Конвергенција низова случајних величина

Дефиниција. Низ случајних величина (X_n) конвергира у вероватноћи ка случајној величини X ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

За конвергенцију у вероватноћи користи се ознака $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$.

Дефиниција. Низ случајних величина (X_n) конвергира скоро сигурно (са верова тноћом 1) ка случајној величини X ако важи

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1.$$

За скоро сигурну конвергенцију користи се ознака $X_n \xrightarrow{\text{С.С.}} X, n \to \infty$.

Дефиниција. Низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном ка случајној величини X ако важи

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0.$$

За средње квадратну конвергенцију користи се ознака $X_n \xrightarrow{\text{С.К.}} X, n \to \infty$.

Дефиниција. Низ случајних величина (X_n) конвергира у расподели (или слабо конвергира) ка случајној величини X ако за сваку ограничену и непрекидну функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X)).$$

За конвергенцију у расподели користи се ознака $X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$.

Задатак 1. Нека је $\Omega = \{\omega_k | k \in N\}$ скуп елементарних исхода неког експеримента и $P\{\omega_k\} = \frac{6}{\pi^2 k^2}$. За сваки природан број n нека је $X_n(\omega_k) = \begin{cases} n, k = n, \\ 0, k \neq n, \end{cases}$, а $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$. Испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (X_n), односно низа случајних величина (Y_n).

Решење. Из закона расподеле

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} & \frac{6}{\pi^2 n^2} \end{pmatrix}$$

очекујемо да ће низ случајних величина X_n конвергирати ка 0.

Испитајмо конвергенцију у вероватноћи и расподели низа (X_n):

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P\{|X_n - 0| > \varepsilon\} = P\{X_n > \varepsilon\} \leq P\{X_n = n\} = \frac{6}{\pi^2 n^2} \to 0,\ n \to \infty$$
$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$$
$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{D} 0, n \to \infty$$

Испитајмо скоро сигурну конвергенцију низа (X_n):

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - 0| > \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} < \infty \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\text{С.С.}} 0, n \to \infty$$

Из једнакости $E|X_n - 0|^2 = \frac{6}{\pi^2} \nrightarrow 0, n \to \infty$, видимо да $X_n \overset{\text{С.К.}}{\nrightarrow} 0, n \to \infty$. Испитајмо сада конвергенцију низа (Y_n). Како је $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$, очекујемо да ће низ Y_n конвергирати ка 1. Приметимо да

$$\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{\text{С.С.}} 0, n \to \infty &\iff P\{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\} = 1 \\
&\implies P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^2} = 0\right\} = 1 \\
&\iff P\left\{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{X_n}{n^2}\right) = 1\right\} = 1 \\
&\iff Y_n \xrightarrow{\text{С.С.}} 1, n \to \infty
\end{aligned}$$

Из претходног следи $Y_n \xrightarrow{P} 1, n \to \infty$ и $Y_n \xrightarrow{D} 1, n \to \infty$.

Остаје још да се испита конвергенција у средње квадратном низа (Y_n). Како је $E|Y_n - 1|^2 = E\left|\frac{X_n^2}{n^4}\right| = \frac{6}{\pi^2 n^4} \to 0,\ n \to \infty$, важи и $Y_n \xrightarrow{\text{С.К.}} 1, n \to \infty$. ✓

Задатак 2. За сваки природан број n случајна величина X_n има униформну $U[0, \frac{1}{n}]$ расподелу, а независно од ње случајна величина Y_n има закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ако је $Z_n = X_n + Y_n$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Z_n).

Решење. На основу датих расподела случајних величина X_n и Y_n видимо да можемо очекивати да ће оба низа (X_n) и (Y_n) конвергирати ка 0, као и низ (Z_n).

Средње квадратну конвергенцију испитаћемо директним рачунањем:

$$E|Z_n|^2 = EX_n^2 + 2EX_nEY_n + EY_n^2 = \frac{4}{3n^2} \to 0,\ n \to \infty \implies Z_n \xrightarrow{\text{С.К.}} 0, n \to \infty$$

Испитајмо скоро сигурну конвергенцију:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P\{|Z_n - 0| > \varepsilon\} \leq \frac{E|Z_n|^2}{\varepsilon^2} = \frac{4}{3\varepsilon^2 n^2}.$$

Како је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|Z_n - 0| > \varepsilon\} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3\varepsilon^2 n^2} < \infty$, закључујемо да $Z_n \xrightarrow{\text{С.С.}} 0, n \to \infty$, као и $Z_n \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$, и $Z_n \xrightarrow{D} 0, n \to \infty$. ✓

Задатак 3. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $U[0, n]$ расподелу. Ако је $Y_n = \min\{1, X_n\}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).

Решење. Како није очигледно шта ће бити гранична случајна величина низа (Y_n), прво ћемо одредити функцију расподеле случајне величине Y_n:

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= P\{Y_n \leq y\} = P\{\min\{1, X_n\} \leq y\} = 1 - P\{\min\{1, X_n\} > y\} \\
&= 1 - P\{1 > y, X_n > y\} = 1 - P\{X_n > y\} = P\{X_n \leq y\} \\
&= \frac{y}{n},\ 0 \leq y < 1
\end{aligned}$$

$$\implies F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{n}, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases} \to \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases} = F(y)$$

Функција $F(x)$ је функција расподеле (дегенерисане) случајне величине 1. Из претходног закључујемо да $Y_n \xrightarrow{D} 1, n \to \infty$, као и $Y_n \xrightarrow{P} 1, n \to \infty$.

Испитајмо скоро сигурну конвергенцију. Како је за $\varepsilon > 0$

$$P\{|Y_n - 1| \ge \varepsilon\} = P\{Y_n \le 1 - \varepsilon\} = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1, \\ \frac{1-\varepsilon}{n}, & \varepsilon \in (0, 1], \end{cases}$$

видимо да постоји бар једно ε, на пример $\varepsilon = \frac{1}{2}$, за које је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n - 1| \ge \varepsilon\} = \infty$ и (Y_n) је низ независних случајних величина (јер је (X_n) низ независних случајних величина), одакле имамо да $Y_n \overset{\text{С.С.}}{\nrightarrow} 1, n \to \infty$.

Директним рачунањем испитујемо средње квадратну конвергенцију:

$$E|Y_n - 1|^2 = E(\min\{1, X_n\})^2 - 2E(\min\{1, X_n\}) + 1 = \frac{1}{3n} \to 0, \ n \to \infty$$
$$\implies Y_n \xrightarrow{\text{С.К.}} 1, n \to \infty.$$

✓

Теорема 1. *(Коши-Шварцова неједнакост) За случајне величине X и Y такве да је $EX^2 < \infty$ и $EY^2 < \infty$ важи*

$$|EXY| \le \sqrt{EX^2 EY^2}.$$

⋆

Задатак 4. Ако низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном смислу ка случајној величини X, онда $EX_n \to EX$ и $DX_n \to DX$ кад $n \to \infty$. Доказати.

Решење. Како низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном смислу ка случајној величини X, важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0.$$

Како је

$$0 \le |EX_n - EX| = |E(X_n - X)| \le E|X_n - X| = \sqrt{(E|X_n - X|)^2} \le \sqrt{E(X_n - X)^2} \to 0,$$

применом теореме о два полицајца следи да $EX_n \to EX, n \to \infty$.

Даље је

$$EX_n^2 = E(X_n - X + X)^2 = E(X_n - X)^2 + 2E(X(X_n - X)) + EX^2.$$

Видимо да први сабирак тежи 0, јер низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном смислу ка случајној величини X. Посматрајмо други сабирак:

$$0 \le |E(X(X_n - X))| \le E|X(X_n - X)| = \sqrt{(E|X(X_n - X)|)^2}$$
$$\le \sqrt{EX^2 E(X_n - X)^2} \to 0.$$

Последња неједнакост је добијена применом Коши-Шварц неједнакости. Како је $EX_n \to EX$ и $EX_n^2 \to EX^2$, добијамо да $DX_n \to DX, n \to \infty$. ✓

Задатак 5. Општи члан X_n низа независних случајних величина има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је

$$Y_n = \frac{X_n}{X_n + X_{n+1}},$$

испитати сва четири типа конвергенције низа случајних величина $\left(\frac{Y_n}{n}\right)$.

Решење. Одредимо прво расподелу случајне величине Y_n:

$$\begin{aligned} P\{Y_n \leq y\} &= P\left\{\frac{X_n}{X_n + X_{n+1}} \leq y\right\} = P\left\{X_{n+1} \geq \frac{1-y}{y} X_n\right\} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \int_{\frac{1-y}{y}u}^{+\infty} e^{-v} dv du = y, \quad y \in (0,1) \end{aligned}$$

Добили смо да случајна величина Y_n има униформу $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу. Тада

$$P\left\{\frac{Y_n}{n} \leq y\right\} = P\left\{Y_n \leq yn\right\} = yn,\ y \in \left(0, \frac{1}{n}\right),$$

односно $\frac{Y_n}{n}$ има униформу $\mathcal{U}(0, \frac{1}{n})$ расподелу. Очекујемо да ће низ $\left(\frac{Y_n}{n}\right)$ конвергирати ка 0.

Испитајмо средње квадратну конергенцију низа случајних величина $\left(\frac{Y_n}{n}\right)$:

$$E\left(\frac{Y_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} E(Y_n)^2 = \frac{1}{3n^2} \to 0,\ n \to \infty$$

$$\Longrightarrow \frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\text{С.К.}} 0,\ n \to \infty$$

Из претходног следи $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$ и $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{D} 0, n \to \infty$.

Испитајмо скоро сигурну конвергенцију:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P\left\{\left|\frac{Y_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left|\frac{Y_n}{n}\right|^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{3\varepsilon^2 n^2}.$$

Како је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{Y_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right\} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\varepsilon^2 n^2} < \infty$, закључујемо да $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\text{С.С.}} 0, n \to \infty$. ✓

Задатак 6. Нека је (X_n) низ независних случајних величина са експоненцијалном $\mathcal{E}(1)$ расподелом и нека је $M_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$. У зависности од вредности реалног параметра α, где је $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина $(n^\alpha M_n)$.

Решење. Одредимо прво расподелу случајне величине $n^\alpha M_n$.

$$\begin{aligned} P\{n^\alpha M_n \leq x\} &= P\left\{\min\{X_1, \dots X_n\} \leq \frac{x}{n^\alpha}\right\} = 1 - P\left\{\min\{X_1, \dots X_n\} > \frac{x}{n^\alpha}\right\} \\ &= 1 - \left(P\left\{X_1 > \frac{x}{n^\alpha}\right\}\right)^n = 1 - \left(e^{-\frac{x}{n^\alpha}}\right)^n = 1 - e^{-xn^{1-\alpha}},\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha > 1$:

$$P\{n^\alpha M_n \leq x\} = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1 - e^{-xn^{1-\alpha}},\ x \geq 0 \end{cases} \to 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

С обзиром да гранична вредност није функција расподеле ниједне случајне величине, можемо закључити да у овом случају не важи конвергенција у расподели. Према томе, наведени низ неће конвергирати ни на остала три начина.

Ако је $\alpha < 1$:

$$P\{n^\alpha M_n \leq x\} = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1 - e^{-xn^{1-\alpha}}, \ x \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$$

Према томе, $n^\alpha M_n \xrightarrow{D} 0, n \to \infty \implies n^\alpha M_n \xrightarrow{P} 0, n \to \infty.$

Испитајмо скоро сигурну конвергенцију:

$$(\forall \varepsilon > 0) \ P\{|n^\alpha M_n| > \varepsilon\} = P\left\{\min\{X_1, \dots, X_n\} > \frac{\varepsilon}{n^\alpha}\right\} = e^{-\varepsilon n^{1-\alpha}} = \left(\frac{1}{e^\varepsilon}\right)^{n^{1-\alpha}}.$$

Како је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left\{|n^\alpha M_n| > \varepsilon\right\} < \infty$, закључујемо да $n^\alpha M_n \xrightarrow{\text{С.С.}} 0, n \to \infty.$

Директним рачунањем испитајмо средње квадратну конвергенцију:

$$E\left(n^\alpha M_n\right)^2 = \frac{2}{n^{2(1-\alpha)}} \to 0, n \to \infty \implies n^\alpha M_n \xrightarrow{\text{С.К.}} 0, n \to \infty.$$

✓

Задатак 7. За густину расподеле општег члана низа случајних величина (X_n) важи да је

$$f_{X_n}(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Ако је $Y_n = \frac{1}{n(1+e^{-X_n})}$, испитати сва четири типа конвергенције низа случајних величина (Y_n).

Решење. За функцију расподеле низа случајних величина X_n имамо да је

$$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt.$$

Ако уведемо смену $u = 1 + e^{-t}$, добијамо да је

$$F_{X_n}(u) = \int_{+\infty}^{w} (-1) \frac{(u-1)}{u^2(u-1)} du = \int_{w}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{w}$$

где је $w = 1 + e^{-x}$, па је

$$F_{X_n}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Приметимо да је сада

$$nY_n = F(X_n),$$

па је

$$F_{nY_n}(y) = P\{nY_n \leq y\} = P\{F(X_n) \leq y\} = P\{X_n \leq F^{-1}(y)\} = F(F^{-1}(y)) = y, \ y \in (0,1).$$

Дакле, добијамо да је $nY_n \in \mathcal{U}(0,1)$, па је

$$P\left\{Y_n \leq y\right\} = P\{nY_n \leq ny\} = ny, \ y \in \left(0, \frac{1}{n}\right),$$

односно следи $Y_n \in \mathcal{U}\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Покажимо да ће низ Y_n конвергирати ка 0.

За конвергенцију у средње квадратном важи

$$E\left(Y_n\right)^2 = DY_n + (EY_n)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3n^2} \to 0,\ n \to \infty.$$

Према томе, закључујемо да низ Y_n конвергира у средње квадратном ка нули, па следствено томе важи $Y_n \xrightarrow{P} 0$ и $Y_n \xrightarrow{D} 0$ када $n \to \infty$. У циљу испитивања скоро сигурне конвергенције приметимо да је

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P\left\{|Y_n - 0| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left|Y_n\right|^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{3\varepsilon^2 n^2}.$$

На основу претходног следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{|Y_n - 0| \geq \varepsilon\right\}$ конвергира јер конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\varepsilon^2 n^2}$. Одавде следи да низ (Y_n) конвергира скоро сигурно ка нули. ✓

Задатак 8. Испитати све четири врсте конвергенције низа независних случајних величина $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако је карактеристична функција φ_n општег члана тог низа дата са

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{\frac{it}{n}}}{2024 - 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}}.$$

Решење. Приметимо да је

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{it}{n}}}{2024 - 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}} = 1,$$

па на основу теореме о непрекидности закључујемо

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

односно

$$X_n \xrightarrow{D} 0.$$

Како је $X_n \xrightarrow{D} 0$, то важи и $X_n \xrightarrow{P} 0$. У циљу испитивања средње квадратне конвергенције рачунамо $E(X_n^2)$. Имамо да је редом

$$\varphi_n'(t) = \frac{\frac{i}{n}e^{\frac{it}{n}} \cdot \left(2024 - 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}\right) + e^{\frac{it}{n}} \cdot 2023\frac{i}{n}e^{\frac{it}{n}}}{\left(2024 - 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}\right)^2} = \frac{2024ie^{\frac{it}{n}}}{n\left(2024 - 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}\right)^2}.$$

$$\varphi_n''(t) = \frac{-2024e^{\frac{it}{n}}\left(2024 + 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}\right)}{n^2\left(\left(2024 - 2023 \cdot e^{\frac{it}{n}}\right)\right)^3}.$$

Одавде добијамо да је

$$EX_n^2 = \frac{\varphi''(0)}{i^2} = \frac{2024 \cdot \left(2024 + 2023\right)}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

па имамо да низ (X_n) конвергира средње квадратно. За скоро скигурно конвергенцију на основу чебишевљеве неједнакости важи

$$P\{|X_n| > \varepsilon\} \leq \frac{E|X_n|^2}{\varepsilon^2} = \frac{2024 \cdot \left(2024 + 2023\right)}{n^2\varepsilon^2}.$$

Следи

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2024 \cdot (2024 + 2023)}{n^2 \varepsilon^2},$$

те низ (X_n) конвергира скоро сигурно ка нули. ✓

Задатак 9. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ расподелу и нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Доказати да низ случајних величина (S_n) конвергира у расподели ка случајној величини S_∞, где S_∞ има униформну $U[-1,1]$ расподелу.

Решење. Показаћемо да $\varphi_{S_n}(t) \to \varphi_{S_\infty}(t),\ n \to \infty,\ \forall t \in \mathbb{R}$, где су $\varphi_{S_n}(t)$ и $\varphi_{S_\infty}(t)$ карактеристичне функције одговарајућих случајних величина. Ако покажемо додатно да је $\varphi_{S_\infty}(t)$ непрекидна у 0, на основу теореме непрекидности ће следити тражени резултат. Приметимо да је

$$\varphi_{S_\infty}(t) = E(e^{itS_\infty}) = \int_{-1}^{1} e^{itx} \frac{1}{2} dx = \begin{cases} 1,\ t = 0, \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t},\ t \neq 0. \end{cases}$$

Видимо да је $\varphi_{S_\infty}(t)$ непрекидна у 0. Даље,

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{itX_k}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} e^{-it\frac{1}{2^k}} + \frac{1}{2} e^{it\frac{1}{2^k}} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{t}{2^n}\right) \\ &= \begin{cases} 1,\ t = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2^2}\right) \cdots \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \cos\left(\frac{t}{2^n}\right),\ t \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1,\ t = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \frac{1}{2^n} \sin t = \frac{\sin t}{t},\ t \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Дакле, $S_n \xrightarrow{D} S_\infty$, кад $n \to \infty$. ✓