pn_1'+pq. \tag{3.4}$$

Треба да покажемо да је:

$$\big[mn+m'n'\big]-\big[m'n+mn'\big]=\big[m_1n_1+m_1'n_1'\big]-\big[m_1'n_1+m_1n_1'\big]$$

односно да постоји елемент $r\in M$ такав да важи:

$$mn+m'n'+m_1'n_1+m_1n_1'+r=m_1n_1+m_1'n_1'+m'n+mn'+r.$$

Сабирањем једнакости 3.1 и 3.4 са једне стране и једнакости 3.2 и 3.3 са друге, добијамо добру дефинисаност множења. □

По претходној теореми, уколико је M Абелов полупрстен, тада је $\mathcal{G}(M)$ комутативан прстен са јединицом. Јединица је $[1]$ где је 1 јединица у M. Уколико је $f:M\to N$ хомоморфизам полупрстена, тада је $\hat{f}:\mathcal{G}(M)\to\mathcal{G}(N)$ хомоморфизам прстена са јединицом. Заиста, уколико је $x=[m]-[m']$, $y=[n]-[n']$ тада имамо:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(xy)&=\hat{f}\big(\big[mn+m'n'\big]-\big[mn'+m'n\big]\big)\\
&=\hat{f}\big(\big[mn+m'n'\big]\big)-\hat{f}\big(\big[mn'+m'n\big]\big)\\
&=\big[f\big(mn+m'n'\big)\big]-\big[f\big(mn'+m'n\big)\big]\\
&=\big[f(m)f(n)+f\big(m'\big)f\big(n'\big)\big]-\big[f(m)f\big(n'\big)+f\big(m'\big)f(n)\big]\\
&=\hat{f}(x)\hat{f}(y).
\end{aligned}$$

Стога можемо да формулишемо наредну теорему.

Теорема 3.6. *Гротендикова конструкција остварује функтор из категорије Абелових полупрстена и хомоморфизама између њих у категорију комутативних прстена са јединицом и хомоморфизама између њих.*

Уколико су M_1, M_2 Абелови полупрстени, тада је $M_1 \times M_2$ на природан начин Абелов полупрстен који називамо производ полупрстена M_1, M_2 при чему су природне пројекције $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ и $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ хомоморфизми полупрстена. Покажимо сада својство продуктибилности Гротендиковог функтора.

Теорема 3.7. *Уколико су M_1, M_2 Абелови полупрстени, тада важи изоморфизам*

$$\mathcal{G}(M_1 \times M_2) \cong \mathcal{G}(M_1) \times \mathcal{G}(M_2)$$

комутативних прстена са јединицом.

Доказ. Посматрамо индуковане хомоморфизме природних пројекција $(\pi_1)_* : \mathcal{G}(M_1 \times M_2) \to \mathcal{G}(M_1), (\pi_2)_* : \mathcal{G}(M_1 \times M_2) \to \mathcal{G}(M_2)$ помоћу којих добијамо хомоморфизам комутативних прстена са јединицом

$$F = (\pi_1)_* \times (\pi_2)_* : \mathcal{G}(M_1 \times M_2) \to \mathcal{G}(M_1) \times \mathcal{G}(M_2).$$

и покажимо да је изоморфизам. Покажимо најпре да је сурјекција. За то је довољно показати да су генератори $([m_1], [m_2]) \in \mathcal{G}(M_1) \times \mathcal{G}(M_2)$ у слици. Заиста, за $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ из дефиниције индукованог хомоморфизма следи да је

$$F([(m_1, m_2)]) = ([(\pi_1)(m_1, m_2)], [(\pi_2)(m_1, m_2)]) = ([m_1], [m_2])$$

што показује сурјективност. Покажимо још да је инјекција. Претпоставимо стога да је

$$F([(m_1, m_2)] - [(n_1, n_2)]) = 0$$

односно $([m_1], [m_2]) = ([n_1], [n_2])$. Следи да је $[m_1] = [n_1]$ као и $[m_2] = [n_2]$ па постоје елементи $l_1 \in M_1, l_2 \in M_2$ такви да је $n_1 + l_1 = m_1 + l_1$ и $n_2 + l_2 = m_2 + l_2$. Тада је $(m_1, m_2) + (l_1, l_2) = (n_1, n_2) + (l_1, l_2)$ што показује да је $[(m_1, m_2)] = [(n_1, n_2)]$ и комплетира доказ. □

Наведимо сада два интересантна примера.

Пример 3.3. Нека је X тополошки простор. Скуп непрекидних функција $[X, \mathbb{N}]$ из скупа X у скуп природних бројева $\mathbb{N}$ на којем посматрамо дискретну топологију јесте Абелов полупрстен где су сабирање и множење дефинисани тачка по тачка. Гротендиковом конструкцијом добијамо прстен $[X, \mathbb{Z}]$ где и на $\mathbb{Z}$ посматрамо дискретну топологију док су операције дефинисане тачка по тачка. Уколико је простор X компактан, тада је $[X, \mathbb{Z}]$ слободна Абелова група. Заиста, пошто на $\mathbb{Z}$ посматрамо дискретну топологију, непрекидне функције $X \to \mathbb{Z}$ су локално константне функције, па ако је X компактан, то оне узимају коначно много вредности односно $[X, \mathbb{Z}]$ је подгрупа слободне Абелове групе ограничених функција из X у $\mathbb{Z}$ па је слободна Абелова група. □

Пример 3.4. Нека је G коначна група. *G-скуп* је скуп X на који група G дејствује. За $g \in G$, $x \in X$ писаћемо $g \cdot x$ за резултат дејства. Такође, за G-скуп X ћемо рећи да је транзитиван ако је дејство групе G на њему транзитивно. Ако су X, Y G-скупови, функција $f : X \to Y$ је

G-*функција* уколико за $g \in G, x \in X$ важи $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. Изоморфизам G-скупова X и Y је G-функција $f : X \to Y$ која је бијекција чији је инверз G-функција.

Нека је M скуп класа изоморфности коначних G-скупова. На њему посматрамо операцију дисјунктне уније, са природно дефинисаним дејством групе G у односу на коју је M Абелов моноид, са неутралом који чини класа празног скупа. Нека је X један G-скуп. Из теорије група знамо да је тада скуп X јединствена дисјунктна унија орбита дејства односно

$$X = \Omega_{x_1} \sqcup \ldots \sqcup \Omega_{x_r}.$$

Дејство на орбитама је транзитивно и додатно, за орбиту елемента $x \in X$, његова орбита Ω_x је у природној бијекцији са скупом косета његовог стабилизатора G/Σ_x. Скуп G/Σ_x природно постаје G-скуп са дејством

$$g \cdot h\Sigma_x = gh\Sigma_x.$$

Тада пресликавање $f : \Omega_x \to G/\Sigma_x$ одређено са $f(g \cdot x) = g\Sigma_x$ јесте један изоморфизам G-скупова. Пошто знамо да је бијекција са инверзом $f^{-1}(g\Sigma_x) = g \cdot x$, покажимо још да су f, f^{-1} G-функције. За $g, h \in G$ важи

$$f(g \cdot (h \cdot x)) = f(gh \cdot x) = gh\Sigma_x = g \cdot (h\Sigma_x) = g \cdot f(h \cdot x)$$

док је са друге стране

$$f^{-1}(g \cdot h\Sigma_x) = f^{-1}(gh\Sigma_x) = (gh \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot f^{-1}(h\Sigma_x).$$

Моноид M изоморфан је моноиду $\mathbb{N}^c$ са стандардном операцијом сабирања где је c број класа изоморфности транзитивних G-скупова. Овај број је коначан јер свака класа садржи представника облика G/H где је H подгрупа групе G, па пошто је група G коначна, то је и број њених подгрупа коначан.

За две подгрупе H_1, H_2 групе G важи да је G/H_1 G-изоморфан са G/H_2 ако и само ако су групе H_1, H_2 међусобно конјуговане. Нека је прво $f : G/H_1 \to G/H_2$ један изоморфизам G-скупова. Он је јединствено одређен вредношћу $g_0H_2 = f(eH_1)$ јер је

$$f(gH_1) = f(geH_1) = gf(eH_1).$$

Његово инверзно пресликавање мора тада бити задато са $f^{-1}(gH_2) = gg_0^{-1}H_1$. Покажимо да елемент g_0^{-1} конјугује подгрупе H_1 и H_2 односно да важи $g_0^{-1}H_1g_0 = H_2$. За $h \in H$ имамо једнакост косета $g_0^{-1}hH_1 = g_0^{-1}H_1$ па је

$$f\left(g_0^{-1}hH_1\right) = g_0^{-1}hf(eH_1) = g_0^{-1}hg_0H_2$$

док је са друге стране

$$f\left(g_0^{-1}H_1\right) = g_0^{-1}f(eH_1) = g_0^{-1}g_0H_2 = H_2$$

па пошто је f бијекција то мора важити $g_0^{-1}hg_0H_2 = H_2$ односно $g_0^{-1}hg_0 \in H_2$ што показује инклузију $g_0^{-1}H_1g_0 \subseteq H_2$. Применом аналогног аргумента на пресликавање f^{-1} добијамо инклузију $g_0H_2g_0^{-1} \subseteq H_1$ односно $H_2 \subseteq g_0^{-1}H_1g_0$ што показује и другу инклузију. Уколико су подгрупе H_1, H_2 конјуговане елементом g_0 односно важи $g_0H_1g_0^{-1} = H_2$, тада је $f : G/H_1 \to G/H_2$ задато са $f(gH_1) = gg_0H_2$ изоморфизам G-скупова што се непосредно проверава. Следи да је c број класа конјугованих подгрупа групе G.

На скупу M можемо посматрати и операцију Декартовог производа, који га снабдева Абеловим полупрстеном, при чему неутрал одговара класи једночланог G-скупа. Гротендиково комплетирање Абеловог полупрстена M означавамо са $A(G)$ и називамо *Бернсајдов прстен* групе G. $\square$

Нека је G коначна група, $M(G)$ Абелов полупрстен класа изоморфности коначних G-скупова и H подгрупа групе G. Пресликавање $M(G) \to \mathbb{Z}$ задато са $[X] \mapsto \left|X^H\right|$ где је $\left|X^H\right|$ кардиналност фиксног скупа

$$X^H = \{x \in X \mid (\forall h \in H)\,(h \cdot x = x)\}$$

је добро дефинисан хомоморфизам Абелових полупрстена, па из универзалности Гротендикове конструкције постоји јединствени хомоморфизам комутативних прстена са јединицом који ћемо означити са

$$\chi_H : A(G) \to \mathbb{Z}$$

одређен са $\chi_H([X]) = \left|X^H\right|$. Нека су сада $H_1, \ldots, H_c$ подгрупе представници (свих) класа конјугованих подгрупа група G. Оне тада одређују хомоморфизам комутативних прстена са јединицом

$$\chi = \chi_{H_1} \times \ldots \times \chi_{H_c} : A(G) \to \mathbb{Z}^c$$

који називамо *Бернсајдов карактер* групе G.

Теорема 3.8. *Хомоморфизам $\chi : A(G) \to \mathbb{Z}^c$ је мономорфизам и индукује изоморфизам $A(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^c$.*

Доказ. Нека је $x \in A(G)$ различит од нуле. По примеру 3.4 он је облика

$$x = a_{H_1}[G/H_1] + \ldots + a_{H_c}[G/H_c]$$

за јединствене целе бројеве $a_{H_1}, \ldots, a_{H_c}$. Посматрајмо сада фиксни скуп

$$(G/H_i)^{H_j} = \{gH_i \in G/H_i \mid (\forall h \in H_j)\,(hgH_i = gH_i)\} = \left\{gH_i \in G/H_i \mid (\forall h \in H_j)\left(g^{-1}hg \in H_i\right)\right\}.$$

Следи да ако $gH_i \in (G/H_i)^{H_j}$ важи $g^{-1}H_jg \subseteq H_i$. Пошто је по претпоставци x различит од нуле, то постоји максимална у односу на инклузију подгрупа H_{i_0} групе G таква да је $a_{H_{i_0}} \neq 0$ и њу посматрамо као одговарајућег представника своје класе конјугованости. Пошто конјуговане подгрупе дају исту кардиналност фиксног скупа, то је $a_{H_i}\chi_{H_{i_0}}(G/H_i) = 0$ за све i различите од i_0. Заиста, ако то није случај, онда је $a_{H_i} \neq 0$. Са друге стране, пошто је тада и $\chi_{H_{i_0}}(G/H_i) \neq 0$ то по претходном постоји $g \in G$ такав да је $gH_{i_0}g^{-1} \subseteq H_i$. Тада је $H_{i_0} \subseteq g^{-1}H_ig$ па пошто је $a_{H_i} = a_{g^{-1}H_ig}$ то је контрадикција са максималношћу групе H_{i_0}. Стога је

$$\chi_{H_{i_0}}(x) = a_{H_1}\chi_{H_{i_0}}(G/H_1) + \ldots + a_{H_c}\chi_{H_{i_0}}(G/H_c) = a_{H_{i_0}}\chi_{H_{i_0}}(G/H_0) \neq 0$$

јер увек $eH_{i_0} \in (G/H_{i_0})^{H_{i_0}}$. То показује да Бернсајдов карактер јесте мономорфизам. Пошто је $\mathbb{Q}$ раван $\mathbb{Z}$-модул, то тензорисањем са $\mathbb{Q}$ добијамо инјекцију $\mathbb{Q}$-простора

$$\bar{\chi} : A(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^c$$

одређену са

$$\bar{\chi}(x \otimes q) = (\chi_{H_1}(x)\,q, \ldots, \chi_{H_c}(x)\,q)\,.$$

Пошто је $A(G)$ изоморфан стандардном директном производу $\mathbb{Z}^c$ то је димензија $\mathbb{Q}$-простора $A(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ једнака c одакле следи да је $\bar{\chi}$ изоморфизам. $\square$

Глава 4

Алгебарска K-теорија прстена

Са R ће нам бити означен комутативан прстен са јединицом, и модули које посматрамо биће леви R-модули док не нагласимо другачије. Стандардна литература за излагање у овој глави јесу књиге [2], [7], [9], [14].

4.1 Гротендикова група прстена

За прстен R, са $\mathbf{P}(R)$ означавамо скуп класа изоморфности коначно генерисаних пројективних R-модула. Када на њему посматрамо директну суму $\oplus$ као операцију, добијамо Абелов моноид, са неутралним елементом који одговара класи тривијалног модула 0. *Гротендикова група* прстена R у ознаци $K_0(R)$ јесте Гротендикова група Абеловог моноида $\mathbf{P}(R)$. Скуп $\mathbf{P}(R)$ јесте и Абелов полупрстен, где множење уводимо помоћу тензорског производа са

$$[P] \otimes [Q] = [P \otimes_R Q] .$$

Овде $[P]$ означава класу изоморфности коначно генерисаног пројективног модула P. На основу резултата из претходне главе, $K_0(R)$ је комутативан прстен са јединицом. Ипак, говорићемо о групи $K_0(R)$ имајући у виду да има природну структуру комутативног прстена са јединицом.

Теорема 4.1. *Додељивање $R \mapsto K_0(R)$ остварује функтор из категорије комутативних прстена са јединицом у категорију комутативних прстена са јединицом. Ако посматрамо само адитивну структуру групе $K_0(R)$, добијамо функтор из категорије комутативних прстена са јединицом у категорију Абелових група.*

Доказ. Додељивање $R \mapsto K_0(R)$ јесте композиција додељивања

$$R \mapsto \mathbf{P}(R) \mapsto K_0(R) .$$

Друга додела је Гротендиков функтор из претходне главе, па остаје још да се уверимо у функторијалност прве доделе. Нека је стога $f : R \to S$ хомоморфизам прстена. Придружујемо пресликавање $f_\sharp : \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ дефинисано са

$$f_\sharp([M]) = [M \otimes_R S] .$$

Оно је добро дефинисано, односно ако је $M \cong N$ тада је $M \otimes_R S \cong N \otimes_R S$ изоморфизам S-модула (видети [5]). Да је $f_\sharp$ хомоморфизам Абелових полупрстена видимо из следећих изоморфизама S-модула, где су P и Q R-модули (видети [5])

$$(M \oplus N) \otimes_R S \cong (M \otimes_R S) \oplus (N \otimes_R S)$$

$$(M \otimes_R N) \otimes_R S \cong (M \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S) .$$

Ако је $f : R \to R$ идентични хомоморфизам, проширење скалара нам даје стандардну структуру R-модула на R. Стога је за R-модул M испуњено $M \otimes_R R \cong M$ одакле је $(Id_R)_\sharp = Id_{\mathbf{P}(R)}$. Нека је још $g : S \to T$ хомоморфизам прстена са јединицом и M један R-модул. Тада важи (видети [5])

$$(g_\sharp \circ f_\sharp)(M) = g_\sharp (f_\sharp (M)) = g_\sharp (M \otimes_R S) = (M \otimes_R S) \otimes_S T \cong M \otimes_R T$$

односно $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$. Дакле, и прво додељивање дефинише функтор индукован проширењем скалара, што комплетира доказ. □

За коначно генерисан пројективан R-модул M, писаћемо $[M]$ за одговарајући елемент који његова класа изоморфности одређује у $K_0(R)$. Неутрал за множење у $K_0(R)$ јесте класа $[R]$. За хомоморфизам прстена $f : R \to S$ индуковани хомоморфизам Гротендикових група означавамо са $f_* : K_0(R) \to K_0(S)$ а понекад ради јасније ознаке и са $K_0(f)$. Он је одређен са $f([M]) = [M \otimes_R S]$ за коначно генерисан пројективан R-модул M.

Инвертибилни елементи у односу на множење Абеловог моноида $\mathbf{P}(R)$ су по теореми 2.1 тачно класе пројективних модула који имају константан ранг 1. Пошто је $f_\sharp : \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ хомоморфизам моноида, то се при њему група инвертибилних елемената слика у групу инвертибилних, односно $f_\sharp$ индукује хомоморфизам Пикарових група $f_\sharp : \operatorname{Pic}(R) \to \operatorname{Pic}(S)$. Тако закључујемо да додељивање Пикарове групе комутативном прстену са јединицом остварује функтор из категорије комутативних прстена са јединицом у категорију Абелових група.

Уводимо сада две важне класе модула.

Дефиниција 4.1. Модули M, N су *стабилно изоморфни* уколико постоји природан број n такав да је $M \oplus R^n \cong N \oplus R^n$.

Дефиниција 4.2. Модул M је *стабилно слободан* уколико је стабилно изоморфан слободном модулу R^n.

Из дефиниције коначно генерисаног пројективног модула је јасно да коначно генерисани *слободни* модули чине кофинални подмоноид Абеловог моноида $\mathbf{P}(R)$, где је операција задата директном сумом. Сходно томе, користећи теорему 3.3 можемо формулисати наредну теорему.

Теорема 4.2. *Важи следеће:*

1) *Сваки елемент у $K_0(R)$ је облика $[M] - [R^n]$ за коначно генерисан пројективан модул M. Елементи $[M] - [R^n]$ и $[N] - [R^m]$ су једнаки ако и само ако постоји k такав да је $M \oplus R^{m+k} \cong N \oplus R^{n+k}$.*

2) *$[M] = [N]$ у $K_0(R)$ ако и само ако су модули M, N стабилно изоморфни.*

3) *Морфизам полупрстена $\mathbb{N} \to K_0(R)$ који додељује $n \mapsto [R^n]$ индукује мономорфизам група $\mathbb{Z} \to K_0(R)$.*

Морфизам $\mathbb{Z} \to K_0(R)$ у теореми 4.2 јесте мономорфизам због теореме 1.9. Гротендикова група је дефинисана за прстене са јединицом, који не морају бити комутативни. Дефиниција је идентична наведеној, са изузетком да тада није добро дефинисано множење односно $\mathbf{P}(R)$ тада није полупрстен. Додатно, морфизам моноида $\mathbb{N} \to \mathbf{P}(R)$ тада не мора бити инјективан. За прстен за који је морфизам $\mathbb{N} \to \mathbf{P}(R)$ инјективан кажемо да испуњава својство *инваријантности базе* (видети [14]). Пример су прстени који допуштају хомоморфизам у тело. Видети [2], [7], [9], [14].

Слободни модули представљају једноставан пример пројективних модула, и једно од основних питања јесте да ли прстен има још пројективних модула. Уводимо стога следећу групу:

Дефиниција 4.3. *Редукована Гротендикова група* прстена R јесте количничка група

$$\widetilde{K}_0(R) = K_0(R) / \langle [R] \rangle .$$

Редукована Гротендикова група настаје тако што Гротендикову групу посечемо по подгрупи генерисаној слободним модулом R односно подгрупом која је слика горњег мономорфизма $\mathbb{Z} \to K_0(R)$. Тада из дефиниције имамо да важи еквиваленција следећих тврђења:

1) $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$

2) $\widetilde{K}_0(R) = 0$

3) Сваки коначно генерисан пројективан модул је стабилно слободан.

Уколико важи неко од ових, а самим тим и свако од ових тврђења, $K_0(R)$ је слободна циклична група са генератором $[R]$. То је испуњено у специјалном случају ако су сви коначно генерисани R-пројективни модули слободни.

4.2 Примери

Пример 4.1. Уколико је $R = \mathbb{F}$ једно поље, сви коначно генерисани пројективни модули су слободни па је по претходном $K_0(\mathbb{F}) \cong \mathbb{Z}$. Одредимо мало ближе овај изоморфизам. Посматрамо функцију димензије векторског простора

$$\dim : \mathbf{P}(\mathbb{F}) \to \mathbb{N}$$

где је $\dim([V]) = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ова функција је изоморфизам полупрстена, па из функторијалности Гротендикове групе индукује хомоморфизам прстена $K_0(\mathbb{F}) \to \mathbb{Z}$ који је изоморфизам. $\square$

Пример 4.2. Нека је прстен R домен са пољем разломака $\mathbb{F}$. Тада инклузија $i : R \to \mathbb{F}$ индукује морфизам $i_* : K_0(R) \to K_0(\mathbb{F})$ који када укомпонујемо са изоморфизмом из претходног примера добијамо $f : K_0(R) \to \mathbb{Z}$ одређен са

$$f([M]) = \dim_{\mathbb{F}}(M \otimes_R \mathbb{F})$$

односно

$$f([M]) = \rho(M)$$

за коначно генерисан пројективан модул M. Пошто је $f([R]) = 1$ то је ово пресликавање епиморфизам па се кратки тачан низ

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow K_0(R) \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

цепа односно важи изоморфизам

$$K_0(R) \cong \ker(f) \oplus \mathbb{Z}.$$

У том случају за језгро $\ker(f)$ такође кажемо да је редукована Гротендикова група домена R и с обзиром на теорему 4.2 важи да је

$$\ker(f) = \{[M] - [N] \in K_0(R) : \rho(M) = \rho(N)\}$$

односно посматрамо формалне разлике класа изоморфности коначно генерисаних пројективних модула истог ранга. □

Пример 4.3. Уколико је R главни домен, сви коначно генерисани пројективни R-модули су слободни па је по претходном $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$. Означимо са Q поље разломака домена R и уочимо функцију

$$\rho : \mathbf{P}(R) \to \mathbb{N}$$

дефинисану са $\rho([P]) = \dim_Q(M \otimes_R Q)$ што је тачно ранг модула P. Ова функција је изоморфизам полупрстена, па из функторијалности Гротендикове групе индукује изоморфизам прстена $K_0(R) \to \mathbb{Z}$. □

Пример 4.4. Уколико је R локални прстен, сви коначно генерисани пројективни R-модули су слободни па је по претходном $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$. Означимо са $\mathfrak{m}$ максимални идеал у R и посматрајмо фукнцију

$$\rho : \mathbf{P}(R) \to \mathbb{N}$$

дефинисану са $\rho([P]) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(P \otimes_R R/\mathfrak{m})$ што је ранг модула P. Ова функција индукује изоморфизам полупрстена, па из функторијалности Гротендикове групе индукује изоморфизам прстена $K_0(R) \to \mathbb{Z}$. □

Наводимо сада својство продуктибилности Гротендикове групе прстена, помоћу које ћемо моћи да је одредимо код још неких прстена (видети и [14], [10]). Најпре показујемо продуктибилност функтора $\mathbf{P}$.

Лема 4.1. *Нека су R_1, R_2 прстени и нека је $R = R_1 \times R_2$ њихов директни производ. Тада је*

$$\mathbf{P}(R) \cong \mathbf{P}(R_1) \times \mathbf{P}(R_2)$$

изоморфизам Абелових полупрстена.

Доказ. Посматрамо природне пројекције $\pi_1 : R \to R_1$ и $\pi_2 : R \to R_2$. Када помножимо индуковане, функтором $\mathbf{P}$, хомоморфизме Абелових полупрстена добијамо хомоморфизам Абелових полупрстена

$$F = (\pi_1)_\sharp \times (\pi_2)_\sharp : \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(R_1) \times \mathbf{P}(R_2)$$

за који желимо да покажемо да је бијекција. Приметимо прво да су R_1, R_2 коначно генерисани пројективни R-модули (одређени природним пројекцијама), и да је њихова R-модулска директна сума заправо $R_1 \oplus R_2 = R$. Покажимо инјективност пресликавања F. Нека је $F([M_1]) = F([M_2])$ односно важе изоморфизми

$$M_1 \otimes_R R_1 \cong M_2 \otimes_R R_1$$

$$M_1 \otimes_R R_2 \cong M_2 \otimes_R R_2.$$

Применом директне суме добијамо

$$(M_1 \otimes_R R_1) \oplus (M_1 \otimes_R R_2) \cong M_1 \otimes_R (R_1 \oplus R_2) \cong M_1 \otimes_R R \cong M_1$$

и потпуно аналогно

$$(M_2 \otimes_R R_1) \oplus (M_2 \otimes_R R_2) \cong M_2 \otimes_R (R_1 \oplus R_2) \cong M_2 \otimes_R R \cong M_2$$

што показује да је $M_1 \cong M_2$. Посматрајмо сада коначно генерисане пројективан R_1-модул M_1 и R_2-модул M_2 и поставимо $M = M_1 \times M_2$ који има природну структуру R-модула задату са

$$(r_1, r_2)(m_1, m_2) = (r_1 m_1, r_2 m_2).$$

M_1 и M_2 су R-модули са структуром индукованом пројекцијама, па је $M = M_1 \times M_2 = M_1 \oplus M_2$ једна R-модулска директна сума. Тада имамо

$$M \otimes_R R_1 = (M_1 \oplus M_2) \otimes_R R_1 \cong (M_1 \otimes_R R_1) \oplus (M_2 \otimes_R R_1).$$

Пошто је $M_1 \otimes_R R_1 \cong M_1$ уколико покажемо да је $M_1 \otimes_R R_2 = 0$ то ће следити $(\pi_1)_\sharp([M]) = [M_1]$. Уочимо стога $m_1 \in M_1$ и $r_2 \in R_2$. Тада имамо (у $M_1 \otimes_R R_2$)

$$m_1 \otimes r_2 = (1, r_2)(m_1 \otimes 1) = ((1,0) + (0, r_2))(m_1 \otimes 1) = 0$$

што смо и желели да покажемо. Потпуно је аналогно $(\pi_2)_\sharp([M]) = [M_2]$ што показује сурјективност пресликавања F и комплетира доказ. □

Теорема 4.3. *Нека су R_1, R_2 прстени и нека је $R = R_1 \times R_2$ њихов директни производ. Тада је*

$$K_0(R) \cong K_0(R_1) \times K_0(R_2)$$

изоморфизам комутативних прстена са јединицом.

Доказ. По леми 4.1 важи изоморфизам Абелових полупрстена $\mathbf{P}(R_1 \times R_2) \cong \mathbf{P}(R_1) \times \mathbf{P}(R_2)$, па по теореми 3.7 важе изоморфизми комутативних прстена са јединицом

$$K_0(R_1 \times R_2) = \mathcal{G}(\mathbf{P}(R_1 \times R_2)) \cong \mathcal{G}(\mathbf{P}(R_1)) \times \mathcal{G}(\mathbf{P}(R_2)) = K_0(R_1) \times K_0(R_2)$$

што смо и желели да покажемо. □

Индукцијом, помоћу претходне теореме, лако добијамо коначну продуктибилност Гротендикове групе, односно ако су $R_1, \ldots, R_n$ комутативни прстени са јединицом, тада је

$$K_0(R_1 \times \ldots \times R_k) \cong K_0(R_1) \times \ldots \times K_0(R_k)$$

изоморфизам комутативних прстена са јединицом.

Пример 4.5. Нека је R Артинов прстен. По структурној теореми о Артиновим прстенима (видети [1], [7]), прстен R се разлаже на директан производ локалних Артинових прстена $R \cong R_1 \times \ldots \times R_k$. По претходној теореми, тада је $K_0(R) \cong \mathbb{Z}^k$.

Уколико је $R = \mathbb{Z}_n$, прстен R је Артинов. Ако је $n = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ факторизација на просте факторе, по кинеској теореми о остацима је

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_r^{r_k}}$$

па како је ово директно разлагање на производ локалних прстена, то је $K_0(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}^k$ где је k број различитих простих фактора у факторизацији броја n. $\square$

Пример 4.6. Нека је $X = \{1, \ldots, n\}$ коначан скуп од n елемената. Поставимо $R = \mathcal{P}(X)$ при чему сабирање уводимо као симетричну разлику, а множење као пресек. Нула је празан скуп. Добијамо комутативан прстен са јединицом, који је Булов прстен. За елемент $A \in R$, идеал генерисан елементом A одговара партитивном скупу скупа A односно $\langle A \rangle = \{B \in R : B \subset A\}$. Према примеру 1.2, сваки коначно генерисани пројективан R-модул изоморфан је директној суми главних идеала. Уочимо $A \in R$, означимо $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и покажимо да постоји R-модулски изоморфизам

$$f : \langle A \rangle \to \langle \{a_1\} \rangle \times \ldots \times \langle \{a_k\} \rangle .$$

Дефинишемо природно

$$f(B) = (B \cap \{a_1\}, \ldots, B \cap \{a_k\}) .$$

Ово је један R-хомоморфизам, па да би био изоморфизам покажимо још да је мономорфизам, што је довољно јер су домен и кодомен коначни скупови са истим бројем елемената. Претпоставимо стога да је $f(B) = 0$ односно важи

$$B \cap \{a_1\} = \emptyset, \ldots, B \cap \{a_k\} = \emptyset.$$

Пошто је $B \subset A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $a_1, \ldots, a_k \notin B$ то мора бити $B = \emptyset$ односно $B = 0$ у $\langle A \rangle$. Означимо сада идеале

$$J_1 = \langle \{1\} \rangle, \ldots, J_n = \langle \{n\} \rangle .$$

Претходне чињенице нам дају да је сваки коначно генерисан пројективан R-модул M изоморфан директној суми

$$J_1^{l_1} \oplus \ldots \oplus J_n^{l_n}$$

при чему овде ознака $J_r^{l_r}$ означава директну суму идеала J_r са самим собом l_r пута. Покажимо сада још да су бројеви $l_1, \ldots, l_n$ јединствено одређени.

Нека су $i, j \in X$ различити. Тада је једини R-хомоморфизам $f : \langle \{i\} \rangle \to \langle \{j\} \rangle$ нула. Заиста, ако f није нула, то је $f(\{i\}) = \{j\}$. Међутим, пошто је f R-линеарно, то мора бити

$$f(\{i\} \cap \{i\}) = \{i\} \cap \{j\}$$

што није могуће јер је $\{i\} \cap \{j\} = \emptyset$ док је $f(\{i\}) = \{j\}$. Аналогно, сви морфизми $J_i^n \to J_j^m$ морају бити нула јер су координатни морфизми нула.

Претпоставимо коначно да имамо изоморфизам R-модула

$$f : J_1^{l_1} \oplus \ldots \oplus J_n^{l_n} \to J_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus J_n^{k_n}$$

За $i \in A$, сви $J_i^{l_i} \to J_1^{l_1} \oplus \ldots \oplus J_n^{l_n} \to J_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus J_n^{k_n} \to J_j^{k_j}$ су нула за $i \neq j$ по претходном, где је први хомоморфизам инклузија а последњи пројекција. Сходно томе, хомоморфизам f је одређен хомоморфизмима

$$J_1^{l_1} \to J_1^{k_1}, \ldots, J_n^{l_n} \to J_n^{k_n}$$

који морају бити изоморфизми јер је f изоморфизам. Сходно томе, важи

$$l_1 = k_1, \ldots, l_n = k_n.$$

Коначно можемо закључити да је

$$\mathbf{P}(R) = \left\{ \left[J_1^{k_1} \right] \oplus \ldots \oplus \left[J_n^{k_n} \right] : k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \right\} \to \mathbb{N}^n$$

одређен са

$$\left[J_1^{k_1} \right] \oplus \ldots \oplus \left[J_n^{k_n} \right] \mapsto (k_1, \ldots, k_n)$$

изоморфизам моноида. Последично, Гротендикова група прстена R је $K_0(R) \cong \mathbb{Z}^n$.

Напоменимо да смо до резултата могли доћи и користећи чињеницу да је коначан прстен Артинов. У случају Буловог прстена $R = \mathcal{P}\{1, \ldots, n\}$ разлагање на производ локалних прстена је тачно $R \cong \mathcal{P}(\{1\}) \times \ldots \times \mathcal{P}(\{n\})$ па је по теореми 4.3 горњи изоморфизам $K_0(R) \cong \mathbb{Z}^n$ и изоморфизам комутативних прстена са јединицом. □

Пример 4.7. Иако смо се овде ограничили на случај комутативних прстена, наводимо један некомутативан пример. Нека је G коначна група. Посматрамо њену $R = \mathbb{C}[G]$ *групну алгебру* над пољем комплексних бројева. Можемо узети и било које друго, алгебарски затворено поље карактеристике нула. Коначно генерисани модули над прстеном R одговарају коначним комплексним репрезентацијама групе G. По примеру 1.4, сви R-модули су пројективни. Из теорије репрезентација знамо да је свака коначна комплексна репрезентација групе G изоморфна јединственој директној суми иредуцибилних репрезентација. Додатно, број класа изоморфности коначних иредуцибилних репрезентација је коначан и једнак је броју r класа конјугације групе G. Ако означимо са $V_1, \ldots, V_r$ неизоморфне иредуцибилне репрезентације, имамо да је

$$\mathbf{P}(R) = \left\{ \left[V_1^{k_1} \right] \oplus \ldots \oplus \left[V_r^{k_r} \right] : k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Сходно томе адитивни изоморфизам $\mathbf{P}(R) \to \mathbb{N}^r$ одређен са $\left[V_1^{k_1} \right] \oplus \ldots \oplus \left[V_r^{k_r} \right] \mapsto (k_1, \ldots, k_r)$ индукује изоморфизам Абелових група $K_0(R) \cong \mathbb{Z}^r$. У општем случају, ово није изоморфизам прстена. За детаље о теорији репрезентација коначних група видети [5]. □

Укажимо сада на неке могуће редукције које олакшавају рачунање Гротендикове групе прстена.

Нека је I нилпотентан идеал прстена R. Посматрамо природну пројекцију $\pi : R \to R/I$ која индукује хомоморфизам полупрстена

$$\pi_\sharp : \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(R/I)$$

који је дефинисан са $\pi_\sharp([M]) = [M/IM]$. Пошто је I нилпотентан, он је садржан у нилрадикалу прстена R па је један радикалски идеал. Стога је по теореми 1.5 $\pi_\sharp$ инјективно пресликавање док је по теореми 1.8 $\pi_\sharp$ сурјективно пресликавање. Дакле, $\pi_\sharp$ је тада изоморфизам полупрстена, па пројекција π индукује изоморфизам Гротендикових група

$$\pi_* : K_0(R) \to K_0(R/I).$$

Уколико је прстен R Нетерин, тада је његов нилрадикал нилпотентан идеал према примеру 1.11 па следећа теорема важи директно.

Теорема 4.4. *Нека је прстен R Нетерин. Тада пројекција $\pi : R \to R/N(R)$ индукује изоморфизам $\pi_* : K_0(R) \to K_0(R/N(R))$.*

Пример 4.8. Посматрајмо поново прстен $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Нека је $n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ факторизација на просте. Класа остатка $[m]$ је нилпотентан елемент ако и само ако је $m^r \in n\mathbb{Z}$ за неки $r \geqslant 1$ односно ако и само ако $n \mid m^r$. Тада сваки прост фактор од n дели m^r па самим тим дели и m. Стога производ $p_1 \dots p_k$ дели број m. И обрнуто, ако $p_1 \dots p_k \mid m$ тада пошто $n \mid (p_1 \dots p_k)^{r_1 \dots r_k}$ следи да $n \mid m^{r_1 \dots r_k}$ одакле закључујемо да је нилрадикал прстена $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ идеал $p_1 \dots p_k \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Стога је

$$\mathbb{Z}_n/N(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}/p_1 \dots p_k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$$

где последњи изоморфизам следи из кинеске теореме о остацима. Сходно томе, пошто је $\mathbb{Z}_n$ Нетерин прстен, по теореми 4.4 важи да је

$$K_0(\mathbb{Z}_n) \cong K_0(\mathbb{Z}_{p_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k})$$

што је по теореми 4.3 изоморфно са $K_0(\mathbb{Z}_{p_1}) \times \dots \times K_0(\mathbb{Z}_{p_k}) \cong \mathbb{Z}^k$ јер су $\mathbb{Z}_{p_1}, \dots, \mathbb{Z}_{p_k}$ поља. $\square$

Уведимо сада још једну класу модула, која се појављује у [14].

Дефиниција 4.4. Нека је R прстен. Модул M над прстеном R је *слободан по компонентама* уколико постоји разлагање $R = R_1 \times \dots \times R_k$ на директан производ прстена такав да важи $M \cong R_1^{n_1} \times \dots \times R_k^{n_k}$ за неке $n_1, \dots, n_k \geqslant 0$.

Означимо са $[\operatorname{Spec}(R), \mathbb{N}]$ скуп непрекидних функција из спектра прстена R са топологијом Зариског при чему на скупу природних бројева $\mathbb{N}$ посматрамо дискретну топологију. За доказ наредне теореме погледати [1], [10] и [14].

Теорема 4.5. *Нека је R комутативан прстен са јединицом. Уколико је $f : \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{Z}$ непрекидна функција, тада функција f узима коначно много вредности $n_1, \dots, n_k$ и постоји разлагање прстена R на директан производ прстена $R \cong R_1 \times \dots \times R_k$ при чему је инверзна слика $f^{-1}(\{n_i\})$ у природној бијекцији са $\operatorname{Spec}(R_i)$ за све $i = 1, \dots, k$.*

Дакле, свака непрекидна функција из спектра прстена R у прстен целих $\mathbb{Z}$ индукује разлагање прстена R на директан производ прстена $R = R_1 \times \dots \times R_k$ као и разлагање спектра на дисјунктну унију скупова који одговарају спектрима прстена $R_1, \dots, R_k$.

Пример 4.9. Нека је R прстен и M коначно генерисан пројективан R-модул. Као што смо видели у теореми 1.11, ранг коначно генерисаног пројективног R-модула је елемент скупа $[\operatorname{Spec}(R), \mathbb{N}]$ па по претходној теореми индукује разлагање прстена R на директан производ прстена $R_1 \times \dots \times R_k$ при чему је спектар $\operatorname{Spec}(R)$ дисјунктна унија спектара $\operatorname{Spec}(R_i)$ за $i = 1, \dots, k$. По теореми 4.1 за све $i = 1, \dots, k$ постоји коначно генерисан пројективан R_i-модул M_i такав да је $M \cong M_1 \times \dots M_k$. Из теореме 4.1 важи изоморфизам R_i-модула $M \otimes_R R_i \cong M_i$ и његов ранг је константан, за све $i = 1, \dots, k$. $\square$

Претходни пример указује на то да је често довољна рестрикција на коначно генерисане пројективне модуле константног ранга. Покажимо сада да се слободни по компонентама модули прстена добијају тачно од непрекидних функција из спектра са вредностима у скупу природних бројева (видети и [14]).

Теорема 4.6. *Нека је R прстен. Тада је скуп* $[\mathrm{Spec}\,(R)\,,\mathbb{N}]$ *у бијекцији са слободним по компонентама R-модулима.*

Доказ. Уколико је задата непрекидна функција $f \in [\mathrm{Spec}\,(R)\,,\mathbb{N}]$, по теореми 4.5 она узима коначно много вредности $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ и индукује разлагање на директан производ прстена $R = R_1 \times \ldots \times R_k$. Функција f тако дефинише слободан по компонентама R-модул

$$R^f = R_1^{n_1} \times \ldots \times R_k^{n_k}.$$

Са друге стране, нека је задато разлагање $R = R_1 \times \ldots \times R_k$ на директан производ прстена и слободан по компонентама модул $M = R_1^{n_1} \times \ldots \times R_k^{n_k}$. Он је коначно генерисан пројективан R-модул јер је за $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ и модул $N = R_1^{n-n_1} \times \ldots \times R_k^{n-n_k}$ испуњено $M \oplus N \cong R^n$. Сходно томе добро је дефинисана његова функција ранга ρ_M која је елемент скупа $[\mathrm{Spec}\,(R)\,,\mathbb{N}]$. Спектар $\mathrm{Spec}\,(R)$ је дисјунктна унија подскупова $A_1, \ldots, A_k$ при чему је A_i у природној бијекцији са $\mathrm{Spec}\,(R_i)$ и на A_i функција ранга модула M узима константну вредност n_i за све $i = 1, \ldots, k$. То комплетира доказ. $\square$

Нека је сада R фон Нојман регуларан прстен. У примеру 1.3 смо видели да је сваки коначно генерисан пројективан R-модул изоморфан суми коначно много идеала, од којих је сваки генерисан идемпотентним елементом. Стога је наредна лема од значаја.

Лема 4.2. *Нека је R прстен и нека су $e_1, \ldots, e_k \in R$ идемпотентни елементи. Тада је R-модул $M = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_k \rangle$ слободан по компонентама.*

Доказ. Довољно је показати за директну суму два идеала генерисаним идемпотентним елементима, јер општи случај једноставно следи индукцијом по броју сабирака k. Нека су стога $e, f \in R$ идемпотентни. Полазимо од разлагања прстена R на директан производ прстена

$$R \cong Re \times R\,(1-e)$$

где је $Re = \langle e \rangle$ али смо га сада означили са Re јер га посматрамо као прстен са јединицом e. Пошто су елементи $e, f \in R$ идемпотентни то је и $(1-e)\,f \in R\,(1-e)$ идемпотентан па индукује разлагање на директан производ прстена

$$R\,(1-e) \cong R\,(1-e)\,f \times R\,(1-e)\,(1-f)\,.$$

Са друге стране, пошто је ef идемпотентан и у Re и у Rf то он индукује разлагања на директне производе прстена

$$Re \cong Ref \times R\,(1-f)\,e$$

$$Rf \cong Ref \times R\,(1-e)\,f.$$

Специјално, добијамо разлагање на директан производ прстена

$$R \cong Ref \times R\,(1-e)\,f \times R\,(1-f)\,e \times R\,(1-e)\,(1-f)\,.$$

Означимо сада прстене $R_1 = Ref$, $R_2 = R\,(1-f)\,e$, $R_3 = R\,(1-e)\,f$ и $R_4 = R\,(1-e)\,(1-f)$. Тада је $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4$ као и $M \cong R_1^2 \times R_2 \times R_3$ што показује да је M по компонентама слободан и комплетира доказ. $\square$

Сада можемо доказати следећу теорему (видети и [14]).

Теорема 4.7. *Нека је R фон Нојман регуларан прстен. Тада је* $K_0(R) \cong [\mathrm{Spec}(R), \mathbb{Z}]$.

Доказ. У примеру 1.3 смо видели да је коначно генерисан пројективан R-модул изоморфан суми идеала $\langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_k \rangle$ где су $e_1, \ldots, e_k$ идемпотентни. Стога је по леми 4.2 R-модул M слободан по компонентама па је по теореми 4.6 $\mathbf{P}(R)$ у бијекцији са $[\mathrm{Spec}(R), \mathbb{N}]$. Пошто је та бијекција $\mathbf{P}(R) \to [\mathrm{Spec}(R), \mathbb{N}]$ дефинисана функцијом ранга, по теореми 1.12 она је изоморфизам Абелових полупрстена. Сходно томе, на основу примера 3.3 следи да је $K_0(R) \cong [\mathrm{Spec}(R), \mathbb{Z}]$ што смо и желели да покажемо. $\square$

Дакле, Гротендикова група фон Нојман регуларног прстена R је слободна Абелова група над његовим спектром. Искористићемо сада то да покажемо да Гротендикова група у општем случају не комутира са бесконачним директним производом (видети и [14]).

Пример 4.10. Нека је $\mathbb{F}$ поље. Пребројиви директни производ $R = \prod_{i \geqslant 0} \mathbb{F}$ је фон Нојман регуларан прстен према примеру 1.3. По теореми 4.7 његова Гротендикова група јесте $[\mathrm{Spec}(R), \mathbb{Z}]$. Пошто су максимални идеали прстена R тачно пребројиви производи поља $\mathbb{F}$ са изузетком једног фактора који је нула, то је $[\mathrm{Spec}(R), \mathbb{Z}]$ изоморфно прстену функција $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ које узимају коначно много вредности што је слободна Абелова група. Са друге стране имамо изоморфизам

$$\prod_{i \geqslant 0} K_0(\mathbb{F}) \cong \prod_{i \geqslant 0} \mathbb{Z}$$

што је изоморфно прстену свих функција $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ и то није слободна Абелова група па није изоморфна са $K_0(R)$. $\square$

4.3 Трансфер

У овом одељку ћемо указати на један занимљив хомоморфизам између Гротендикових група прстена који се може дефинисати и у контексту хомологије групе али и коначног наткривања у топологији (видети [7] и [14]). Нека су R, S прстени и нека је $f : R \to S$ хомоморфизам прстена. Тада је прстен S природно модул над прстеном R, и дефинисали смо индуковано пресликавање $f_* : K_0(R) \to K_0(S)$ које је одређено са $f_*([M]) = [M \otimes_R S]$. Пресликавање f_* је хомоморфизам прстена, па $K_0(S)$ на природан начин постаје $K_0(R)$-модул са структуром $r \cdot x = f_*(r)\, x$.

Претпоставимо сада да је S коначно генерисан пројективан R-модул. Тада је добро дефинисан хомоморфизам Абелових полупрстена $\mathbf{P}(S) \to \mathbf{P}(R)$ дефинисано са $[M] \mapsto [M]$ где је M један R-модул са структуром $r \cdot m = f(r) \cdot m$. Заиста, пошто је M коначно генерисан пројективан S-модул то постоји S-модул N такав да је $M \oplus N \cong S^n$ што је наравно и један R-изоморфизам. Стога је M директан сабирак пројективног R-модула па је и он пројективан R-модул. Сходно томе, из универзалности Гротендикове конструкције, добро је дефинисано пресликавање

$$f^* : K_0(S) \to K_0(R)$$

одређено са $f^*([M]) = [M]$ које је хомоморфизам Абелових група.

Дефиниција 4.5. За хомоморфизам прстена $f : R \to S$ такав да је S коначно генерисан пројективан R-модул, хомоморфизам $f^* : K_0(S) \to K_0(R)$ називамо *трансфер*.

Пример 4.11. Нека је R прстен и $e \in R$ идемпотентан елемент. Прстен Re је тада коначно генерисан пројективан R-модул при хомоморфизму прстена $f : R \to Re$, $f(r) = re$ јер је изоморфизам прстена $R \cong Re \times R(1-e)$ уједно и изоморфизам R-модула. □

Теорема 4.8. *Нека су R, S прстени и $f : R \to S$ хомоморфизам прстена такав да је S коначно генерисан пројективан R-модул. Тада за $x \in K_0(S)$, $y \in K_0(R)$ важи формула*

$$f^*(x \cdot f_*(y)) = f^*(x) \cdot y.$$

Доказ. Нека је M коначно генерисан R-модул и P коначно генерисан S-модул. Пошто су то њихове класе изоморфности генератори одговарајућих Гротендикових група, довољно је показати да за њих важи наведена формула. Стога рачунамо

$$f^*([P] \cdot f_*([M])) = f^*([P] \cdot [M \otimes_R S]) = f^*([P \otimes_S (M \otimes_R S)]) = [P \otimes_R M]$$

док је са друге стране

$$f^*([P]) \cdot [M] = [P] \cdot [M] = [P \otimes_R M]$$

што комплетира доказ. □

Формулу из теореме 4.8 називамо још и *формула пројекције* и када је запишемо у облику $f^*(y \cdot x) = y \cdot f^*(x)$ за $x \in K_0(S)$ и $y \in K_0(R)$ закључујемо заправо да је трансфер један хомоморфизам $K_0(R)$-модула.

Пример 4.12. Уколико у формулу пројекције из теореме 4.8 поставимо да је $x = 1 = [R]$ неутрал прстена $K_0(R)$ то видимо да је за све $y \in K_0(R)$ испуњено

$$f^*(f_*(y)) = f^*(1) \cdot y$$

односно композиција $f^* \circ f_*$ је задата множењем са $f^*(1) = [S]$ при чему овде S посматрамо као коначно генерисан пројективан R-модул. □

Пример 4.13. Одредимо и композицију $f_* \circ f^*$. Пошто су $[M]$ за коначно генерисане пројективне S-модуле генератори групе $K_0(S)$ и радимо са хомоморфизмима група, то је довољно да одредимо слику генератора. Стога имамо да је композиција $f_* \circ f^*$ одређена са $(f_* \circ f^*)([M]) = f_*(f^*([M])) = f_*([M]) = [M \otimes_R S]$. □

Пример 4.14. Нека је $f : R \to S$ хомоморфизам прстена при чему је S слободан R-модул ранга n. То је случај увек за коначно раширење поља $R \subset S$. Тада је композиција $f^* \circ f_*$ множење са $[S] = [R^n]$ односно множење са n у групи $K_0(R)$. Директна последица је да ако је $x \in K_0(R)$ индукованог хомоморфизма f_*, то применом трансфера закључујемо да је $f^*(f_*(x)) = nx = 0$ односно елемент x је реда k при чему k дели број n. Уколико сада применимо тензорисање са пољем $\mathbb{F}$ карактеристике нула или простог броја p који не дели број n закључујемо да f индукује мономорфизам $\bar{f}_* : K_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} \to K_0(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$. □

4.4 Веза са Пикаровом групом

Нека је R прстен. Пошто су по теореми 2.1 инвертибилни модули коначно генерисани пројективни модули ранга један, то је добро дефинисан хомоморфизам група

$$j : \mathrm{Pic}(R) \to K_0(R)^\times$$

одређен са $f([M]) = [M]$. У доказу наредне леме ћемо користити основна својства спољашњег производа која сада наводимо а чији се докази могу погледати у [5].

Теорема 4.9. *Нека је R прстен, M, N R-модули и $k \geqslant 0$. Тада је испуњено:*

1) $\wedge^0(M) = R$, $\wedge^1(M) = M$.

2) *Ако је p прост идеал прстена R тада важи изоморфизам R_p-модула*

$$\wedge^k(M_p) \cong \left(\wedge^k(M)\right)_p .$$

3) *Ако је $M \cong R^n$ тада је за $n < k$ испуњено $\wedge^k(M) = 0$ док је за $n \geqslant k$ испуњено $\wedge^k(M) \cong R^{\binom{n}{k}}$.*

4) *Важи изоморфизам*

$$\wedge^k(M \oplus N) \cong \bigoplus_{i=0}^{k} \left(\wedge^i(M) \otimes \wedge^{n-i}(N)\right) .$$

Лема 4.3. *Хомоморфизам $j : \operatorname{Pic}(R) \to K_0(R)^{\times}$ је мономорфизам.*

Доказ. Претпоставимо да је $j([M]) = j([N])$ односно да су инвертибилни модули M, N стабилно изоморфни. Тада постоји $n \geqslant 1$ такав да је

$$M \oplus R^n \cong N \oplus R^n .$$

Када применимо $(n+1)$-ти спољашњи производ добијамо

$$\wedge^{n+1}(M \oplus R^n) \cong \wedge^{n+1}(N \oplus R^n) .$$

Пошто су M, N константног ранга један, то за $k \geqslant 2$ и p прост идеал у R по теореми 4.9 важи

$$0 = \wedge^k(R_p) \cong \wedge^k(M_p) \cong \left(\wedge^k(M)\right)_p .$$

Следи да је $\left(\wedge^k(M)\right)_p = 0$ па пошто је изоморфизам локално својство, то је за $k \geqslant 2$ испуњено $\wedge^k(M) = 0$. Сходно томе, по теореми 4.9 је

$$\wedge^{n+1}(M \oplus R^n) \cong \left(\wedge^0(M) \otimes \wedge^{n+1}(R^n)\right) \oplus \left(\wedge^1(M) \otimes \wedge^n(R^n)\right) \cong M .$$

Аналогно је и $\wedge^{n+1}(N \oplus R^n) \cong N$ одакле је $M \cong N$ што комплетира доказ. □

Важну везу Гротендикове групе са Пикаровом групом добијамо у случају када је прстен R Дедекиндов домен. По теореми 2.6 важи изоморфизам $\operatorname{Cl}(R) \cong \operatorname{Pic}(R)$. По теореми 2.5, његови идеали су коначно генерисани пројективни модули па по леми 1.2 следи да је сваки коначно генерисан пројективан R-модул изоморфан коначној суми идеала. Стога се поставља питање када су две коначне суме идеала прстена R изоморфне. Наредна теорема Штајница даје одговор на то питање (видети [7], [9], [10]).

Теорема 4.10. *За идеале* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ *и* $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_l$ *Дедекиндовог домена* R *важи да је*

$$\mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k \cong \mathfrak{b}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{b}_l$$

ако и само ако је $k = l$ *и*

$$\{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k\} = \{\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_l\}.$$

Додатно, за ненула идеале $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *важи изоморфизам* R*-модула* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \cong R \oplus \mathfrak{ab}$.

Нека је сада M коначно генерисан ненула пројективан ненула R-модул. Тада постоје ненула идеали $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ такви да је

$$M \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$$

што по теореми Штајница даље имплицира да је

$$M \cong \mathfrak{a} \oplus R^{n-1}$$

где је $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ ненула идеал прстена R. Пошто су по теореми 2.5 ненула идеали у R инвертибилни, то су они ранга 1 по теореми 2.1 па из адитивности ранга закључујемо да је у наведеном облику $\rho(M) = n$. Сходно томе имамо наредну теорему.

Теорема 4.11. *Нека је* R *Дедекиндов домен. Тада је добро дефинисано*

$$\phi : K_0(R) \to \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(R)$$

одређено са

$$\phi\left(\left[\mathfrak{a} \oplus R^{n-1}\right]\right) = (n, \{\mathfrak{a}\})$$

и остварује адитивни изоморфизам Абелових група. Додатно, ако су $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *ненула идеали у* R*, тада важи да је*

$$([\mathfrak{a}] - [R])([\mathfrak{b}] - [R]) = 0.$$

Доказ. Покажимо још други део тврђења. По дефиницији множења у Гротендиковој групи имамо да је

$$([\mathfrak{a}] - [R])([\mathfrak{b}] - [R]) = [(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \oplus (R \otimes R)] - [(\mathfrak{a} \otimes R) \oplus (\mathfrak{b} \otimes R)]$$

По теореми 2.5 је $\mathfrak{ab} \cong \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ док је по теореми Штајница $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \cong R \oplus \mathfrak{ab}$ па је

$$[(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \oplus (R \otimes R)] - [(\mathfrak{a} \otimes R) \oplus (\mathfrak{b} \otimes R)] = [\mathfrak{ab} \oplus R] - [\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}] = 0$$

што смо и желели да покажемо. □

Како су по теореми 2.6 за Дедекиндов домен његова Пикарова група и класна група идеала изоморфне, добијамо директну последицу претходне теореме.

Последица 4.11.1. *Нека је* R *Дедекиндов домен. Тада важи изоморфизам*

$$K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(R).$$

Наводимо сада пример прстена који није Деденикдов али важи изоморфизам из претходне последице.

Пример 4.15. Нека је K поље и $R = K[X,Y]/\langle Y^2 - X^3\rangle$. Прстен R јесте домен јер је изоморфан потпрстену домена $K[t]$ по примеру 2.5. Он није Дедекиндов домен јер није интегрално затворен. Заиста, посматрајмо моничан полином

$$p(T) = T^2 - [X] \in R[T]$$

чија је нула у пољу разломака домена R одређена са $\alpha = \frac{[Y]}{[X]}$ јер је

$$p(\alpha) = \left(\frac{[Y]}{[X]}\right)^2 - [X] = \frac{[Y^2]}{[X^2]} - [X] = \frac{[X^3]}{[X^2]} - [X] = 0$$

док α није елемент прстена R. Показује се (видети [14]) да је за овај прстен испуњено

$$K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic}(R)$$

одакле је $K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus K$ према примеру 2.5. $\square$

За крај овог одељка, наводимо следећу теорему која је далеко од очигледног.

Теорема 4.12. *За сваку Абелову групу G постоји комутативан прстен са јединицом R такав да важи*

$$K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus G$$

Доказ. Нека је G Абелова група. По теореми 2.13 постоји Дедекиндов домен R такав да је $\operatorname{Cl}(R) \cong G$. Сходно томе, по теореми 4.11 је испуњено $K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus G$. $\square$

4.5 Закључак

Гротендикова група је прва инваријанта прстена коју проучава алгебарска K-теорија. У овој глави смо видели нека њена својства и кроз разне примере како се она може одредити. Оно што је за њу карактеристично је да се за различите прстене поклапа са њиховим другим важним инваријантама. Као што смо видели, на пример, у случају Дедекиндовог домена, њено израчунавање се своди на израчунавање класне групе идеала, док се у случају прстена непрекидних комплексних функција $C(X)$ на компактном Хаусдорфовом простору, своди на тополошку K-теорију која проучава векторска раслојења над простором X и она је искоришћена за решење чувеног проблема о паралелизабилности сфере.

За дати прстен R, израчунавање групе $K_0(R)$ није једноставно. Виша алгебарска K-теорија уопштава инваријанте које прстену R додељује Гротендикова група, тако што функторијално додељује низ група $K_n(R)$ прстену за $n \geqslant 0$ и њихово проучавање је један од основних праваца будућих истраживања. Други правац јесте да се, уместо прстена R и њему придруженог Абеловог моноида $\mathbf{P}(R)$, проучава категорија $\mathcal{C}$ са одређеном структуром, на пример симетрична моноидална, тачна или Абелова категорија, тако да класе изоморфних објеката те категорије чине Абелов моноид чија се Гротендикова група потом посматра.

Литература

[1] M. Atyah and I. G. McDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Weslez, 1969.

[2] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.

[3] L. Claborn, *Every abelian group is class group*, Pacific J. Math. **15** (1965), 805-808

[4] F. DeMeyer, E. Ingraham, *Separable Algebras Over Commutative Rings*, Lecture Notes in Mathematics, 181, Springer - Verlag, 1971.

[5] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, Wiley, 3rd edition, 2003.

[6] R. M. Fossum, *The Divisor Class Group of a Krull Domain*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.

[7] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-theory*, Annals of Math. Studies 72, Princeton Univ. Press, 1971.

[8] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Massachusetts, 1966.

[9] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and Its Applications*, Graduate Texts in Mathematics, 147, Springer-Verlag, 1994.

[10] J.R. Silvester, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Chapman and Hall Mathematics Series, Chapman and Hall, London, 1981.

[11] A. Steger, *Diagonability of idempotent matrices*, Pacific J. Math. **19** (1966), 535-542

[12] R. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 264-277

[13] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Univ. Press, 1994.

[14] C. Weibel, *The K-book: An Introduction to Algebraic K-theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 145, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[15] Г. Ђанковић, *Теорија бројева*, Математички факултет, Београд, 2013.

Биографија аутора

Далибор Даниловић рођен је 04. августа 1998. у Ужицу. Дипломирао је на Математичком факултету 2021. године на смеру Теоријска математика и примене са просечном оценом 9,43. На истом факултету на смеру Теоријска математика и примене уписасао је мастер студије 2021. године. Од 2021. године запослен је на Математичком факултету као сарадник у настави.