

Алгебра 2М

Задаци

Групе

1. Нека је G група, $N \triangleleft G$ и $H \leq G$.

- 1) Показати да је NH група.
- 2) Показати да важи $N \cap H \triangleleft H$ и $N \triangleleft NH$.
- 3) Показати *другу теорему о изоморфизму*:

$$NH/N \cong H/(N \cap H).$$

2. Нека је G група, $N, K \triangleleft G$ и $N \leq K$.

- 1) Показати да је $K/N \triangleleft G/N$.
- 2) Показати *трећу теорему о изоморфизму*:

$$(G/N)/(K/N) \cong G/K.$$

3. Нека је H подгрупа симетричне групе \mathbb{S}_n која садржи непарну пермутацију f .

- 1) Показати да важи изоморфизам $H/(H \cap \mathbb{A}_n) \cong \mathbb{S}_n/\mathbb{A}_n$.
- 2) Показати да H садржи једнак број парних и непарних пермутација.

4. Посматрајмо подгрупу $V = \{\epsilon, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ групе \mathbb{S}_4 . Показати да важи изоморфизам $\mathbb{S}_4/V \cong \mathbb{S}_3$.

5. 1) (*Факторијел теорема*) Нека је G група и H њена подгрупа коначног индекса $[G : H] = n$. Показати да постоји подгрупа $N \triangleleft G$ таква да важи $N \leq H$ и

$$[G : N] \mid n!.$$

- 2) Показати да ако је G коначна група и $p \mid |G|$ је најмањи прост делилац њеног реда, важи да је свака подгрупа индекса p нормална у G .

6. Нека је G група. За елементе $g, h \in G$ дефинишемо њихов комутатор као

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Извод групе G је подгрупа

$$G' = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$$

генерисана комутаторима.

- 1) Показати да је $G' \triangleleft G$ и да је количничка група $G^{ab} = G/G'$ Абелова група, коју називамо абелизација групе G .
- 2) Нека су G и N групе. Показати да важи $(G \times N)' = G' \times N'$ и $(G \times N)^{ab} \cong G^{ab} \times N^{ab}$.

- 3) (*Универзалност абелизације*) Показати да за сваку Абелову групу A и хомоморфизам група $f : G \rightarrow A$ постоји јединствени хомоморфизам $\hat{f} : G^{ab} \rightarrow A$ такав да важи $\hat{f} \circ \pi = f$ где је $\pi : G \rightarrow G^{ab}$ природна пројекција. Последишно, за подгрупу $K \triangleleft G$ важи да је G/K Абелова група ако и само ако важи $G' \leq K$.
- 4) Одредити извод и абелизацију за сваку од следећих група $\mathbb{S}_n, \mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$.
- 5) Нека је p прост број и G неабелова група реда p^3 . Показати да важи $G' = Z(G)$.
7. За групу G дефинишемо њене *више изводе* индуктивно као $G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$, за све $n \geq 1$. Група G је *решива* ако постоји број $n \geq 1$ такав да је $G^{(n)} = \{e\}$.
- 1) Показати да ако је $H \triangleleft G$, важи да је и $H' \triangleleft G$. Последишно, виши изводи групе G су њене нормалне подгрупе.
- 2) Показати да је група G решива ако и само ако важи да постоји коначан низ подгрупа
- $$\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$$
- такав да је H_{i+1}/H_i Абелова група, за све $i = 0, \dots, n-1$.
- 3) Показати да је подгрупа решиве групе решива група.
- 4) Показати да је хомоморфна слика решиве групе решива група. Последишно, количник решиве групе је решива група.
- 5) Показати да ако је $N \triangleleft G$ таква да су групе N и G/N решиве, тада је и G решива група. Последишно, ако су G_1 и G_2 решиве групе, тада је и производ $G_1 \times G_2$ решива група.
- 6) Нека је p прост број. Показати да су p -групе решиве.
- 7) Испитати решивост сваке од група $\mathbb{S}_n, \mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$.
8. Нека је G група.
- 1) Ако су групе $M \triangleleft G$ и $N \triangleleft G$ решиве, показати да је и група MN решива.
- 2) Ако су H_1, \dots, H_n нормалне решиве подгрупе групе G , показати да постоји решива нормална подгрупа H таква да важи $H_i \leq H$, за све $i = 1, \dots, n$.
- 3) Ако за $M \triangleleft G$ и $N \triangleleft G$ важи да су групе G/M и G/N решиве, показати да је и група $G/(M \cap N)$ решива.
9. 1) Показати да група $G = \mathbb{A}_5$ нема подгрупе индекса 2, 3, 4. Одредити потом подгрупу групе G индекса 5.
- 2) Показати да је група $G = \mathbb{A}_5$ генерисана елементима $\pi = [1, 2][3, 4]$ и $\tau = [1, 3, 5]$.
- 3) Нека је $n \geq 5$. Показати да је \mathbb{A}_n једина нетривијална нормална подгрупа групе \mathbb{S}_n .
10. Нека су N и H групе и нека је $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ хомоморфизам група. На скупу $G = N \times H$ дефинишемо операцију

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \phi(h_1)(n_2), h_1 h_2).$$

- 1) Показати да је (G, \cdot) једна група коју називамо *полудиректни производ* група N и H при хомоморфизму ϕ , у ознаци $G = N \rtimes_{\phi} H$.
- 2) Показати да је $\mathcal{N} = N \times \{e\}$ нормална подгрупа од G као и да је $\mathcal{H} = \{e\} \times H$ подгрупа од G .
- 3) Показати да важи $G = \mathcal{N}\mathcal{H}$ и $\mathcal{N} \cap \mathcal{H} = \{e\}$.
- 4) Показати да се сваки елемент $g \in G$ јединствено може раставити као $g = xy$ за елементе $x \in \mathcal{N}$ и $y \in \mathcal{H}$.
- 5) Нека је T група таква да постоје њене подгрупе $K \triangleleft T$ и $L \leq T$ такве да је $KL = T$ и $K \cap L = \{e\}$. Показати да је тада $T \cong K \rtimes_{\phi} L$ за неки хомоморфизам $\phi : L \rightarrow \text{Aut}(K)$.

11. Нека је G група реда mn таква да постоји елемент u реда m , постоји елемент v реда n , $G = \langle u, v \rangle$ и за неко l важи $uvu^{-1} = v^l$. Показати да је тада

$$G \cong \langle x, y \mid x^m = y^n = e, xyx^{-1} = y^l \rangle.$$

12. Нека је $n \geq 2$ непаран број, $N = \langle a \rangle$ циклична група реда n и $H = \langle b, c \rangle$ Клајнова група. Нека је још $f : N \rightarrow N$ аутоморфизам задат са $f(a) = a^{-1}$. Ако је $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ хомоморфизам одређен са $\phi(b) = 1_N$ и $\phi(c) = f$, показати да је тада $N \rtimes_{\phi} H \cong \mathbb{D}_{2n}$.

13. 1) Нека је N произвољна група, H циклична група и $\phi, \psi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ мономорфизми. Ако је $\phi(H) = \psi(H)$, показати да важи $N \rtimes_{\phi} H \cong N \rtimes_{\psi} H$.

2) Нека су p и q различити прости бројеви. Одредити све полудиректне производе $N \rtimes_{\phi} H$ ако је $N = \langle y \rangle$ циклична група реда p и $H = \langle x \rangle$ је циклична група реда q .

3) Одредити све полудиректне производе $N \rtimes_{\phi} H$ ако је $N = \langle y \rangle$ циклична група реда 7 и H је група реда 4.

14. Показати да кватернионска група $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ није изоморфна ниједном полудиректном производу.

15. Нека су $p < q < r$ прости бројеви.

1) Показати да за све $k \geq 1$, група G реда pq^k није проста и јесте решива.

2) Показати да група G реда p^2q није проста и јесте решива.

3) Показати да група G реда p^2q^2 није проста и јесте решива.

4) Показати да група G реда pqr није проста и јесте решива.

5) Показати да група G реда $8p$ није проста и јесте решива.

16. Показати да је група G реда 255 циклична.

17. Нека је G група реда $2^2 \cdot 19 \cdot 37$.

1) Показати да G има нормалну подгрупу реда $19 \cdot 37$.

2) Показати да G има подгрупу индекса 2.

18. Нека су p и q произвољни прости бројеви. Одредити до на изоморфизам све групе реда pq .

19. Одредити до на изоморфизам све групе реда 30.

20. Нека је G коначна група и $p \mid |G|$ прост делилац. Ако су H и K две различите S_p -подгрупе од G , показати да HK није подгрупа од G .

21. Нека је G коначна проста група, која за сваки прост делилац p има највише шест S_p -подгрупа. Показати да је група G циклична.

22. Нека су p и q различити прости бројеви и G група реда p^3q чија ниједна Силовљева подгрупа није нормална. Одредити ред групе G .

23. Нека је G коначна група и $p \mid |G|$ прост делилац. Ако постоји аутоморфизам $\phi \in \text{Aut}(G)$ реда p , показати да постоји S_p -подгрупа $H \leq G$ таква да важи $\phi(H) = H$.

24. Нека је G коначна група, $p \mid |G|$ прост делилац и $N \triangleleft G$ нормална подгрупа. Показати да је:

$$\text{Syl}_p(G/N) = \{HN/N \mid H \in \text{Syl}_p(G)\}.$$

25. 1) Нека је G проста група, $k > 1$ и $H \leq G$ индекса k . Показати да је тада $G \leq S_k$.

2) Нека је $k > 1$ и p прост број такав да $p \mid k!$ и $p^2 \nmid k!$. Ако је H једна S_p -подгрупа групе S_k , показати да важи:

$$|N_{S_k} H| = p(p-1)(k-p)!.$$

3) Показати да група G реда $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ није проста.

4) Показати да група G реда 396 није проста.

Прстени

1. Показати да се на $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ не може задати множење тако да добијена структура буде комутативан прстен са јединицом.
2. Нека је R прстен. Елемент $x \in R$ је делитељ нуле ако постоји елемент $y \neq 0$ такав да је $xy = 0$. Претпоставимо да прстен R има тачно $n \geq 2$ делитеља нуле. Показати да је R коначан прстен са највише n^2 елемената.
3. Нека је D домен. Ако за елементе $a, b \in D$ постоје узајамно прости бројеви $m \geq 1$ и $n \geq 1$ такви да важи $a^n = b^n$ и $a^m = b^m$, показати да је тада $a = b$.
4. Нека су R и S прстени. Одредити све просте и максималне идеале прстена $T = R \times S$.
5. Нека је D домен. Показати да је идеал $\langle Y^3 - X^5 \rangle$ прстена $D[X, Y]$ прост.
6. Одредити све $a \in \mathbb{Z}_5$ за које је прстен $\mathbb{Z}_5[X] / \langle X^3 + X^2 + aX + 1 \rangle$ поље.
7. Нека је R коначан прстен.
 - 1) Показати да ако је R домен, тада је R поље.
 - 2) Показати да су прости идеали прстена R максимални.
8. Нека је R прстен такав да за све $x \in R$ постоји $n(x) > 1$ такав да је $x^{n(x)} = x$. Показати да су прости идеали прстена R максимални.
9. Нека је прстен R такав да за сваки $x \in R$ постоји $r \in R$ такав да је $x = rx^2$. Показати да су сви коначно генерисани идеали прстена R главни.
10. Нека је R домен и I и J његови ненула идеали такви да је IJ главни идеал. Показати да су идеали I и J коначно генерисани.
11. Показати да потпрстен $R = \mathbb{Q}[X, X^2Y, \dots, X^iY^{i-1}, \dots]$ прстена $\mathbb{Q}[X, Y]$ није Нетерин.
12. Нека је D домен који садржи нерастављив елемент c . Показати да прстен полинома $D[X]$ није главни домен.
13. Нека $n \geq 3$ није дељив квадратом простог броја. Конструисати идеал прстена $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ који није главни.
14. Посматрајмо прстен $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Показати да елементи 6 и $2 + 2\sqrt{-5}$ немају НЗД у овом прстену.
15. Факторисати идеал $\langle 42 \rangle$ на производ простих идеала у прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
16.
 - 1) Показати да идеал $I = \langle 3, 1 + \sqrt{-14} \rangle$ прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ није главни.
 - 2) Показати да I није једнак свом конјугату.
17. Показати да је цео број збир квадрата два рационална броја ако и само ако је збир квадрата два цела броја.
18.
 - 1) Решити једначину $x^2 + y^2 = z^2$ у прстену целих бројева \mathbb{Z} .
 - 2) Решити једначину $y^2 = x^3 - 1$ у прстену целих бројева \mathbb{Z} .