Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б (3Р)

СЕПТЕМБАР 2 - 28. октобар 2025. године

---

1. Општи чланови X_n и Y_n независних низова независних случајних величина имају карактеристичне функције, редом, дате са

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{\cos t - 1}, \ \ \varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{1+4t^2}.$$

Ако је

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k + Y_k),$$

испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Z_n).

2. Време које је потребно студентима да реше један тест из статистике има нормалну расподелу. Изабрано је 40 студената на случајан начин, за сваког од њих измерено је време које је било потребно за решавање теста из статистике и добијено је:

време (мин)	$[20, 30)$	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70)$
број студената	4	7	15	9	5

На основу овог узорка, одредити 90% интервал поверења за просечно време решавања теста свих студената, такав да је вероватноћа да просечно време буде мање од доње границе интервала поверења једнака вероватноћи да просечно време буде веће од горње границе интервала поверења.

3. За густину расподеле обележја X важи да је $f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}$, $x \geq 1$, $\theta > 0$. За тестирање хипотезе $H_0(\theta = 1)$ против алтернативе $H_1(\theta = \frac{1}{2})$, на основу узорка обима 10, предложена су два теста, чије су критичне области W_1 и W_2, где је $W_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \min\{x_1, x_2, \dots, x_{10}\} \geq c\}$, а W_2 је најбоља критична област за тестирање датих хипотеза. Ако предложени тестови имају исти праг значајности и ако је моћ теста чија је критична област W_1 једнака 0.4, одредити моћ теста чија је критична област W_2.

t_{39} : $F^{-1}(0.90) = 1.304$, $F^{-1}(0.95) = 1.684$, $F^{-1}(0.975) = 2.023$, $F^{-1}(0.99) = 2.429$

t_{40} : $F^{-1}(0.90) = 1.303$, $F^{-1}(0.95) = 1.685$, $F^{-1}(0.975) = 2.021$, $F^{-1}(0.99) = 2.423$

χ^2_{10} : $F^{-1}(0.13) = 4.922$, $F^{-1}(0.16) = 5.318$, $F^{-1}(0.84) = 14.573$, $F^{-1}(0.87) = 15.353$

χ^2_{20} : $F^{-1}(0.13) = 12.132$, $F^{-1}(0.16) = 12.675$, $F^{-1}(0.84) = 26.165$, $F^{-1}(0.87) = 27.060$

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б (ЗР) - Писмени испит 28. октобар 2025.

Решења задатака

1. Приметимо да је

$$\varphi'_{X_n}(t) = -e^{\cos t - 1}\sin t, \quad \varphi''_{X_n}(t) = e^{\cos t-1}(\sin^2 t - \cos t),$$

одакле добијамо

$$EX_n = \frac{\varphi'_{X_n}(0)}{i} = \frac{-e^{\cos 0-1}\sin 0}{i} = 0, \quad EX_n^2 = \frac{\varphi''_{X_n}(0)}{i^2} = \frac{e^{\cos 0-1}(\sin^2 0 - \cos 0)}{-1} = 1 \Rightarrow DX_n = 1.$$

Слично,

$$\varphi'_{Y_n}(t) = \frac{-8t}{(1+4t^2)^2}, \quad \varphi''_{Y_n}(t) = \frac{-8(1+4t^2)^2 - 8t\cdot 8t(1+4t^2)}{(1+4t^2)^4},$$

па је

$$EY_n = \frac{\varphi'_{y_n}(0)}{i} = 0, \quad EY_n^2 = \frac{\varphi''_{Y_n}(0)}{i^2} = 8 \Rightarrow DY_n = 8.$$

Даље, због независности случајних величина X_n и Y_n имамо да је

$$E(X_n+Y_n) = EX_n + EY_n = 0,$$

$$D(X_n+Y_n) = DX_n + DY_n = 9.$$

Како је $X_n + Y_n$ низ независних случајних величина са истом расподелом и коначним математичким очекивањем и дисперзијом, то на основу централне граничне теореме следи да је

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k+Y_k) - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k+Y_k)\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k+Y_k)\right)}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k+Y_k)}{\sqrt{9n}} \xrightarrow{D} Z^*, \quad Z^* \in \mathcal{N}(0,1).$$

Одавде добијамо граничну расподелу низа случајних величина (Z_n):

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k+Y_k) = \sqrt{9}\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_kY_k}{\sqrt{9n}} \xrightarrow{D} \tilde{Z}, \quad \tilde{Z} \in \mathcal{N}(0,9).$$

Дакле, низ случајних величина (Z_n) у расподели конвергира ка случајној величини $\tilde{Z}$, где је $\tilde{Z} \in \mathcal{N}(0,9)$.

2. Нека време потребно студентима да реше тест из статистике има нормалну $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподелу. Како је σ^2 непознат параметар, користићемо случајну величину $T_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$, која има Студентову t_{n-1} расподелу.

Одредимо прво реализоване вредности статистика. С обзиром да немамо тачне вредности елемената узорка, већ само број елемената у одговарајућем интервалу, можемо сматрати да су елементи случајно расподељени унутар интервала и да је једнака вероватноћа да се налазе са леве и десне стране средине интервала, па можемо њом апроксимирати вредности.

На основу података из задатка, можемо одредити узорачку средину и узорачку дисперзију:

$$\bar{x}_{40} = \frac{4\cdot 25 + 7\cdot 35 + 15\cdot 45 + 9\cdot 55 + 5\cdot 65}{40},$$

$$\bar{s}_{40}^2 = \frac{4\cdot(25-46)^2 + 7\cdot(35-46)^2 + 15\cdot(45-46)^2 + 9\cdot(55-46)^2 + 5\cdot(65-46)^2}{40},$$

тј. $\bar{x}_{40} = 46$ и $\bar{s}^2_{30} = 132.31$. Одредимо сада 90% интервал поверења за m у општем случају. Потребно је одредити статистике U_n и V_n за које је $P\{U_n \le V_n\} = 1$ такве да важи

$$P\{U_n \le m \le V_n\} = 0.90,$$

$$P\{\bar{X}_n - V_n \le \bar{X}_n - m \le \bar{X}_n - U_n\} = 0.90,$$

$$P\left\{\frac{\bar{X}_n - V_n}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \le \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \le \frac{\bar{X}_n - U_n}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right\} = 0.90.$$

Из услова задатка имамо да за овакав интервал поверења треба да важи $P\{m < U_n\} = 0.05$ и $P\{m > V_n\} = 0.05$, односно

$$P\left\{T_n < \frac{\bar{X}_n - V_n}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right\} = 0.05, \quad P\left\{T_n > \frac{\bar{X}_n - U_n}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right\} = 0.05.$$

Користећи да T_n има Студентову расподелу, добијамо да је

$$\frac{\bar{X}_n - V_n}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} = -t_{n-1;2\cdot 0.05},$$

$$\frac{\bar{X}_n - U_n}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} = t_{n-1;2\cdot 0.05}.$$

Према томе,

$$U_n = \bar{X}_n - \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}t_{n-1;0.1},$$

$$V_n = \bar{X}_n + \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}t_{n-1;0.1}.$$

Односно интервал поверења је

$$I_m^{(n)} = \left[\bar{X}_n - \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}t_{n-1;0.1},\ \bar{X}_n + \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}t_{n-1;0.1}\right].$$

У конкретном случају, $\beta = 0.90$ и $t_{39;0.1} = 1.684$. Тражени интервал је

$$I_m^{(40)} = \left[46 - 1.684 \cdot \frac{\sqrt{132.31}}{\sqrt{39}}, 46 + 1.684 \cdot \frac{\sqrt{132.31}}{\sqrt{39}}\right],$$

$$I_m^{(30)} = [42.898,\ 49.102] \approx [42,\ 50].$$

3. Најпре имамо да је функција расподеле обележја X дата са

$$F_X(x) = \int_1^x \frac{\theta}{t^{\theta+1}}dt = 1 - x^{-\theta}, \quad x \ge 1.$$

Моћ теста чија је критична област W_1 дата је са

$$\gamma_1 = P_{H_1}\{(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) \in W_1\} = P_{H_1}\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\} \ge c\} = (P_{H_1}\{X_1 \ge c\})^{10},$$

па је

$$0.4 = c^{-10\cdot\frac{1}{2}} = c^{-5} \ \Rightarrow\ c = (0.4)^{-\frac{1}{5}} = 1.2011.$$

Праг значајности теста чија је критична област W_1 је

$$\alpha_1 = P_{H_0}\{(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) \in W_1\} = (P_{H_0}\{X_1 \ge 1.2011\})^{10} = 1.2011^{-10} = 0.16.$$

Из услова задатка је $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.16$, где је α_2 праг значајности теста чија је критична област W_2. Критичну област W_2 ћемо тражити помоћу Нејман-Пирсонове леме. За Нејман-Пирсонову лему је потребно одредити функцију веродостојности која је у овом случају дата са

$$L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-(\theta+1)}.$$

Користећи лему, најбоља критична област је одређена са

$$W=\left\{\frac{L(x;\frac{1}{2})}{L(x;1)}\geq k\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{2^n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{-2}}\geq k\right\}=\left\{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{2}}\geq k_1\right\}$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln x_i\geq k_2\right\},$$

где је k_2 је нека константа у односу на дати узорак, коју треба одредити да бисмо добили тачан израз за критичну област. На основу прага значајности α_2, можемо одредити k_2 тако да важи

$$P_{H_0}\left\{\sum_{i=1}^{10}\ln x_i\geq k_2\right\}=0.16.$$

За функцију расподеле случајне вличине Y, где је $Y=\ln X$ важи да је

$$P\{Y\leq y\}=P\{\ln X\leq y\}=P\{X\leq e^y\}=1-e^{-\theta y},$$

па закључујемо да Y има експоненцијалну $\mathcal{E}(\theta)$ расподелу. Даље, како при H_0, $\ln X$ има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу, одакле имамо

$$\sum_{i=1}^{10}\ln X_i\in\gamma(10,1)\ \Rightarrow\ 2\sum_{i=1}^{10}\ln X_i\in\chi^2_{20}.$$

Дакле, из

$$P_{H_0}\left\{2\sum_{i=1}^{10}\ln x_i\geq 2k_2\right\}=0.16\ \Rightarrow\ 2k_2=\chi^2_{20;0.16}=26.178,$$

следи да је $k_2=13.089$. Коначно, моћ теста чија је критична област W_2 је

$$\gamma_2=P_{H_1}\{(X_1,X_2,\ldots,X_{10})\in W_2\}=P_{H_1}\left\{\sum_{i=1}^{10}\ln X_i\geq 13.089\right\}=0.87,$$

јер при $H_1(\theta=\frac{1}{2})$ имамо да је $2\cdot\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{10}\ln X_i\in\chi^2_{20}$.