



Универзитет у Београду  
Математички факултет

## ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (ЗР)

колоквијум

15. децембар 2023. године

1. Да би Михајло започео игру "Човече не љути се" прво мора добити шестицу на коцкици за игру. Одредити скуп елементарних исхода.
  - (а) Израчунати вероватноћу да је Михајлу потребно више од три покушаја да први пут добије шестицу.
  - (б) Ако при истовременом бацању 6 коцкица за игру падне цифра "1" на бар 5 коцкица, каже се да је добијен јамб јединица. Одредити колико је најмање независних бацања потребно да Михајло изведе да би са вероватноћом не мањом од 0.99 добио јамб јединица.
  - (в) Михајло игра бонус рунду у игри "Човече не љути се". Он осваја бонус поен ако се након бацања  $m$  идентичних коцкица истовремено производ добијених бројева завршава цифром "0". Након сваког бацања коцкица, Михајло на папиру бележи знак "+" ако је освоји бонус поен и знак "-" иначе. Одредити очекивани број освојених бонус поена и очекивани број промена знакова "+" и "-" у низу од  $m$  независних бацања коцкица.
2. (а) Случајна величина  $X$  има Пуасонову  $\mathcal{P}(\lambda)$  расподелу, а случајна величина  $Y$  геометријску  $\mathcal{G}(p)$  расподелу. Ако су  $X$  и  $Y$  независне случајне величине, одредити  $P\{X \leq Y\}$ .  
(б) За случајну величину  $V$  важи да је  $P\{V = k\} = \frac{1}{2^k}$ , за  $k \in \mathbb{N}$ . Ако је  $W = \sin\left(\frac{\pi V}{2}\right)$ , одредити математичко очекивање случајне величине  $W$ .

Решења задатака

1. Скуп елементарних ишода је

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_{n-1} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, x_n = 6, n \in \mathbb{N}\} \\ \cup \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

(а) Нека је  $B$  догађај да ће Михајлу бити потребно више од три покушаја да први пут добије шестицу и  $B_n$  догађај да је потребно тачно  $n$  бацања коцкице да се добије шестица. Тада је

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 6) : x_k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, k = 1, 2, \dots, n-1\},$$

$$B = \bigcup_{n=4}^{\infty} B_n.$$

Како је

$$P(B_n) = \frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

и догађаји  $B_n$  су међусобно дисјунктни следи да је

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=4}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=4}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{125}{216} \approx 0.58.$$

(б) Вероватноћа да се добије јамб јединица у једном бацању једнака је збиру вероватноћа да је број палих јединица пет или шест, тј. износи

$$p = \binom{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \frac{5}{6} + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{31}{6^6}.$$

Нека је  $A_i$  догађај да је у  $i$ -том бацању добијен јамб. Вреди да је  $P(A_i) = p$ , за свако  $i \in \mathbb{N}$ . Треба одредити вероватноћу догађаја  $A$  - да је добијен јамб у бар једном бацању:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Како су догађаји  $A_i$  независни, следи

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - (1 - p)^n.$$

Дакле,  $n$  одређујемо из услова

$$1 - \left(1 - \frac{31}{1296}\right)^n \geq 0.99.$$

Логаритмовањем и решавањем претходне неједнакости добијамо да за  $n$  треба узети најмање  $n = 190$  бацања.

(в) Очигледно, производ  $m$  палих бројева на коцкицама завршаваће се цифром "0" ако је производ дељив и са 2 и са 5. Дефинишимо догађаје:

- $C$ : производ је дељив и са 2 и са 5,
- $D_1$ : пао је бар један паран број,
- $D_2$ : пала је бар једна петица.

Јасно, тада је  $C = D_1 \cap D_2$ , па је

$$\begin{aligned} q &= P(C) = 1 - P(D_1^c \cup D_2^c) = 1 - P(D_1^c) - P(D_2^c) + P(D_1^c \cap D_2^c) \\ &= 1 - \frac{3^m}{6^m} - \frac{5^m}{6^m} + \frac{2^m}{6^m} = 1 - \frac{1}{2^m} - \frac{5^m}{6^m} + \frac{1}{3^m} \end{aligned}$$

Ако случајна величина  $X$  представља број регистрованих знакова ”+” у  $m$  бацања, тада  $X$  има Биномну  $\mathcal{B}(m, q)$  расподелу, па је очекивани број бонус поена које ће Михајло освојити једнак  $m \cdot q$ . Нека је  $Y_i$  индикатор да ли је Михајло у  $i$ -тог бацања забележио знак ”+” или не,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Тада  $Y_i \in \text{Ber}(q)$  и

$$Y = \sum_{i=1}^{m-1} |Y_{i+1} - Y_i|$$

је број промена регистрованих знакова. Даље,

$$|Y_{i+1} - Y_i| : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-q)^2 + q^2 & 2q(1-q) \end{pmatrix}$$

па је

$$EY = \sum_{i=1}^{m-1} E|Y_{i+1} - Y_i| = \sum_{i=1}^{m-1} 2q(1-q) = 2(m-1) \cdot q(1-q).$$

2. (а) Уочимо да догађај  $\{X \leq Y\}$  можемо представити као дисјунктну унију догађаја

$$\{X \leq Y\} = \{X = 0\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{X = m, Y = n\}.$$

Како су случајне величине  $X$  и  $Y$  међусобно независне, даље добијамо да је

$$\begin{aligned} P\{X \leq Y\} &= P\{X = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P\{X = m\}P\{Y = n\} \\ &= e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} (1-p)^{n-1} p = e^{-\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} (1-p)^{m-1} p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \\ &= e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{1-p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{1-p} (e^{\lambda(1-p)} - 1) \\ &= e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda p}}{1-p} - \frac{e^{-\lambda}}{1-p}. \end{aligned}$$

- (б) Приметимо да је

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 2k, \\ 1, & \text{за } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{за } n = 4k + 3. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Закон расподеле за случајну величину  $W$  добијамо сумирањем одговарајућих вредности за случајну величину  $V$ , тј. имамо да је

$$\begin{aligned} P\{W = 0\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 2k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \\ P\{W = 1\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 4k + 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}, \end{aligned}$$

а преосталу вероватноћу можемо лако добити као

$$P\{W = -1\} = 1 - P\{W = 0\} - P\{W = 1\} = \frac{2}{15}.$$

Дакле, закон расподеле случајне величине  $W$  дат је са

$$W : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

Сада је математичко очекивање случајне величине  $W$  једнако

$$EW = -1 \cdot \frac{2}{15} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} = \frac{6}{15}.$$