Алгебра 2НСЛ
Задаци

Групе

1. Нека је $G = \langle (1\ 2\ 3)\,(4\ 5)\,, (7\ 8) \rangle$ подгрупа групе $\mathbb{S}_8$ која дејствује на скуп $X = \{1, \ldots, 8\}$ као група пермутација.

1) Одредити орбиту и стабилизатор сваког елемента скупа из X.
2) Одредити фиксни скуп сваког елемента из G.

2. 1) Нека је $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ горња полураван. Показати да група $G = \mathrm{SL}_2\,(\mathbb{R})$ дејствује на скуп $\mathbb{H}$ формулом

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

2) Одредити орбиту и стабилизатор елемента i.

3. Нека је G група.

1) Анализирати дејство конјугацијом групе G на скуп G.
2) Показати да ако група G има двочлану класу конјугације, тада има нетривијалну нормалну подгрупу.

4. Нека је G коначна група и H, K њене произвољне подгрупе. Показати да важи формула

$$|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|\,.$$

5. Нека група G дејствује на скупове X и Y.

1) Показати да је са $g \cdot (x, y) = (gx, gy)$ дефинисано дејство групе G на скуп $X \times Y$ (које називамо *дијагонално дејство*).
2) Одредити везу између стабилизатора елемената $x \in X$, $y \in Y$ и $(x, y) \in X \times Y$.
3) Показати да ако група G дејствује транзитивно и на X и на Y, да дијагонално дејство не мора бити транзитивно.
4) Показати да група G дејствује на скуп $Y^X = \{f : X \to Y\}$ свих функција из X у Y са $(g \cdot f)\,(x) = gf\left(g^{-1}x\right)$.

6. Нека је G група реда 35 која дејствује на скуп X који има 18 елемената. Показати да постоји елемент $x \in X$ такав да је $\Sigma_x = G$.

7. Нека је G коначна група која транзитивно дејствује на коначан скуп X који има бар два елемента. Показати да постоји елемент $g \in G$ такав да је $X^g = \emptyset$.

8. 1) Одредити на колико начина можемо обојити темена квадрата са две различите боје.

2) Одредити на колико начина можемо обојити темена правилног седмоугла са 6 боја (црвеном, плавом, зеленом, жутом, белом и црном) ако је једно теме сигурно обојено плавом бојом.

9. Темена, средишта ивица и тежишта страна правилног тетраедра бојимо са три различите боје. Одредити колико има различитих бојења.

10. Нека је p прост број.

1) Одредити на колико начина можемо обојити темена правилног p-угла са n различитих боја уколико су два бојења иста ако се једно од другог може добити ротацијом p-угла.
2) Показати Малу Фермаову теорему.

11. Одредити све Силовљеве подгрупе групе $G = \mathbb{S}_4$.

12. Показати да је $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)| = 24$ и одредити све Силовљеве подгрупе ове групе.

13. Показати да је група G реда 1001 циклична.

14. Показати да група реда 90 није проста.

15. Нека су $p < q < r$ прости бројеви.

1) Показати да група реда pq није проста и јесте решива.
2) Показати да група реда p^2q није проста и јесте решива.
3) Показати да група реда p^2q^2 није проста и јесте решива.
4) Показати да група реда pqr није проста и јесте решива.

16. Ако је G група таква да важи $|G| < 60$, показати да је G решива.

17. Конструисати некомутативну групу реда 63.

18. Показати да је диедарска група $\mathbb{D}_n$ нилпотентна ако и само ако је n степен двојке.

Прстени

1. Нека је p прост број. Показати да је

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$$

потпрстен прстена $\mathbb{Q}$.

2. Нека је R прстен. Елемент $x \in R$ је <u>*нилпотентан*</u> ако постоји $n \geqslant 1$ такав да је $x^n = 0$.

1) Показати да је скуп нилпотентних елемената $N(R)$ један идеал који називамо <u>*нилрадикал*</u> прстена R.
2) Ако је x нилпотентан, показати да је $1 - x$ инвертибилан елемент.

3. Нека је $R = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Показати да је R потпрстен од $\mathbb{R}$ који је једно поље.

4. Нека су I и J идеали прстена R такви да је $I + J = R$. Показати да је тада $I^2 + J^2 = R$.

5. Нека је S потпрстен и I идеал прстена R. Испитати да ли је $S + I$ идеал прстена R.

6. Нека је R прстен.

1) Испитати да ли је пресек два потпрстена од R потпрстен од R.
2) Испитати да ли је унија два потпрстена од R потпрстен од R.

7. Одредити идеал $I = (\langle 45 \rangle + \langle 36 \rangle) \cap \langle 12 \rangle$ прстена $R = \mathbb{Z}$.

8.
1) Одредити све инвертибилне елементе, све делитеље нуле и све идеале прстена $R = \mathbb{Z}_{16}$.
2) Одредити све инвертибилне елементе, све делитеље нуле и све идеале прстена $R = \mathbb{Z}_{36}$.

9. 1) Испитати да ли је $f : \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_9$ дефинисано са $f(x) = \rho(x, 9)$ хомоморфизам прстенова, и ако јесте одредити $\operatorname{Ker}(f)$.

2) Испитати да ли је $f : \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_{10}$ дефинисано са $f(x) = \rho(x, 10)$ хомоморфизам прстенова, и ако јесте одредити $\operatorname{Ker}(f)$.

10. Нека је $R = \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ 3n & m \end{bmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) Показати да је R комутативан прстен са јединицом, у односу на стандардне операције сабирања и множења матрица.

2) Показати да је $I = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & b \\ 3b & 3b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ идеал прстена R.

3) Испитати да ли је $I = \langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rangle$.

4) Показати да је $f : R \to \mathbb{Z}_3$ дефинисано са $f\left(\begin{bmatrix} m & n \\ 3n & m \end{bmatrix} \right) = \rho(m, 3)$ хомоморфизам прстенова.

5) Применити теорему о изоморфизму на хомоморфизам f.

11. Решити следеће конгруенције:

1) $3x \equiv 4 \pmod 7$.

2) $4x \equiv 2 \pmod 6$.

3) $15x \equiv 4 \pmod{10}$.

4) $12x \equiv 21 \pmod{15}$.

12. Решити следеће системе конгруенција:

1) $x \equiv 3 \pmod 7$, $x \equiv 5 \pmod 8$.

2) $x \equiv 5 \pmod{13}$, $x \equiv -1 \pmod 8$, $x \equiv 4 \pmod 7$.

3) $2x \equiv 1 \pmod 7$, $4x \equiv 2 \pmod 9$, $5x \equiv 3 \pmod{11}$.

13. 1) Одредити један примитивни корен по модулу 7.

2) Одредити све примитивне корене по модулу 7.

3) Решити конгруенцију $x^4 \equiv 3 \pmod 7$.

14. 1) Одредити један примитивни корен по модулу 11.

2) Одредити све примитивне корене по модулу 11.

3) Решити конгруенцију $x^3 \equiv 2 \pmod{11}$.

15. Показати да важи:

$$U(\mathbb{Z}_{p^n}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{p^{n-1}(p-1)}, & p \text{ је непаран прост број и } n \geqslant 2 \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}}, & p = 2 \text{ и } n \geqslant 3 \\ \mathbb{Z}_2, & p = 2 \text{ и } n = 2 \end{cases}.$$

16. Посматрајмо прстен

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Гаусових целих бројева.

1) Показати да је прстен $\mathbb{Z}[i]$ Еуклидски прстен.

2) Одредити НЗД и НЗС елемената $a = 1 + 3i$ и $b = 1 + 5i$.

17. Нека је $I = \{p \in \mathbb{Z}[X] \mid 7 \mid p(0)\}$ идеал прстена $R = \mathbb{Z}[X]$.

1) Показати да идеал I није главни.

2) Испитати да ли је идеал I прост односно максималан.

18. Нека је $R = \mathbb{C}[X, Y]$.

1) Показати да је $\langle X, Y \rangle$ максимални идеал прстена R.

2) Испитати да ли је $I = \langle X + Y^2, Y + X^2 + 2XY^2 + Y^4 \rangle$ максимални идеал прстена R.

19. Одредити све максималне идеале следећих прстена.

1) $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2) $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^2 \rangle$.

3) $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^2 + X \rangle$.

20. Показати да су наредни прстени изоморфни производу два поља.

1) $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^2 - X \rangle$.

2) $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^3 - 1 \rangle$.

21. Написати елементе $5, 13, 6 + 9i, 30, 70$ као производе нерастављивих елемената у прстену $\mathbb{Z}[i]$.

22. Нека је $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

1) Одредити две различите факторизације броја 21 на нерастављиве елементе.

2) Показати да елементи 6 и $2 + 2\sqrt{-5}$ немају НЗД у прстену R.

23. Факторисати идеал $\langle 42 \rangle$ на производ простих идеала у прстену $\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right]$.

Поља

1. Показати да поља $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ и $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ нису изоморфна.

2. 1) Конструисати поље са 8 елемената.

2) Конструисати поље са 9 елемената.

3. Нека је $\alpha = i + \sqrt{3}$.

1) Показати да је α алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$.

2) Одредити минимални полином за α, степен раширења $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ и једну $\mathbb{Q}$-базу за $\mathbb{Q}(\alpha)$.

3) Изразити елемент $\frac{1}{\alpha^2 - 2}$ у облику $p(\alpha)$ за полином $p \in \mathbb{Q}[X]$.

4. Нека је $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1) Показати да је α алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$.

2) Одредити минимални полином за α, степен раширења $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ и једну $\mathbb{Q}$-базу за $\mathbb{Q}(\alpha)$.

3) Изразити елемент $\frac{1}{\alpha^2 - 2}$ у облику $p(\alpha)$ за полином $p \in \mathbb{Q}[X]$.

5. Одредити примитивни елемент раширења $\mathbb{Q}\left(i, \sqrt{5}\right)$ поља $\mathbb{Q}$.

6. Одредити коренско поље K полинома $f(X) = X^4 + 2X^2 - 15$ над пољем $\mathbb{Q}$ и неки његов примитивни елемент.

7. 1) Одредити коренско поље K полинома $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1$ над пољем $\mathbb{Z}_{11}$, његов примитивни елемент и број његових елемената.

2) Испитати да ли једначина $T^3 + T + 4 = 0$ има решења у пољу K.

8. Одредити број елемената поља $L = \mathbb{Z}_7\left(\sqrt{1 + \sqrt{3}}\right)$.

9. Нека је $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ и $\beta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Показати да $\alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$.

10. 1) Показати да је правилан петоугао конструктибилан.

2) Показати да је правилан петнаестоугао конструктибилан.

3) Испитати да ли је правилан деветоугао конструктибилан.

4) Испитати да ли је могуће конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог троугла.

11. Нека је $\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Одредити минимални полином $\mu_n \in \mathbb{Q}[X]$ елемента α_n за $n = 6, 8, 9, 12$.

12. 1) Одредити полином четвртог степена чија је нула $e^{\frac{2\pi i}{10}}$.

2) Одредити полином другог степена чија је нула $\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)$.

3) Испитати да ли је правилан десетоугао конструктибилан.

13. Решити једначину $x^3 - 6x + 9 = 0$ над пољем реалних бројева.

14. Решити једначину $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ над пољем реалних бројева.