Статистичке таблице

Нормална расподела - функција расподеле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214

Слика 1: Статистичка таблица стандардне нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле.

Задатак 1. Ако случајна величина X има нормалну $\mathcal{N}(2,a)$ расподелу, израчунати позитиван реалан број a такав да је $P\{X > 1.5\} = 0.59871$.

Решење. Имамо да је

$$\begin{aligned} 0.59871 = P\{X > 1.5\} &= P\left\{\frac{X-2}{\sqrt{a}} > \frac{1.5-2}{\sqrt{a}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X-2}{\sqrt{a}} \leq \frac{1.5-2}{\sqrt{a}}\right\} = 1 - \Phi\Big(\frac{1.5-2}{\sqrt{a}}\Big) \\ &\implies \Phi\Big(-\frac{0.5}{\sqrt{a}}\Big) = 1 - 0.59871 = 0.40129, \end{aligned}$$

па је

$$\implies \Phi^{-1}(0.40129) = -0.25.$$

Одавде следи да је $-\frac{0.5}{\sqrt{a}} = -0.25$, тј. $a = \left(\frac{0.5}{0.25}\right)^2 = 4$.

χ_n^2 расподела - функција расподеле

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

n \ x	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0
1	0,99843	0,99909	0,99947	0,99969	0,99982	0,99989	0,99994	0,99996	0,99998	0,99999
2	0,99326	0,99591	0,99752	0,99850	0,99909	0,99945	0,99966	0,99980	0,99988	0,99993
3	0,98143	0,98827	0,99262	0,99536	0,99709	0,99818	0,99887	0,99929	0,99956	0,99973
4	0,95957	0,97344	0,98265	0,98872	0,99270	0,99530	0,99698	0,99807	0,99877	0,99921
5	0,92476	0,94862	0,96521	0,97662	0,98439	0,98964	0,99316	0,99550	0,99705	0,99808
6	0,87535	0,91162	0,93803	0,95696	0,97036	0,97974	0,98625	0,99072	0,99377	0,99584
7	0,81143	0,86138	0,89944	0,92789	0,94882	0,96400	0,97488	0,98260	0,98803	0,99181
8	0,73497	0,79830	0,84880	0,88815	0,91823	0,94085	0,95762	0,96989	0,97877	0,98514
9	0,64951	0,72429	0,78669	0,83739	0,87767	0,90906	0,93312	0,95128	0,96483	0,97481
10	0,55951	0,64248	0,71494	0,77633	0,82701	0,86794	0,90037	0,92564	0,94504	0,95974

Слика 2: Статистичка таблица χ_n^2 расподеле.

✓

Задатак 2. Ако случајна величина X има χ^2_7 расподелу, израчунати реалан број a такав да је $P\{X \leq a\} = 0.9$.

Решење. $P\{X \leq a\} = 0.9 \implies a = \chi^2_{7;0.9} = 12.017$

✓

Задатак 3. Ако случајна величина X има χ^2_{15} расподелу, израчунати реалан број a такав да је $P\{a < X < 19.311\} = 0.6$.

Решење. Важи да је

$$0.6 = P\{a < X < 19.311\} = P\{X < 19.311\} - P\{X \leq a\},$$

и имамо $P\{X \geq 19.311\} = 1 - P\{X < 19.311\} = 1 - 0.8 = 0.2$. Сада је

$$\begin{aligned} P\{X \leq a\} &= P\{X < 19.311\} - P\{a < X < 19.311\} \\ &= 0.8 - 0.6 = 0.2 \end{aligned}$$

$\implies a = \chi^2_{15;0.2} = 10.307$

✓

Задатак 4. Ако случајна величина X има χ^2_{100} расподелу, израчунати реалан број a такав да је $P\{X > a\} = 0.7$.

Решење. Како $X \in \chi^2_{100}$, одговарајућу вредност није могуће прочитати у таблици. У том случају, када је n довољно велико, $X \sim \mathcal{N}(100, 200)$. Према томе

$$\begin{aligned} &0.7 = P\{X > a\} = P\left\{\tfrac{X-100}{\sqrt{200}} > \tfrac{a-100}{\sqrt{200}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\tfrac{a-100}{\sqrt{200}}\right) \\ &\implies \tfrac{a-100}{\sqrt{200}} = \Phi^{-1}(0.3) \approx -0.525 \\ &\implies a = 100 - \Phi^{-1}(0.3)\sqrt{200} \approx 92.57 \end{aligned}$$

✓

Задатак 5. Случајна величина X има нормалну $\mathcal{N}(0, 1)$ расподелу, а случајна величина Y има нормалну $\mathcal{N}(0, 4)$ расподелу. Ако су X и Y независне, одредити реалан број a такав да случајна величина $X^2 + aY^2$ има χ^2_2 расподелу.

Решење. $X \in \mathcal{N}(0, 1) \implies X^2 \in \chi^2_1$

$$Y \in \mathcal{N}(0, 4) \implies \tfrac{Y}{\sqrt{4}} \in \mathcal{N}(0, 1) \implies \tfrac{Y^2}{4} \in \chi^2_1$$

Из адитивности χ^2 расподеле следи да $X^2 + \frac{Y^2}{4} \in \chi^2_2$, па можемо закључити да је $a = \frac{1}{4}$. ✓

Задатак 6. Ако случајна величина X има Студентову t_{10} расподелу, израчунати реалан број a такав да је:

а) $P\{X < a\} = 0.6$;

б) $P\{X > a\} = 0.6$;

в) $P\{|X| < a\} = 0.6$.

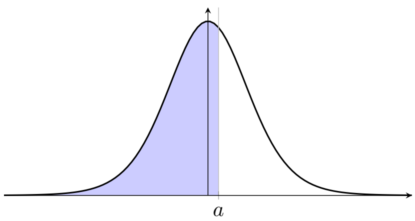
Студентова t_n расподела - функција расподеле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \, dt$$

n \ x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1	0,75000	0,76515	0,77886	0,79129	0,80257	0,81283	0,82219	0,83075	0,83859	0,84579
2	0,78868	0,80698	0,82350	0,83838	0,85176	0,86380	0,87463	0,88438	0,89317	0,90109
3	0,80450	0,82416	0,84187	0,85777	0,87200	0,88471	0,89605	0,90615	0,91516	0,92318
4	0,81305	0,83346	0,85182	0,86827	0,88295	0,89600	0,90758	0,91782	0,92688	0,93488
5	0,81839	0,83927	0,85805	0,87485	0,88980	0,90305	0,91475	0,92506	0,93412	0,94207
6	0,82204	0,84325	0,86232	0,87935	0,89448	0,90786	0,91964	0,92998	0,93902	0,94692
7	0,82469	0,84614	0,86541	0,88262	0,89788	0,91135	0,92318	0,93354	0,94256	0,95040
8	0,82670	0,84834	0,86777	0,88510	0,90046	0,91400	0,92587	0,93622	0,94522	0,95302
9	0,82828	0,85006	0,86961	0,88705	0,90249	0,91607	0,92797	0,93833	0,94730	0,95506
10	0,82955	0,85145	0,87110	0,88862	0,90412	0,91775	0,92966	0,94002	0,94897	0,95669

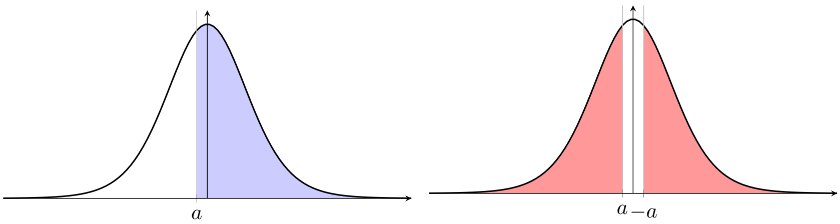
Слика 3: Статистичка таблица Студентове t_n расподеле.

Решење. а) $P\{X < a\} = 0.6 \implies a = t_{10;0.6} = 0.260$



б) $P\{X > a\} = 0.6 \implies P\{X \leq a\} = 0.4$

$\implies P\{X \geq -a\} = 0.4 \implies P\{X < -a\} = 0.6 \implies a = -t_{10;0.6} = -0.260$

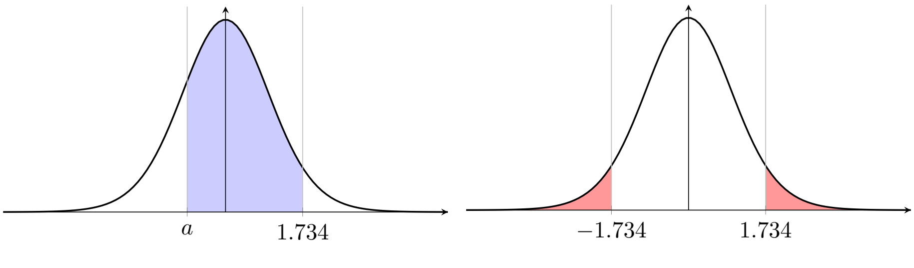


в) $P\{|X| < a\} = 0.6 \implies P\{-a < X < a\} = P\{X < a\} - P\{X \leq -a\} = 0.6 \implies$
$a = t_{10;0.6+\frac{0.4}{2}} = t_{10;0.8} = 0.879$

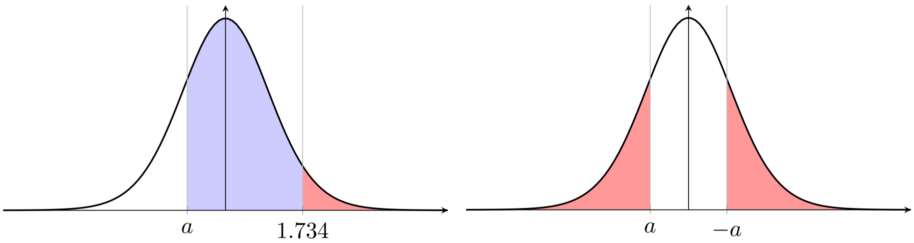
✓

Задатак 7. Ако случајна величина X има Студентову t_{18} расподелу, израчунати реалан број a такав да је $P\{a < X < 1.734\} = 0.75$.

Решење.



Из таблица, слично као у претходном задатку, следи да је $P\{|X| \geq 1.734\} = 0.10$, односно $P\{X \geq 1.734\} = 0.05$.



Из претходног и услова задатке следи да је

$$0.75 = P\{a < X < 1.734\} = P\{X < 1.734\} - P\{X \leq a\} = 0.95 - P\{X \leq a\}$$

$\implies P\{X \leq a\} = 0.20 \implies P\{X \geq -a\} = 0.2 \implies P\{X < -a\} = 0.8 \implies a = -t_{18;0.8} = -0.862$ ✓

Задатак 8. Ако случајна величина X има Студентову t_7 расподелу, израчунати реалан број a такав да је $P\{-1.895 < X < a\} = 0.35$.

Решење. Из таблица следи да је $P\{|X| > 1.895\} = 0.10$, односно $P\{X < -1.895\} = 0.05$. Из претходног и услова задатке следи да је

$$0.35 = P\{-1.895 < X < a\} = P\{X < a\} - P\{X \leq -1.895\} = P\{X < a\} - 0.05$$

$$\implies P\{X < a\} = 0.40 \implies P\{X > -a\} = 0.4 \implies a = -t_{7;0.6} = -0.263 \quad ✓$$

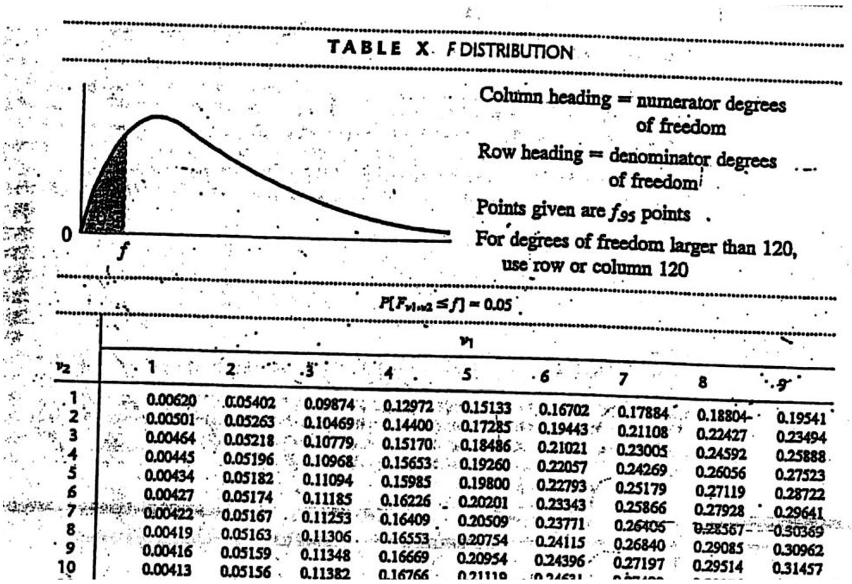


TABLE X. F DISTRIBUTION

Column heading = numerator degrees of freedom
Row heading = denominator degrees of freedom
Points given are f_{95} points
For degrees of freedom larger than 120, use row or column 120

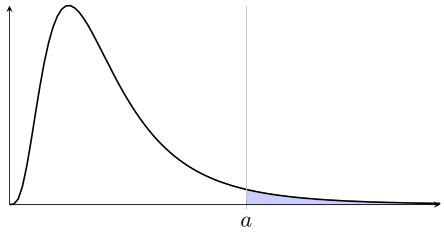
$P[F_{\nu 1, \nu 2} \leq f] = 0.05$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.00620	0.05402	0.09874	0.12972	0.15133	0.16702	0.17884	0.18804	0.19541
2	0.00501	0.05263	0.10469	0.14400	0.17285	0.19443	0.21108	0.22427	0.23494
3	0.00464	0.05218	0.10779	0.15170	0.18486	0.21021	0.23005	0.24592	0.25888
4	0.00445	0.05196	0.10968	0.15653	0.19260	0.22057	0.24269	0.26056	0.27523
5	0.00434	0.05182	0.11094	0.15985	0.19800	0.22793	0.25179	0.27119	0.28722
6	0.00427	0.05174	0.11185	0.16226	0.20201	0.23343	0.25866	0.27928	0.29641
7	0.00422	0.05167	0.11253	0.16409	0.20509	0.23771	0.26405	0.28567	0.30369
8	0.00419	0.05163	0.11306	0.16553	0.20754	0.24115	0.26840	0.29085	0.30962
9	0.00416	0.05159	0.11348	0.16669	0.20954	0.24396	0.27197	0.29514	0.31457
10	0.00413	0.05156	0.11382	0.16766	0.21119	0.24631	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Слика 4: Статистичка таблица Фишерове F_{n_1,n_2} расподеле.

Задатак 9. Ако случајна величина X има Фишерову $F_{10,12}$ расподелу, израчунати реалан број а такав да је $P\{X \geq a\} = 0.95$.

Решење.



$P\{X \geq a\} = 0.95$
$\implies P\{X < a\} = 0.05 \implies a = F_{10,12;0.05} = 0.34329$

✓

Задатак 10**.** Ако случајна величина X има Фишерову $F_{10,12}$ расподелу, израчунати реалан број a такав да је $P\{X \geq a\} = 0.05$.

Решење. Иммо да је $0.05 = P\{X \geq a\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq \frac{1}{a}\right\}$. Ако је $X \in F_{10,12}$, тада је $\frac{1}{X} \in F_{12,10}$, па је

$$\implies \frac{1}{a} = F_{12,10;0.05} = 0.363 \implies a = 2.75.$$

✓