Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

31. јануар 2024. године

---

1. Кутија садржи n куглица од којих је свака или бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица су једнако вероватне. Извлаче се две куглице, једна за другом, без враћања. Ако је прва извучена куглица бела, израчунати вероватноћу да ће друга извучена куглица бити бела.

2. Свака од независних случајних величина X и Y има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Ако је

$$Z = \frac{X}{X+Y} \quad \text{и} \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\left\{[nZ] = k\right\}, \, n \in \mathbf{N}, n > 1,$$

израчунати коефицијент корелације случајних величина Z и W_n.

3. За густину расподеле $f_{X,Y}(x,y)$ случајног вектора (X,Y) важи да је

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\max\{x,y\}, & 0 < x < 1, \, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Одредити условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ) - Писмени испит 31. јануар 2024.

Решења задатака

1. Уочимо да је са
$$H_i = \{\text{у кутији је } i \text{ белих куглица}\},\ i = 0, 1, \dots, n$$
дат потпун систем догађаја и да важи $P(H_i) = \frac{1}{n+1}$.
Ако је A: догађај да је прва извучена куглица беле боје и B: догађај да је друга извучена куглица беле боје, треба да одредимо условну вероватноћу $P(B|A)$. Јасно, важи $P(A|H_0) = 0$ и за свако $i = 1, 2, \dots, n$ важи $P(A|H_i) = \frac{i}{n}$. Даље, на основу формуле потпуне вероватноће имамо да је
$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} P(H_i)P(AB|H_i)}{\sum_{i=0}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{n+1}\sum_{i=2}^{n} \frac{i}{n}\frac{i-1}{n-1}}{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}} \\
&= \frac{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} i^2 - \sum_{i=2}^{n} i\right)}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{\frac{1}{n-1}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\right]}{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1-3)}{6(n-1)n(n+1)} = \frac{2(n-1)}{3(n-1)} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$
где смо искористили да важи $P(AB|H_0) = P(AB|H_1) = 0$ и да за свако $i = 2, 3, \dots, n$ важи
$$P(AB|H_i) = \frac{i}{n}\frac{i-1}{n-1}.$$

2. Функција расподеле случајне величине Z је дата са
$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{X}{X+Y} \le u\right\} &= P\left\{X \le \frac{u}{1-u}Y\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^{uy/(1-u)} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\, dx\right) dy \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}\left(1 - e^{-\lambda u y/(1-u)}\right) dy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}\, dy - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y/(1-u)}\, dy \\
&= 1 - (1-u) = u, \quad u \in (0,1)
\end{aligned}$$
одакле следи да случајна величина Z има униформну $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу, па је $EZ = \frac{1}{2}$ и $DZ = \frac{1}{12}$. Даље,
$$\begin{aligned}
EW_n &= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\{[nZ] = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P\{[nZ] = k\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P\{k \le nZ < k+1\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dz = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n},
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
EW_n^2 &= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\{[nZ] = k\}\right)^2 = E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\{[nZ] = k\} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} I\{[nZ] = j\}\right) \\
&= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} I\{[nZ] = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} P\{[nZ] = k\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},
\end{aligned}$$

па је

$$DW_n = EW_n^2 - (EW_n)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{n^2-1}{12n^2}.$$

Да бисмо израчунали коефицијент корелације, треба још да израчунамо EZW_n. Имамо да је

$$\begin{aligned}
EZW_n &= E\left(Z\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}I\left\{[nZ]=k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}E\left(ZI\left\{[nZ]=k\right\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\int_0^1 zI\left\{\frac{k}{n}\le Z<\frac{k+1}{n}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} zdz \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k(2k+1) \\
&= \frac{1}{2n^3}\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} = \frac{(n+1)(4n+5)}{12n^2}
\end{aligned}$$

Према томе,

$$\rho_{Z,W_n} = \frac{EZW_n - EZEW_n}{\sqrt{DZDW_n}} = \frac{\frac{(n+1)(4n+5)}{12n^2}-\frac{1}{2}\frac{n+1}{2n}}{\sqrt{\frac{1}{12}\frac{n^2-1}{12n^2}}} = \frac{(n+1)(n+5)}{n\sqrt{n^2-1}}.$$

3. Маргинална расподела случајне величине X је дата са

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^x \frac{3}{2}xdy + \int_x^1 \frac{3}{2}ydy = \frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\bigg|_x^1\right) = \frac{3}{4}(x^2+1),$$

тј.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2+1), & x\in(0,1) \\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Одредимо условну функцију расподеле случајне величине Y при услову $X<\frac{1}{2}$. Важи да је

$$P\left\{Y\le y \,|\, X<\tfrac{1}{2}\right\} = \frac{P\left\{Y\le y, X<\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}}.$$

Имамо да је

$$P\left\{X<\tfrac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{4}+\frac{3}{4}x\right)\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{32}.$$

Сада разликујемо два случаја.

- за $y\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ имамо да је

$$\begin{aligned}
P\left\{Y\le y, X<\tfrac{1}{2}\right\} &= \int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^x\frac{3}{2}xdv + \int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^y\frac{3}{2}vdv = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{v^2}{2}\bigg|_x^y dx \\
&= \frac{1}{2}x^3\bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(y^2-x^2)dx = \frac{1}{16}+\frac{3}{4}\left(y^2x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3}{8}y^2+\frac{1}{32},
\end{aligned}$$

- за $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имамо да је

$$\begin{aligned} P\left\{Y \leq y, X < \tfrac{1}{2}\right\} &= \int_0^y dv \int_0^v \frac{3}{2} v dx + \int_0^y dv \int_v^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x dx = \int_0^y \frac{3}{2} v^2 dv + \int_0^y \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} - v^2\right) dv \\ &= \frac{1}{2} y^3 + \frac{3}{16} y - \frac{1}{4} y^3 = \frac{y^3}{4} + \frac{3y}{16}. \end{aligned}$$

Одавде следи да је

$$P\left\{Y \leq y \,|\, X < \tfrac{1}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{8y^3+6y}{13}, & y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{12y^2+1}{13}, & y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}.$$

Коначно, за условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$ важи да је

$$f_{Y|X<\frac{1}{2}}(y) = \begin{cases} \frac{24y^2+6}{13}, & y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{24y}{13}, & y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р)

31. јануар 2024. године

---

1. **(10 поена)** Кутија садржи n куглица од којих је свака или бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица су једнако вероватне. Извлаче се две куглице, једна за другом, без враћања. Ако је прва извучена куглица бела, израчунати вероватноћу да ће друга извучена куглица бити бела.

2. У осигуравајућем друштву је регистровано 400 осигураника. Сваки осигураник у неком одређеном временском интервалу упућује захтев за одштету са вероватноћом 0.01.

   (а) **(4 поена)** Израчунати вероватноћу да је у посматраном временском интервалу тачно 5 осигураника упутило одштетни захтев.

   (б) **(6 поена)** Одредити најмањи број k такав да вероватноћа да број осигураника који су упутили одштетни захтев не буде мањи од k износи највише 0.05.

3. **(10 поена)** Свака од независних случајних величина X и Y има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Ако је
$$Z = \frac{X}{X+Y} \quad \text{и} \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\left\{[nZ] = k\right\},\, n \in \mathbf{N}, n > 1,$$
израчунати коефицијент корелације случајних величина Z и W_n.

4. За густину расподеле $f_{X,Y}(x,y)$ случајног вектора (X,Y) важи да је
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\max\{x,y\}, & 0 < x < 1,\, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   (а) **(2 поена)** Одредити маргиналну густину расподеле случајне величине X.

   (б) **(8 поена)** Одредити условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р) - Писмени испит 31. јануар 2024.

Решења задатака

1. Уочимо да је са
$$H_i = \{\text{у кутији је } i \text{ белих куглица}\},\ i = 0, 1, \ldots, n$$
дат потпун систем догађаја и да важи $P(H_i) = \frac{1}{n+1}$.

   Ако је A: догађај да је прва извучена куглица беле боје и B: догађај да је друга извучена куглица беле боје, треба да одредимо условну вероватноћу $P(B|A)$. Јасно, важи $P(A|H_0) = 0$ и за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи $P(A|H_i) = \frac{i}{n}$. Даље, на основу формуле потпуне вероватноће имамо да је

$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} P(H_i)P(AB|H_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{i}{n}\frac{i-1}{n-1}}{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}} \\
&= \frac{\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=2}^{n} i^2 - \sum\limits_{i=2}^{n} i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} i} = \frac{\frac{1}{n-1}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\right]}{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1-3)}{6(n-1)n(n+1)} = \frac{2(n-1)}{3(n-1)} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

   где смо искористили да важи $P(AB|H_0) = P(AB|H_1) = 0$ и да за свако $i = 2, 3, \ldots, n$ важи
$$P(AB|H_i) = \frac{i}{n}\frac{i-1}{n-1}.$$

2. Нека је X број осигураника који су у проматраном временском интервалу упутили захтев за одштету осигуравајућем друштву. Тада је $X \sim \mathcal{B}(400, 0.01)$. Како је $np = 4000.01 = 4 < 10$ и $n > 30$, користимо апроксимацију биномне расподеле Пуасоновом расподелом са параметром $\lambda = np = 4$.

   (а) Сада је
$$P\{X = 5\} \approx F_\lambda(5) - F_\lambda(4) = 0.78513 - 0.62884 = 0.15629.$$

   (б) Треба наћи број k такав да је
$$P\{X \geq k\} \leq 0.05.$$
Како је $P\{X \geq k\} = 1 - P\{X < k\} \leq 0.05$, следи
$$P\{X < k\} \geq 0.95,$$
односно
$$P\{X \leq k-1\} \geq 0.95.$$
Сада, из $F(k-1) \geq 0.95$, за $n = 400$ на основу апроксимације Пуасоновом $\mathcal{P}(4)$ расподелом, следи $k - 1 = 8$, па је $k = 9$.

3. Функција расподеле случајне величине Z је дата са

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{X}{X+Y} \leq u\right\} &= P\left\{X \leq \frac{u}{1-u}Y\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^{uy/(1-u)} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\, dx\right) dy \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}\left(1 - e^{-\lambda uy/(1-u)}\right) dy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}\, dy - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y/(1-u)}\, dy \\
&= 1 - (1-u) = u, \quad u \in (0,1)
\end{aligned}$$

одакле следи да случајна величина Z има униформну $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу, па је $EZ = \frac{1}{2}$ и $DZ = \frac{1}{12}$. Даље,

$$\begin{aligned} EW_n &= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P\{k \le nZ < k+1\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dz = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EW_n^2 &= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\}\right)^2 = E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\}\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} I\left\{\lfloor nZ \rfloor = j\right\}\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} I\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} P\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}, \end{aligned}$$

па је

$$DW_n = EW_n^2 - (EW_n)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{n^2-1}{12n^2}.$$

Да бисмо израчунали коефицијент корелације, треба још да израчунамо EZW_n. Имамо да је

$$\begin{aligned} EZW_n &= E\left(Z\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} I\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} E\left(ZI\left\{\lfloor nZ \rfloor = k\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\int_0^1 zI\left\{\frac{k}{n} \le Z < \frac{k+1}{n}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} zdz \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) \\ &= \frac{1}{2n^3}\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} = \frac{(n+1)(4n+5)}{12n^2} \end{aligned}$$

Према томе,

$$\rho_{Z,W_n} = \frac{EZW_n - EZEW_n}{\sqrt{DZDW_n}} = \frac{\frac{(n+1)(4n+5)}{12n^2} - \frac{1}{2}\frac{n+1}{2n}}{\sqrt{\frac{1}{12}\frac{n^2-1}{12n^2}}} = \frac{(n+1)(n+5)}{n\sqrt{n^2-1}}.$$

4. (а) Маргинална расподела случајне величине X је дата са

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^x \frac{3}{2}xdy + \int_x^1 \frac{3}{2}ydy = \frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\Big|_x^1\right) = \frac{3}{4}(x^2+1),$$

тј.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2+1), & x \in (0,1) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(б) Одредимо условну функцију расподеле случајне величине Y при услову $X < \frac{1}{2}$. Важи да је

$$P\left\{Y \le y \,|\, X < \tfrac{1}{2}\right\} = \frac{P\left\{Y \le y, X < \frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X < \frac{1}{2}\right\}}.$$

Имамо да је

$$P\left\{X<\tfrac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x)dx=\int_0^1 \frac{3}{4}(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{3}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{13}{32}.$$

Сада разликујемо два случаја.

- за $y\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ имамо да је

$$\begin{aligned}P\left\{Y\le y, X<\tfrac{1}{2}\right\}&=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^x \frac{3}{2}xdv+\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^y\frac{3}{2}vdv=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{v^2}{2}\Bigg|_x^y dx\\&=\frac{1}{2}x^3\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(y^2-x^2)dx=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\left(y^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{32},\end{aligned}$$

- за $y\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ имамо да је

$$\begin{aligned}P\left\{Y\le y, X<\tfrac{1}{2}\right\}&=\int_0^y dv\int_0^v\frac{3}{2}vdx+\int_0^y dv\int_v^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}xdx=\int_0^y\frac{3}{2}v^2dv+\int_0^y\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}-v^2\right)dv\\&=\frac{1}{2}y^3+\frac{3}{16}y-\frac{1}{4}y^3=\frac{y^3}{4}+\frac{3y}{16}.\end{aligned}$$

Одавде следи да је

$$P\left\{Y\le y\,|\,X<\tfrac{1}{2}\right\}=\begin{cases}\frac{8y^3+6y}{13}, & y\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{12y^2+1}{13}, & y\in\left(\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Коначно, за условну густину расподеле случајне величине Y при услову $X<\frac{1}{2}$ важи да је

$$f_{Y|X<\frac{1}{2}}(y)=\begin{cases}\frac{24y^2+6}{13}, & y\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{24y}{13}, & y\in\left(\frac{1}{2},1\right)\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$