**Задатак 1.** Нека обележје $X$ има расподелу $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\frac{2\theta}{3} \end{pmatrix}$.

а) Наћи оцену методом максималне веродостојности за параметар $\theta$.

б) Упоредити оцену из дела а) са оценом $1-\overline{X}_n$ у средње квадратном смислу. Да ли је нека од њих ефикасна?

**Решење.** а) За обележје $X$,

$$P\{X=x\} = \begin{cases} \frac{\theta}{3}, & \text{за } x=-1 \\ \frac{\theta}{3}, & \text{за } x=0 \\ 1-\frac{2\theta}{3}, & \text{за } x=1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ово можемо записати на другачији начин, како бисмо могли да рачунамо функцију веродостојности

$$\begin{aligned} P\{X=x\} &= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{I\{x=-1\}} \left(\frac{\theta}{3}\right)^{I\{x=0\}} \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x=1\}} \\ &= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{1-I\{x=1\}} \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x=1\}}. \end{aligned}$$

Претпоставимо да имамо реализовани узорак $(x_1,...,x_n)$. Функција веродостојности је

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{k=1}^{n} p(x_k;\theta) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\theta}{3}\right)^{1-I\{x_k=1\}} \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x_k=1\}} \\ &= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{n-\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}} \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}. \end{aligned}$$

Када логаритмујемо, добијамо

$$\ln L(\theta) = \left(n-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}\right)\ln\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}\ln\left(\frac{3-2\theta}{3}\right).$$

Желимо да нађемо вредност $\theta$ која максимизује $\ln L(\theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta) = \frac{n-\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{\frac{\theta}{3}}\frac{1}{3} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{\frac{3-2\theta}{3}}\left(-\frac{2}{3}\right) = 0,$$

па је

$$\begin{aligned} &\frac{n-\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{\theta} = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{3-2\theta} \\ &\iff 3n-2\theta n-3\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}+2\theta\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\} = 2\theta\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\} \\ &\iff 3n-3\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\} = 2\theta n \\ &\implies \theta = \frac{3n-3\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{2n}. \end{aligned}$$

Желимо да проверимо да ли је заиста максимум. Како је $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} > 0$, ако је $\theta < \frac{3n-3\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{2n}$, а $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} < 0$, ако је $\theta > \frac{3n-3\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{2n}$, то функција $\ln L(\theta)$ расте до $\frac{3n-3\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=1\}}{2n}$, а након тога опада, па ово јесте тачка у којој функција $\ln L(\theta)$ достиже максимум.

Дакле, оцена методом максималне веродостојности за $\theta$, на основу реализованог узорка $(x_1, ..., x_n)$ је

$$\hat{\theta} = \frac{3n - 3\sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k = 1\}}{2n}.$$

Оцена методом максималне веродостојности је случајна величина

$$\hat{\theta} = \frac{3n - 3\sum\limits_{k=1}^{n} I\{X_k = 1\}}{2n}.$$

б) Сада желимо да упоредимо оцене у средње квадратном смислу. Проверимо за почетак да ли су ове оцене непристрасне. Означимо оцену $1-\overline{X}_n$ са $\hat{\theta}_1$, а оцену добијену методом максималне веродостојности са $\hat{\theta}_2$. Тада

$$E(\hat{\theta}_1) = 1 - E(\overline{X}_n) = 1 - E(X_1) = 1 - \left(-\frac{\theta}{3} + 1 - \frac{2\theta}{3}\right) = 1 - (1-\theta) = \theta,$$
$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n} P\{X_k = 1\} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n} nP\{X_1 = 1\} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2\theta}{3}\right) = \theta.$$

Обе оцене су непристрасне, па можемо поредити њихове дисперзије. Рачунамо дисперзије:

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}_1) &= D(1-\overline{X}_n) = D(\overline{X}_n) = \frac{D(X_1)}{n} = \frac{1}{n}\left(E(X_1^2) - (E(X_1))^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\theta}{3} - (1-\theta)^2\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\theta}{3} - 1 + 2\theta - \theta^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{5}{3}\theta - \theta^2\right) = \frac{(5-3\theta)\theta}{3n} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}_2) &= D\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n} I\{X_k = 1\}\right) = \frac{9}{4n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} I\{X_k = 1\}\right) \\ &= \frac{9}{4n^2} nD\left(I\{X_1 = 1\}\right) = \frac{9}{4n} P\{X_1 = 1\}(1 - P\{X_1 = 1\}) \\ &= \frac{9}{4n}\left(1 - \frac{2\theta}{3}\right)\frac{2\theta}{3} = \frac{(3-2\theta)\theta}{2n}. \end{aligned}$$

Упоређујемо дисперзије:

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}_2) < D(\hat{\theta}_1) &\iff \frac{(3-2\theta)\theta}{2n} < \frac{(5-3\theta)\theta}{3n} \\ &\iff 3(3-2\theta) < 2(5-3\theta) \\ &\iff 9 - 6\theta < 10 - 6\theta. \end{aligned}$$

Ово увек важи, па закључујемо да је $\hat{\theta}_2$ боља у средње квадратном смислу од оцене $\hat{\theta}_1$. Дакле, има смисла испитивати ефикасност оцене $\hat{\theta}_2$.

За почетак, испитујемо да ли је дата фамилија регуларна:

$$
\begin{aligned}
P\{X=-1\} = \frac{\theta}{3} &\implies \frac{\partial}{\partial\theta} P_\theta\{X=-1\} = \frac{1}{3},\\
P\{X=0\} = \frac{\theta}{3} &\implies \frac{\partial}{\partial\theta} P_\theta\{X=0\} = \frac{1}{3},\\
P\{X=1\} = 1-\frac{2\theta}{3} &\implies \frac{\partial}{\partial\theta} P_\theta\{X=1\} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Дакле,

$$
\sum_{k=-1}^{1} \frac{\partial}{\partial\theta} P_\theta\{X=k\} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3} = 0.
$$

Фамилија јесте регуларна, па можемо рачунати информациону функцију Фишера

$$
I(\theta) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(X;\theta)\right).
$$

Односно

$$
\begin{aligned}
\ln p(x;\theta) &= (1-I\{x=1\})\ln\left(\frac{\theta}{3}\right) + I\{x=1\}\ln\left(\frac{3-2\theta}{3}\right)\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta) &= \frac{1-I\{x=1\}}{\theta} - \frac{2I\{x=1\}}{3-2\theta}\\
\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta) &= -\frac{1-I\{x=1\}}{\theta^2} - \frac{4I\{x=1\}}{(3-2\theta)^2}
\end{aligned}
$$

Дакле,

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= E\left(\frac{1-I\{X=1\}}{\theta^2} + \frac{4I\{X=1\}}{(3-2\theta)^2}\right)\\
&= \frac{1-P\{X=1\}}{\theta^2} + \frac{4P\{X=1\}}{(3-2\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2}\frac{2\theta}{3} + \frac{4(3-2\theta)}{3(3-2\theta)^2}\\
&= \frac{2}{3\theta} + \frac{4}{3(3-2\theta)} = \frac{6-4\theta+4\theta}{3\theta(3-2\theta)} = \frac{2}{\theta(3-2\theta)}.
\end{aligned}
$$

Односно,

$$
G = \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(3-2\theta)}{2n}.
$$

Према томе,

$$
ef(\hat{\theta}_2) = \frac{G}{D(\hat{\theta}_2)} = \frac{\frac{\theta(3-2\theta)}{2n}}{\frac{\theta(3-2\theta)}{2n}} = 1.
$$

Оцена $\hat{\theta}_2$ је ефикасна.

✓

**Задатак 2.** Вероватноћа да се догађај $A$ оствари при неком експерименту је $p$, $0 < p < 1$. Експерименти се независно понављају или до прве појаве догађаја $A$ или до $N-$тог покушаја, где је $N \geq 1$ и унапред познат број. Број експеримената до краја серије се бележи. На основу регистрованих $n$ бројева, тј. на основу $n$ серија, методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра $p$.

**Решење.** Нека обележје $X$ представља број експеримената до краја серије. Највећи могући број експеримената је $N$ (ако се догађај $A$ није реализовао у првих $N-1$ покушаја, без обзира да ли се реализовао или не у $N$-том покушају) а најмањи могући број експеримената је 1 (ако се догађај $A$ реализовао у првом покушају). Дакле, случајна величина $X$ узима вредности из скупа $\{1, 2, ...., N\}$. Потребно је још да одредимо вероватноће са којима узима те вредности.

Ако $k \in \{1, ..., N-1\}$, онда догађај $\{X = k\}$ значи да се догађај $A$ реализовао први пут у $k$-том покушају. Другачије речено, догађај $A$ се није реализовао у првих $k-1$ покушаја, догађај $A$ се реализовао у $k$-том покушају. Према томе, вероватноћа тог догађаја је

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p.$$

Међутим, ако је $k = N$, онда је

$$P\{X = N\} = (1-p)^{N-1}.$$

Дакле, расподела обележја $X$ одређена је следећим законом:

$$p(x;p) = P\{X = x\} = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p, & \text{за } x \in \{1, ..., N-1\} \\ (1-p)^{x-1}, & \text{за } x = N. \end{cases}$$

Претпоставимо да имамо реализовани узорак $(x_1, ..., x_n)$, при чему $x_k$ представља број експеримената у $k$-тој серији. Да бисмо одредили функцију веродостојности, треба нам краћи запис расподеле обележја $X$. Приметимо да је

$$p(x;p) = (1-p)^{x-1}p^{1-I\{x=N\}}, \;\; x \in \{1, 2, ..., N\}.$$

Функција веродостојности је тада

$$L(p) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k;p) = (1-p)^{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n} \cdot p^{n - \sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}},$$

а њен логаритам

$$\ln L(p) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n\right) \ln(1-p) + \left(n - \sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}\right) \ln p.$$

Желимо да пронађемо $p$ које максимизује $\ln L(p)$. Тражимо стационарну тачку из

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n}{1-p} + \frac{n - \sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}}{p} = 0,$$

одакле је

$$\begin{aligned} \frac{n - \sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}}{p} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n}{1-p}, \\ \iff n - np - \sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\} + p\sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\} &= p\sum_{k=1}^{n} x_k - np, \\ \iff n - \sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\} &= p\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}\right), \\ \implies p &= \frac{n - \sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}}. \end{aligned}$$

Желимо да проверимо да ли је заиста максимум. Како је $\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} > 0$, ако је $p < \frac{n-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=N\}}{\sum_{k=1}^{n} x_k-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=N\}}$, а $\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} < 0$, ако је $p > \frac{n-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=N\}}{\sum_{k=1}^{n} x_k-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=N\}}$, то функција $\ln L(p)$ расте до $\frac{n-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=N\}}{\sum_{k=1}^{n} x_k-\sum_{k=1}^{n} I\{x_k=N\}}$, а након тога опада, па ово јесте тачка у којој функција $\ln L(p)$ достиже максимум.

Према томе, на основу овог узорка, оцена методом максималне веродостојности је

$$\hat{p} = \frac{n - \sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}}{\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} I\{x_k = N\}},$$

па је оцена, као случајна величина,

$$\hat{p} = \frac{n - \sum_{k=1}^{n} I\{X_k = N\}}{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} I\{X_k = N\}}.$$

✓

**Задатак 3.** Методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра $\theta$ на основу узорка обима $n$ из популације чије обележје $X$ има:

а) униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta > 0$, расподелу;

б) униформну $\mathcal{U}[-\theta,\theta], \theta > 0$, расподелу;

в) униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta \geq 1$, расподелу;

г) униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta \in \mathbb{N}$, расподелу. У овом случају испитати непристрасност и постојаност тако добијене оцене.

**Решење.** а) Ако обележје $X$ има униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta > 0$, расподелу, тада је густина расподеле

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I\{0 \leq x \leq \theta\}.$$

Функција веродостојности је тада

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I\{x_i \leq \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I\{x_i \leq \theta\} = \frac{1}{\theta^n} I\{x_{(n)} \leq \theta\}.$$

Приметимо да функција веродостојности није диференцијабилна по $\theta$, па је потребно на други начин одредити $\theta$ за које ће функција веродостојности достизати максимум. Да би функција веродостојности имала максимум, потребно је да индикатор узме вредност 1, у супротном функција веродостојности је 0. Како је функција $\frac{1}{\theta^n}$ опадајућа по $\theta$, треба да изаберемо што мање $\theta$, али такво да је $x_{(n)} \leq \theta$ (да би индикатор узео вредност 1). Према томе, оцена добијена методом максималне веродостојности је

$$\hat{\theta} = X_{(n)}.$$

б) Ако обележје $X$ има униформну $\mathcal{U}[-\theta,\theta], \theta > 0$, расподелу, тада је густина расподеле

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} I\{-\theta \leq x \leq \theta\}.$$

Функција веродостојности је тада

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} I\{-\theta \leq x_i \leq \theta\} \\ &= \frac{1}{(2\theta)^n} \prod_{i=1}^{n} I\{-\theta \leq x_i \leq \theta\} \\ &= \frac{1}{(2\theta)^n} I\{-\theta \leq x_{(1)}, x_{(n)} \leq \theta\} \\ &= \frac{1}{(2\theta)^n} I\{\theta \geq x_{(n)}, \theta \ \geq -x_{(1)}\}. \end{aligned}$$

Приметимо да функција веродостојности није диференцијабилна по $\theta$, па је потребно на други начин одредити $\theta$ за које ће функција веродостојности достизати максимум. Да би функција веродостојности имала максимум, потребно је да индикатор узме вредност 1, у супротном функција веродостојности је 0. Како је функција $\frac{1}{(2\theta)^n}$ опадајућа по $\theta$, треба да изаберемо што мање $\theta$, али такво да је $\theta \geq x_{(n)}, \theta \geq -x_{(1)}$ (да би индикатор узео вредност 1). Према томе, оцена добијена методом максималне веродостојности је

$$\hat{\theta} = \max\{X_{(n)}, -X_{(1)}\}.$$

в) Ако обележје $X$ има униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta \geq 1$, расподелу, тада је густина расподеле

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I\{x \leq \theta,\ \theta \geq 1\}.$$

Функција веродостојности је тада

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I\{x_i \leq \theta, \theta \geq 1\} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I\{x_i \leq \theta, \theta \geq 1\} = \frac{1}{\theta^n} I\{x_{(n)} \leq \theta, \theta \geq 1\}.$$

Приметимо да функција веродостојности није диференцијабилна по $\theta$, па је потребно на други начин одредити $\theta$ за које ће функција веродостојности достизати максимум. Да би функција веродостојности имала максимум, потребно је да индикатор узме вредност 1, у супротном функција веродостојности је 0. Како је функција $\frac{1}{\theta^n}$ опадајућа по $\theta$, треба да изаберемо што мање $\theta$, али такво да је $\theta \geq x_{(n)}, \theta \geq 1$ (да би индикатор узео вредност 1). Према томе, оцена добијена методом максималне веродостојности је

$$\hat{\theta} = \max\{X_{(n)}, 1\}.$$

г) Ако обележје $X$ има униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta \in \mathbb{N}$, расподелу, тада је густина расподеле

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I\{x \leq \theta,\ \theta \in \mathbb{N}\}.$$

Функција веродостојности је тада

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I\{x_i \leq \theta, \theta \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I\{x_i \leq \theta, \theta \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{\theta^n} I\{x_{(n)} \leq \theta, \theta \in \mathbb{N}\}.$$

Тражимо $\theta$ за које ће функција веродостојности бити највећа. Како је функција $\frac{1}{\theta^n}$ опадајућа по $\theta$, треба да изаберемо што мање $\theta$, али такво да је $\theta \geq x_{(n)}, \theta \in \mathbb{N}$ (да би индикатор узео вредност 1). Према томе, оцена добијена методом максималне веродостојности је

$$\hat{\theta} = \begin{cases} X_{(n)}, & \text{ако је } X_{(n)} \in \mathbb{N} \\ [X_{(n)}] + 1, & \text{ако је } X_{(n)} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Одредимо сада расподелу оцене $\hat{\theta}$.

Ако је $X_{(n)} \in \mathbb{N}$, онда је $\hat{\theta} = k$ исто што и $X_{(n)} = k$, а ако $X_{(n)} \notin \mathbb{N}$, онда $[X_{(n)}] + 1 = k$ је исто што и $[X_{(n)}] = k - 1$, па се $X_{(n)}$ мора наћи у интервалу $(k-1, k)$. То се може објединити на следећи начин:

$$\begin{aligned}
P\{\hat{\theta} = k\} &= P\{k - 1 < X_{(n)} \leq k\} \\
&= P\{X_{(n)} \leq k\} - P\{X_{(n)} \leq k - 1\} \\
&= P\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq k\} - P\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq k - 1\} \\
&= P\{X_1 \leq k, \dots X_n \leq k\} - P\{X_1 \leq k - 1, \dots X_n \leq k - 1\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq k\} - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq k - 1\} \\
&= \left(\frac{k}{\theta}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\theta}\right)^n \\
&= \frac{1}{\theta^n}(k^n - (k-1)^n), \quad k = 1, 2, \dots, \theta.
\end{aligned}$$

Испитајмо непристрасност ове оцене:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}) &= \sum_{k=1}^{\theta} k P\{\hat{\theta} = k\} \\
&= \sum_{k=1}^{\theta} k \left(\frac{1}{\theta}\right)^n (k^n - (k-1)^n) \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \left( \sum_{k=1}^{\theta} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{\theta} k(k-1)^n \right) \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \left( \theta^{n+1} + \sum_{k=1}^{\theta-1} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{\theta-1} (k+1)k^n \right) \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \left( \theta^{n+1} + \sum_{k=1}^{\theta-1} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{\theta-1} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{\theta-1} k^n \right) \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n (\theta^{n+1} - (\theta-1)^n - (\theta-2)^n - \dots - 1^n) \\
&= \theta - \frac{1^n + \dots (\theta-1)^n}{\theta^n} \\
&\neq \theta.
\end{aligned}$$

Закључујемо да оцена није непристрасна, али јесте асимптотски непристрасна.

Испитајмо још постојаност оцене $\hat{\theta}$:

$$
\begin{aligned}
(\forall \epsilon > 0) \quad P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon\} &= P\{\theta - \hat{\theta} \geq \epsilon\} \\
&= P\{\hat{\theta} \leq \theta - \epsilon\} \\
&\leq P\{\hat{\theta} \leq \theta - 1\} \\
&= 1 - P\{\hat{\theta} = \theta\} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{(\theta - 1)^n}{\theta^n}\right) \to 0.
\end{aligned}
$$

Добили смо да $(\forall \epsilon > 0) \quad P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon\} \to 0$, па је оцена $\hat{\theta}$ постојана.

✓

**Задатак 4.** Обележје $X$ има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је $\lambda$ непознати параметар. На основу узорка (2.3, 3.4, 1.2, 2.5, 0.6) методом максималне веродостојности одредити оцену за вероватноћу $P\{X \geq 1\}$.

**Решење.** Вероватноћа коју треба да оценимо је

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}.$$

Приметимо да ако одредимо оцену параметра $\lambda$, заменом у овај израз одредићемо оцену тражене вероватноће.

Одредимо оцену непознатог параметра $\lambda$ методом максималне веродостојности. Претпоставимо да имамо реализовани узорак $(x_1, ..., x_n)$. Функција веродостојности једнака је

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Логаритмовањем добијамо

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Желимо да нађемо вредност $\lambda$ која максимизује $\ln L(\lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

па је оцена параметра $\lambda$ добијена методом максималне веростојности

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Оцена тражене вероватноће једнака је $e^{-\hat{\lambda}} = e^{-\frac{1}{\overline{X}_n}}$.

На основу реализованог узорка из задатка добијамо да је оцена вероватноће $P\{X \geq 1\}$ једнака $e^{-\frac{1}{2}}$. ✓

**Задатак 5.** Обележје $X$ има густину расподеле $f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, x \geq \theta_1, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$. На основу узорка обима $n$ методом максималне веродостојности одредити оцене непознатих параметара $\theta_1$ и $\theta_2$.

**Решење.** Претпоставимо да имамо реализовани узорак $(x_1, ..., x_n)$. Функција веродостојности је тада

$$L(\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}} I\{x_i \geq \theta_1\} = \frac{1}{(\theta_2)^n} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\theta_1}{\theta_2}} I\{x_{(1)} \geq \theta_1\}.$$

Приметимо да функција веродостојности није диференцијабилна по $\theta_1$. Индикатор ће узети вредност 1 ако је $x_{(1)} \geq \theta_1$. Функција веродостојности је растућа по $\theta_1$, па закључујемо да је оцена параметра $\theta_1$ добијена методом максималне веродостојности

$$\hat{\theta}_1 = X_{(1)}.$$

Сада, кад смо одредили оцену параметра $\theta_1$, фиксирамо параметар $\theta_1$ у функцији веродостојности и посматрамо је као функцију од $\theta_2$

$$L(\theta_2) = \frac{1}{(\theta_2)^n} e^{\frac{1}{\theta_2}(n\hat{\theta}_1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i)}.$$

Логаритмовањем добијамо

$$\ln L(\theta_2) = -n \ln \theta_2 + \frac{1}{\theta_2}\left(n\hat{\theta}_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Желимо да нађемо вредност $\theta_2$ која максимизује $\ln L(\theta_2)$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \ln L(\theta_2) = -\frac{n}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2^2}\left(n\hat{\theta}_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0,$$

па је оцена паараметра $\theta_2$ добијена методом максималне веродостојности

$$\hat{\theta}_2 = \overline{X}_n - X_{(1)}.$$

✓

## Асимптотско понашање оцена максималне веродостојности

**Задатак 6.** Нека обележје $X$ има Бернулијеву расподелу са параметром $p \in (0,1)$. Нека је $\hat{\theta}$ оцена максималне веродостојности за $\theta = p(1-p)$. Показати да је $\hat{\theta}$ асимптотски нормална за $p \neq \frac{1}{2}$.

**Решење.** Функција веродостојности је

$$L(p) = \prod_{k=1}^{n} p^{x_k}(1-p)^{1-x_k} = p^{\sum_{k=1}^{n} x_k}(1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n} x_k},$$

па је (након краћег извођења) оцена максималне веродостојности за $p$ једнака

$$\hat{p} = \bar{X},$$

па ће оцена за $\theta$ бити

$$\hat{\theta} = \bar{X}(1-\bar{X}).$$

Нека је $p \neq \frac{1}{2}$. Према централној граничној теореми, или из чињенице да је $I(p) = \frac{1}{p(1-p)}$, имамо

$$\sqrt{n}(\bar{X}-p) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

Ако је $g(p) = p(1-p)$, односно $g'(p) = 1-2p$, према делта методу имамо

$$\sqrt{n}(g(\hat{p}) - g(p)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, g'(p)^2 p(1-p)) = \mathcal{N}(0, p(1-p)(1-2p)^2).$$

Дакле, оцена $\hat{\theta}$ има асимптотски нормалну расподелу и важи

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, p(1-p)(1-2p)^2).$$

✓

**Задатак 7.** Нека је $X$ обележје из логнормалне расподеле, односно $\ln X$ има $\mathcal{N}(\theta,\theta)$ расподелу, са непознатим параметром $\theta > 0$. Показати да је једно од решења једначине веродостојности јединствена оцена максималне веродостојности за $\theta$. Одредити асимптотску расподелу оцене максималне веродостојности за $\theta$.

**Решење.** Уместо $X$ посматрамо обележје $Y = \ln X$, које има нормалну $\mathcal{N}(\theta,\theta)$ расподелу и претпоставити да уместо узорка $X_n$ имамо трансформисани узорак $Y_n = (\ln X_1, \ldots, \ln X_n)$. Густина је

$$f(y;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{(y-\theta)^2}{2\theta}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Функција веродостојности је

$$L(\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \theta^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\theta)^2\right),$$

а логаритам веродостојности:

$$\ln L(\theta) = \ln\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\right) - \frac{n}{2}\ln\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\theta)^2.$$

Тражимо стационарне тачке:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta) = 0.$$

Рачуном добијамо:

$$-\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\theta)^2 + \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\theta) = 0.$$

Што се, после уређења и дефинисања

$$T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln x_k)^2,$$

своди на:

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\theta^2}T - \frac{1}{\theta} - 1\right) = 0,$$

тј. решавамо једначину:
$$\theta^2 + \theta - T = 0.$$

Решења су:
$$\theta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4T}}{2},$$
где је прихватљиво само:
$$\hat{\theta} = \frac{-1 + \sqrt{1+4T}}{2},$$
јер мора бити $\theta > 0$. Сада нас занима да одредимо асимптотску расподелу ове оцене. Знамо да важи:
$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right),$$
где је $I(\theta)$ Фишерова информација дефинисана као:
$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(Y;\theta)\right].$$

Рачуном добијамо:
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(y;\theta) = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{y^2}{\theta^3},$$
па је:
$$I(\theta) = \frac{EY^2}{\theta^3} - \frac{1}{2\theta^2}.$$
Како је $Y \sim \mathcal{N}(\theta, \theta)$, имамо:
$$EY^2 = \theta^2 + \theta,$$
па добијамо:
$$I(\theta) = \frac{\theta^2+\theta}{\theta^3} - \frac{1}{2\theta^2} = \frac{1+\theta}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta^2} = \frac{1+2\theta}{2\theta^2}.$$
Одатле следи:
$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \frac{2\theta^2}{1+2\theta}\right).$$

✓

**Задатак 8.** Нека је $X$ узорак из фамилије Паретових расподела с густином
$$f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}, \quad x \geq 0, \ \theta > 2.$$

а) Одредити математичко очекивање $m(\theta)$ и дисперзију $\sigma^2(\theta)$ елемента узорка $X_i$.

б) Испитати конвергенцију у расподели низа $\sqrt{n}\left(\bar{X} - m(\theta)\right)$, коришћењем централне граничне теореме.

в) Наћи $\hat{\theta}_n$, оцену параметра $\theta$ методом момената.

г) Наћи асимптотску расподелу $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ кад $n \to \infty$ користећи резултат под б) и делта метод.

**Решење.** а) Може се показати да је
$$m(\theta) = \frac{1}{\theta-1}, \quad \sigma^2(\theta) = \frac{\theta}{(\theta-1)^2(\theta-2)}, \quad \text{за } \theta > 2.$$

б) Како је $\sigma^2(\theta)$ коначно за свако $\theta > 2$, услови централне граничне теореме су испуњени, па важи:

$$\sqrt{n}(\bar{X} - m(\theta)) \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)).$$

в) Решавањем једначине $m(\theta) = \bar{X}$ добијамо:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}} + 1.$$

г) Пошто је

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}} + 1 - \frac{1}{m(\theta)} - 1\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{m(\theta)}\right),$$

а будући да је функција $g(t) = \frac{1}{t}$ диференцијабилна за свако $t \in (0, 1)$ и

$$g'(m(\theta)) = -\frac{1}{(m(\theta))^2} \neq 0,$$

тражена гранична расподела добија се директно применом делта метода и резултата под (б):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} g'(m(\theta))Z,$$

па је гранична расподела нормална

$$\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2(\theta)}{(m(\theta))^4}\right), \quad \text{односно} \quad \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta(\theta-1)^2}{\theta-2}\right).$$

✓