Закон великих бројева

Нека је (X_n) низ случајних величина дефинисаних на истом простору вероватноћа. Нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Ако:

- $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$, онда важи слаби закон великих бројева за низ (X_n);
- $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{С.С}} 0,\ n \to \infty$, онда важи јаки закон великих бројева за низ (X_n).

Теорема 1. ***(Колмогорovљева)*** *Ако је (X_n) низ независних случајних величина и ако је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty$, онда важи јаки закон великих бројева за низ (X_n).* ⋆

Теорема 2. ***(Колмогоровљева)*** *Ако је (X_n) низ независних случајних величина са истом расподелом и ако је $EX_1 < \infty$, онда важи јаки закон великих бројева за низ (X_n).* ⋆

Задатак 1. Испитати да ли закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан X_n има:

а) закон расподеле $\begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

б) густину расподеле $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$;

в) закон расподеле $\begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Решење. а) Како је $EX_n = 0$ и $DX_n = EX_n^2 = \ln n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < \infty,$$

па важи јаки закон великих бројева, а самим тим и слаби закон великих бројева.

б) Како је

$$EX_n = \int_0^{\infty} xne^{-nx}dx = \frac{1}{n}$$

и

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = \int_0^{\infty} x^2ne^{-nx}dx - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2},$$

важи да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty,$$

па важи јаки закон великих бројева, а самим тим и слаби закон великих бројева.

в) Показаћемо да не важи слаби закон великих бројева (па самим тим ни јаки закон великих бројева), тако што ћемо показати да постоји $\varepsilon > 0$ такво да $P\left\{\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \not\to 0,\ n \to \infty$. Нека је $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тада

$$P\left\{\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \frac{1}{2}\right\} = P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \frac{1}{2}\right\} \geq P\left\{\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right\}$$

$$= P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k > \frac{n}{2}\right\} \geq P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k > 2^n\right\}$$
$$\geq P\left\{X_{n-1} = 2^{n-1}, X_n = 2^n\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} \not\to 0,\ n \to \infty.$$

Дакле, не важе ни слаби ни јаки закон великих бројева.

✓

Задатак 2. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има густину расподеле $f_{X_n}(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, x > 0$. Испитати да ли за овај низ важи закон великих бројева.

Решење. Желимо да испитамо да ли $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$. Како је

$$EX_n = \int\limits_0^{\infty} x \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = n+1,$$

добијамо да је

$$ES_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k = \sum_{k=1}^{n} (k+1) = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Пошто конвергенција у вероватноћи повлачи конвергенцију у расподели, ако покажемо да $U_n = \frac{S_n}{n} - \frac{n+3}{2} \overset{D}{\not\to} 0,\ n \to \infty$, онда $\frac{S_n}{n} - \frac{n+3}{2} \overset{P}{\not\to} 0\ n \to \infty$, па не важи закон великих бројева. Показаћемо да $\varphi_{U_n}(t) \not\to \varphi_0(t) = 1$, бар за једно $t \in \mathbb{R}$. Пошто је

$$\varphi_{X_n}(t) = E(e^{itX_n}) = \int\limits_0^{\infty} e^{itx} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x(1-it)} dx = \frac{1}{(1-it)^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{n}}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} k+n} = \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{n}}\right)^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

$$\Longrightarrow \varphi_{U_n}(t) = e^{-\frac{n+3}{2}it} \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = e^{-\frac{n+3}{2}it} \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{n}}\right)^{\frac{n(n+3)}{2}} = e^{-\frac{n+3}{2}it} e^{-\frac{n(n+3)}{2}\ln\left(1 - \frac{it}{n}\right)}$$
$$= e^{-\frac{n+3}{2}it} e^{-\frac{n(n+3)}{2}\left(-\frac{it}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)} \to e^{-\frac{t^2}{4}},\ n \to \infty.$$

Како је $e^{-\frac{t^2}{4}}$ вредност карактеристичне функције у тачки t случајне величине која има нормалну $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ расподелу, закључујемо да $U_n \overset{D}{\not\to} 0\ n \to \infty$, па ни $U_n \overset{P}{\not\to} 0\ n \to \infty$, те не важи слаби закон великих бројева. ✓

Задатак 3. Нека је низ случајних величина (X_n) такав да за сваки природан број n важи да је $EX_n = 0$ и $DX_n \leq C$ где је C константа која је већа од 0, и било који члан X_n зависи само од претходног X_{n-1} и следећег X_{n+1}, а независан је од осталих чланова низа. Доказати да за овај низ важи слаби закон великих бројева.

Решење. Пошто је $ES_n = \sum\limits_{i=1}^{n} EX_i = 0$, желимо да испитамо да ли $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада

$$
\begin{aligned}
P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right\} &= P\left\{|S_n| \geq n\varepsilon\right\} \leq \frac{ES_n^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum\limits_{i\neq j} X_iX_j\right)}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} EX_i^2 + \sum\limits_{i\neq j} EX_iX_j}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} DX_i + \sum\limits_{|i-j|=1} EX_iX_j + \sum\limits_{|i-j|>1} EX_iX_j}{n^2\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{nC + \sum\limits_{|i-j|=1} EX_iX_j + \sum\limits_{|i-j|>1} EX_iEX_j}{n^2\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{nC + 2(n-1)C}{n^2\varepsilon^2} \to 0,\ n \to \infty,
\end{aligned}
$$

при чему је коришћено да је $EX_iX_j \leq E|X_iX_j| \leq \sqrt{EX_i^2EX_j^2}$.

Према томе, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0\ n \to \infty$, па важи слаби закон великих бројева. ✓

Задатак 4. Нека је дат низ случајних величина (X_n) и нека постоји константа c, $c > 0$, таква да је $D(X_n) \leq c$, за сваки природан број n. Ако постоји природан број M такав да је $0 < cov(X_i, X_j)$ када је $|i-j| \leq M$ и $cov(X_i, X_j) \leq 0$ за $|i-j| > M$, доказати да за низ (X_n) вазхи слаби закон великих бројева.

Решење. Желимо да испитамо да ли $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада

$$
\begin{aligned}
P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right\} &= P\left\{|S_n - ES_n| \geq n\varepsilon\right\} \leq \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{ES_n^2 - (ES_n)^2}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} DX_i + \sum\limits_{i\neq j} cov(X_i, X_j)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{nc + \sum\limits_{i\neq j} cov(X_i, X_j)}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{nc + \sum\limits_{|i-j|\leq M} cov(X_i, X_j) + \sum\limits_{|i-j|>M} cov(X_i, X_j)}{n^2\varepsilon^2} \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{nc + \sum\limits_{|i-j|\leq M} cov(X_i, X_j)}{n^2\varepsilon^2} \\
&\overset{(**)}{\leq} \frac{nc + \sum\limits_{|i-j|\leq M} \sqrt{DX_iDX_j}}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{nc + \sum\limits_{|i-j|\leq M} c}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{nc + 2(n-1)c + 2(n-2)c + \cdots + 2(n-M)c}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \frac{nc(2M+1) - M(M+1)c}{n^2\varepsilon^2} \to 0,\ n \to +\infty,
\end{aligned}
$$

при чему смо у неједнакости (*) искористили

$$cov(X_i, X_j) \leq 0,\ |i-j| > M,$$

а за неједнакост (**) знамо да коефицијент корелације припада интервалу $[-1, 1]$, па на интервалу $|i-j| \leq M$ важи

$$cov(X_i, X_j) \leq \sqrt{DX_iDX_j}.$$

✓

Централна гранична теорема

Теорема 3. *Нека је* (X_n) *низ независних случајних величина са истом расподелом, математичким очекивањем* $EX_1 = m$ *и коначном дисперзијом* $DX_1 = \sigma^2 > 0$*. Ако је* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$*, онда за свако* $x \in \mathbb{R}$ *при* $n \to \infty$ *важи*

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

односно $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{D} X^\star \in \mathcal{N}(0,1)$. ⋆

Задатак 5. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподељене на сегменту $[-0.5, 0.5]$.

а) Ако се сабира 1500 бројева, израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

Решење. а) Нека је $X_k,\ k = 1, ..., n$, грешка при $k-$том заокруживању. Треба одредити

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > 15\right\}.$$

Из дефиниције случајних величина $X_k,\ k = 1, ..., n$ можемо закључити да $X_k \in \mathcal{U}[-0.5, 0.5]$. Према томе $EX_k = 0$ и $DX_k = \frac{1}{12},\ k = 1, ..., n$. Како је $n = 1500$ довољно велико (значајно веће од 30), може се применити централна гранична теорема, односно можемо закључити да

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} \xrightarrow{D} X^\star \in \mathcal{N}(0,1).$$

Према томе

$$\begin{aligned}
P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > 15\right\} &= 1 - P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \leq 15\right\} \\
&= 1 - P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}}\right| \leq \frac{15}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}}\right\} \\
&= 1 - P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right| \leq \frac{15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right\} \\
&\approx 1 - P\left\{|X^\star| \leq \frac{15}{\sqrt{125}}\right\} = 1 - P\left\{-\frac{15}{\sqrt{125}} \leq X^\star \leq \frac{15}{\sqrt{125}}\right\}
\end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi(1.34) + \Phi(-1.34) = 2 - 2\Phi(1.34) = 0.18.$$

б) Треба одредити n, тако да важи

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k < 10\right\} = 0.9.$$

Очекујемо да је n довољно велико, па важи

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} < \frac{10 - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{X^\star < \sqrt{\frac{1200}{n}}\right\} = 0.9$$

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{1200}{n}}\right) = 0.9 \implies \sqrt{\frac{1200}{n}} = \Phi^{-1}(0.9) = 1.28.$$

Дакле, $n = 732.42$. Међутим, број бројева које треба сабрати мора бити целобројна вредност, а пошто је питање колико највише бројева треба сабрати, решење је 732.

✓

Задатак 6. Кишне капи облика сфере, чија дужина полупречника (у mm) има униформну $\mathcal{U}[1,2]$ расподелу, падају у кофу. Сваког секунда упадне 20 кишних капи. Ако је вероватноћа да се након двосатног падања кише кофа неће препунити водом једнака 0.965, израчунати запремину (у литрима) те кофе.

Решење. Нека је $X_k,\ k = 1, ..., n$, запремина кишне капи и $R_k,\ k = 1, ..., n$, њен полупречник, $R_k \in \mathcal{U}[1,2]$. Тада је $X_k = \frac{4}{3}\pi R_k^3$. Треба одредити v тако да важи

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k < v\right\} = 0.965.$$

Пошко сваке секунде упадне 20 капи, током 2 сата ће упасти $n = 20 \cdot 7200 = 144000$ капи. Како је n довољно велико, можемо применити централну граничну теорему, односно

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} \xrightarrow{D} X^\star \in \mathcal{N}(0,1).$$

Према томе

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} < \frac{v - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}}\right\} = 0.965$$

$$\Longrightarrow \frac{v - nEX_1}{\sqrt{nDX_1}} = \Phi^{-1}(0.965) = 1.81.$$

Како је

$$EX_1 = \frac{4}{3}\pi ER_1^3 = \frac{4}{3}\pi \int\limits_1^2 x^3 dx = 5\pi,$$

$$DX_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = \frac{16}{9}\pi^2 \int\limits_1^2 x^6 dx - 25\pi^2 = \frac{457}{63}\pi^2,$$

то следи да је

$$v = 1.81\sqrt{144000\frac{457}{63}}\pi + 144000 \cdot 5\pi = 2267758.334724,$$

односно запремина кофе је приближно 2.27 литра. ✓

Задатак 7. Нека је (X_n) низ независних случајних величина које имају исту расподелу и нека је $EX_n = 0$, а $DX_n < +\infty$. Ако је

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} > 1\right\} = \frac{1}{3}$$

Израчунати дисперзију DX_n.

Решење. Из централне граничне теореме важи

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} \le x\right\} \to \Phi(x)$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} > x\right\} \to 1 - \Phi(x).$$

Желимо да $1 - \Phi(x) = \frac{1}{3}$, односно $\Phi(x) = \frac{2}{3}$. Према томе $x = \Phi^{-1}(\frac{2}{3}) = 0.43$. Комбинујући са претходним добија се

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{nDX_1}} > 0.4307273\right\} \to \frac{1}{3}$$

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} > 0.43\sqrt{DX_1}\right\} \to \frac{1}{3}.$$

Из услова задатка следи да је $0.43\sqrt{DX_1} = 1$, односно $DX_1 = 5.41$. ✓

Задатак 8. Општи чланови X_n и Y_n независних низова независних случајних величина имају униформну $\mathcal{U}[0,1]$ и експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу. Ако је $Z_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - Y_k)}{\sqrt{n}}$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Z_n).

Решење. Како X_n има униформну $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу, следи да је $E(X_n) = \frac{1}{2}$ и $D(X_n) = \frac{1}{12}$. Слично, пошто Y_n има експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу, следи да је $E(Y_n) = \frac{1}{2}$ и $D(Y_n) = \frac{1}{4}$. Из централне граничне теореме следи да

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big)}{\sqrt{D\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\Big)}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \xrightarrow{D} X^* \in \mathcal{N}(0,1) \tag{1}$$

и

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - E\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\Big)}{\sqrt{D\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\Big)}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \xrightarrow{D} Y^* \in \mathcal{N}(0,1). \tag{2}$$

Сада, из (1) можемо закључити да $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \frac{1}{\sqrt{12}}X^*$. Слично, из (2) закључујемо да $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \frac{1}{\sqrt{4}}Y^*$. Познато је да збир две случајне величине са нормалном расподелом има нормалну расподелу, а пошто је стандардна нормална расподела симетрична око нуле, Y^* и $-Y^*$ имају исту расподелу. С обиром да су низови случајних величина међусобно независни, морају бити независне и њихове граничне вредности. Одатле следи да $\frac{1}{\sqrt{12}}X^* - \frac{1}{\sqrt{4}}Y^*$ има нормалну расподелу са очекивањем

$$E\Big(\frac{1}{\sqrt{12}}X^* - \frac{1}{\sqrt{4}}Y^*\Big) = E\Big(\frac{1}{\sqrt{12}}X^*\Big) - E\Big(\frac{1}{\sqrt{4}}Y^*\Big) = \frac{1}{\sqrt{12}}E(X^*) - \frac{1}{\sqrt{4}}E(Y^*) = 0,$$

и дисперзијом

$$D\Big(\frac{1}{\sqrt{12}}X^* - \frac{1}{\sqrt{4}}Y^*\Big) = D\Big(\frac{1}{\sqrt{12}}X^*\Big) + D\Big(\frac{1}{\sqrt{4}}Y^*\Big) = \frac{1}{12}D(X^*) + \frac{1}{4}D(Y^*) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3},$$

при чему је за рачунање дисперзије коришћена независност случајних величина. Дакле,

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - Y_k)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \frac{1}{\sqrt{12}}X^* - \frac{1}{\sqrt{4}}Y^* \in \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{3}\Big).$$

✓

Задатак 9. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}=\frac{1}{2}$.

Решење. Ако X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, онда важи

$$F(m)=P\{X\le m\}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Дакле, израз чија гранична вредност треба да се одреди, односно да се покаже да је једнака $\frac{1}{2}$, представља функцију расподеле Пуасонове $\mathcal{P}(n)$ расподеле. Познато је сума n независних случајних величина са Пуасоновом $\mathcal{P}(1)$ расподелом има Пуасонову $\mathcal{P}(n)$ расподелу, односно ако $X_i\in\mathcal{P}(1)$, $i=1,...,n$, онда $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\in\mathcal{P}(n)$. На основу централне граничне теореме следи за свако $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\Big)}{\sqrt{D\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\Big)}}\le x\right\}=\Phi(x). \tag{3}$$

Пошто са десне стране израза (3) треба да буде вредност $\frac{1}{2}$, следи да је $\Phi(x)=\frac{1}{2}$, односно $x=\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)=0$. Са друге стране, ако је $x=0$ израз чија се гранична вредност тражи је

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\Big)}{\sqrt{D\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\Big)}}\le 0\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-nE(X_1)}{\sqrt{nD(X_1)}}\le 0\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n}{\sqrt{n}}\le 0\right\}$$
$$=P\left\{\sum_{k=1}^{n}X_k\le n\right\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k e^{-n}}{k!}.$$

Заменом овог израза у (3) добија се тврђење. ✓

Издвојене расподеле

У наставку ће бити приказане неке расподеле случајних величина и нека њихова својства.

⋄ Дискретне:

- ***Бернулијева расподела:*** $X\in Ber(p)$, $p\in[0,1]$

  закон расподеле: $X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$, односно

  $$p(x;p)=P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},\ x\in\{0,1\}$$

  очекивање: $E(X)=p$

  дисперзија: $D(X)=p(1-p)$

⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са Бернулијевом $Ber(p)$ расподелом, онда $\sum_{k=1}^{n} X_k$ има биномну $B(n,p)$ расподелу.

- ***Биномна расподела:*** $X \in \mathcal{B}(m,p),\ p \in [0,1],\ m \in \mathbf{N}$

  закон расподеле: $p(x;m,p) = P\{X = x\} = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x \in \{0, ..., m\}$

  очекивање: $E(X) = mp$

  дисперзија: $D(X) = mp(1-p)$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са биномном $B(m,p)$ расподелом, онда $\sum_{k=1}^{n} X_k$ има биномну $B(nm,p)$ расподелу. Због ове особине, каже се да је биномна расподела адитивна по првом параметру.

- ***Геометријска расподела:*** $X \in \mathcal{G}(p),\ p \in [0,1]$

  закон расподеле: $p(x;p) = P\{X = x\} = (1-p)^{x-1}p,\ x \in \mathbf{N}$

  очекивање: $E(X) = \frac{1}{p}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са геометријском $\mathcal{G}(p)$ расподелом, онда $\sum_{k=1}^{n} X_k$ има негативну биномну $\mathcal{NB}(n,p)$ расподелу.

- ***Негативна биномна расподела:*** $X \in \mathcal{NB}(m,p),\ p \in [0,1],\ m \in \mathbf{N}$

  закон расподеле: $p(x;m,p) = P\{X = x\} = \binom{x-1}{m-1} p^m (1-p)^{x-m}, x \in \{m, m+1, ...\}$

  очекивање: $E(X) = \frac{m}{p}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{m(1-p)}{p^2}$

  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са негативном биномном $\mathcal{NB}(m,p)$ расподелом, онда $\sum_{k=1}^{n} X_k$ има негативну биномну $\mathcal{NB}(nm,p)$ расподелу. Дакле, негативна биномна расподела је адитивна по првом параметру.

- ***Равномерна (дискретна униформна) расподела:*** $X \in \mathcal{DU}(m),\ m \in \mathbf{N}$

  закон расподеле: $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$, односно

  $$p(x;m) = P\{X = x\} = \frac{1}{m} I\{x \leq m\},\ x \in \mathbf{N}$$

  очекивање: $E(X) = \frac{m+1}{2}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{m^2-1}{12}$

- ***Пуасонова расподела:*** $X \in \mathcal{P}(\lambda),\ \lambda > 0$

  закон расподеле: $p(x;\lambda) = P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x \in \mathbf{N}_0$

  очекивање: $E(X) = \lambda$

  дисперзија: $D(X) = \lambda$

⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са Пуасоновом $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има Пуасонову $\mathcal{P}(n\lambda)$ расподелу. Дакле, Пуасонова расподела је адитивна по параметру

◇ **Непрекидне:**

- ***Униформна расподела:*** $X \in \mathcal{U}(a,b),\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b$

густина расподеле: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

фунција расподеле: $F(x;a,b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$

очекивање: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

дисперзија: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

- ***Експоненцијална расподела:*** $X \in \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$

густина расподеле: $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

фунција расподеле: $F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

очекивање: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

дисперзија: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има гама $\gamma(n, \lambda)$ расподелу.

- ***Гама расподела:*** $X \in \gamma(a,b),\ a > 0,\ b > 0$

густина расподеле: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}b^a e^{-bx}}{\Gamma(a)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где је $\Gamma(a)$ гама функција

фунција расподеле: $F(x;a,b) = \int\limits_0^x f(t;a,b)dt$

очекивање: $E(X) = \frac{a}{b}$

дисперзија: $D(X) = \frac{a}{b^2}$

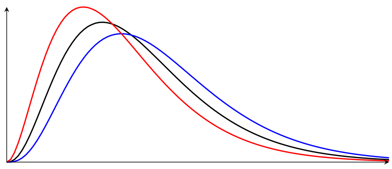
⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са гама $\gamma(a,b)$ расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има гама $\gamma(na, b)$ расподелу. Дакле, гама расподела је адитивна по првом параметру

⋆ Ако $X \in \gamma(a,b)$, онда $2bX \in \chi^2_{2a}$.

- ***Хи-квадрат расподела са m степени слободе:*** $X \in \chi^2_m,\ m \in \mathbb{N}$

  густина расподеле:

$$f(x;m) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



  фунција расподеле: $F(x;m) = \int\limits_0^x f(t;m)dt$

  очекивање: $E(X) = m$

  дисперзија: $D(X) = 2m$

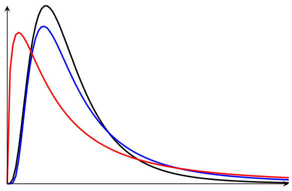
  ⋆ Ако су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са χ^2_m расподелом, онда $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ има χ^2_{nm} расподелу. Дакле, χ^2 расподела има особину адитивности.

  ⋆ Ако $Y \in \mathcal{N}(0,1)$, онда $Y^2 \in \chi^2_1$.

  ⋆ Ако $X \in \chi^2_m$, онда $X \in \gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2})$.

- ***Фишерова расподела:*** $X \in \mathcal{F}_{a,b},\ a > 0, b > 0$

  ⋆ Ако $X \in \mathcal{F}_{a,b}$, онда $\frac{1}{X} \in \mathcal{F}_{b,a}$.
  ⋆ Ако $Y \in \chi^2_a$ и $Z \in \chi^2_b$ и независне су, онда $\frac{\frac{Y}{a}}{\frac{Z}{b}} \in \mathcal{F}_{a,b}$

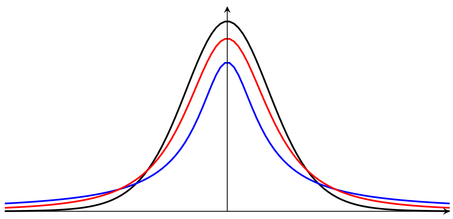


- ***Студентова расподела расподела са m степени слободе:*** $X \in t_m,\ m \in \mathbb{N}$

  ⋆ Ако су $X_0, X_1, ..., X_m$ независне случајне величине са $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом, онда

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} X_k^2}{m}}}$$

  има Студентову t_m расподелу.



- ***Бета расподела:*** $X \in \beta(a,b),\ a > 0,\ b > 0$

  густина расподеле: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ где је $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ бета функција

  фунција расподеле: $F(x;a,b) = \int\limits_0^x f(t;a,b)dt$

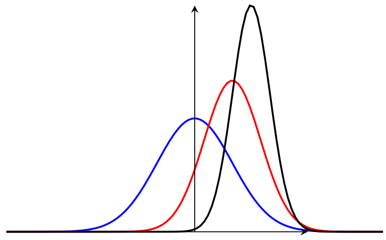
  очекивање: $E(X) = \frac{a}{a+b}$

  дисперзија: $D(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

  ⋆ Ако $X \in \beta(a,1)$, онда $-\ln X \in \mathcal{E}(a)$.

  ⋆ Ако $X \in \beta(a,b)$, онда $\frac{2bX}{2a(1-X)} \in \mathcal{F}_{2a,2b}$.

- ***Нормална расподела:*** $X \in \mathcal{N}(m,\sigma^2),\ m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$



густина расподеле: $f(x;m,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
фунција расподеле:

$$\Phi(x;m,\sigma^2)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t;m,\sigma^2)dt$$

очекивање: $E(X)=m$
дисперзија: $D(X)=\sigma^2$

⋆ Ако $X\in\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, онда $\frac{X-m}{\sigma}\in\mathcal{N}(0,1)$.

⋆ Ако су $X_1,...,X_n$ независне случајне величине са $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподелом, онда

- $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\in\mathcal{N}(nm,n\sigma^2)$;
- $\overline{X}_n\in\mathcal{N}(m,\frac{\sigma^2}{n})$;
- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kX_k\in\mathcal{N}(m\sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\sigma^2\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)$, где су $a_1,...,a_n$ реални бројеви;
- $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-m}{\sigma}\right)^2\in\chi^2_n$.

Напомена: Са $\Phi_0(x)$ ће у наставку бити означена вероватноћа која је приказана у таблицама, односно

$$\Phi_0(x)=\int_0^x f(t;0,1)dt=\Phi(x;0,1)-\Phi(0;0,1)=\Phi(x;0,1)-0.5.$$