Карактеристична функција

Дефиниција. Нека је X случајна величина са функцијом расподеле F. Карактеристична функција случајне величине X (односно њене функције расподеле) је функција $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ одређена са

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) = E(e^{itX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{k \in S} e^{itk} P\{X = k\}, & \text{ако је } X \text{ дискретног типа,} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx, & \text{ако је } X \text{ апсолутно непрекидног типа.} \end{cases}\end{aligned}$$

Задатак 1. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:

а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;

б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу;

в) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир $X_3 + X_4$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ расподелу;

г) X_5 која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу;

д) X_6 која има гама $\gamma(n, \beta)$ расподелу;

ђ) X_7 чија густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$, а затим израчунати очекивање EX_7 и дисперзију DX_7.

Решење. а) Како је $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, то

$$\varphi_{X_1}(t) = Ee^{itX_1} = (1-p)e^{it \cdot 0} + pe^{it} = 1 - p + pe^{it}$$

б) Како је $P\{X_2 = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n$, то

$$\begin{aligned}\varphi_{X_2}(t) &= Ee^{itX_2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

в) Како је $P\{X_3 = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\varphi_{X_3}(t) = Ee^{itX_3} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

Слично, $\varphi_{X_4}(t) = e^{-\mu(1-e^{it})}$. Тада

$$\varphi_{X_3+X_4}(t) = \varphi_{X_3}(t) \varphi_{X_4}(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})} e^{-\mu(1-e^{it})} = e^{-(\lambda+\mu)(1-e^{it})}.$$

Дакле, $X_3 + X_4 \in \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

г) Како је $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$, то

$$\varphi_{X_5}(t) = Ee^{itX_5} = \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-it)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

д) Како је $f(x) = \frac{x^{n-1}\beta^n e^{-\beta x}}{\Gamma(n)},\ x \geq 0$,

$$\varphi_{X_6}(t) = Ee^{itX_6} = \int_0^{+\infty} e^{itx}\frac{x^{n-1}\beta^n e^{-\beta x}}{(n-1)!}dx = \beta^n\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}e^{(it-\beta)x}}{(n-1)!}dx = \beta^n I_{n-1}$$

Парцијалном интеграцијом добијамо

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}e^{(it-\beta)x}}{(n-1)!}dx = \begin{vmatrix} u = x^{n-1},\ du = (n-1)x^{n-2}dx \\ dv = e^{(it-\beta)x}dx,\ v = \frac{1}{it-\beta}e^{(it-\beta)x}\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x^{n-1}}{it-\beta}e^{(it-\beta)x}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{(it-\beta)x}(n-1)x^{n-2}}{(it-\beta)}dx\right) \\
&= \frac{1}{(\beta - it)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-2}e^{(it-\beta)x}}{(n-2)!}dx \\
&= \frac{1}{\beta - it}I_{n-2} = \cdots = \frac{1}{(\beta-it)^{n-1}}I_0 \\
&= \frac{1}{(\beta-it)^{n-1}}\int_0^{+\infty} e^{(it-\beta)x}dx \\
&= \frac{1}{(\beta-it)^n}.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\varphi_{X_6}(t) = \frac{\beta^n}{(\beta-it)^n}$$

ђ) Како је $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_7}(t) &= Ee^{itX_7} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^0 e^{x(it+1)}dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1-it)}dx\right) \\
&= \frac{1}{2(it+1)} + \frac{1}{2(1-it)} = \frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Треба још одредити очекивање и дисперзију. Користећи теорему **??** следи

$$\begin{aligned}
\varphi'_{X_7}(t) &= -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \implies EX_7 = \frac{\varphi'_{X_7}(0)}{i} = 0 \\
\varphi''_{X_7}(t) &= -\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^3} \implies EX_7^2 = \frac{\varphi''_{X_7}(0)}{i^2} = 2 \implies DX_7 = EX_7^2 - (EX_7)^2 = 2.
\end{aligned}$$

✓

Задатак 2. Доказати да линеарна комбинација n независних случајних величина са нормалном расподелом има нормалну расподелу.

Решење. Нека $X^\star \in \mathcal{N}(0,1)$. Тада

$$\varphi_{X^\star}(t) = Ee^{itX^\star} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Диференцирањем под знаком интеграла и коришћењем парцијалне интеграције

$$\begin{aligned}
\varphi'_{X^\star}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= -t\varphi_{X^\star}(t).
\end{aligned}$$

Решавањем диференцијалне једначине, добија се $\varphi_{X^\star}(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$, а из услова $\varphi_{X^\star}(0) = 1$ следи да је $C = 1$. Дакле, $\varphi_{X^\star}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Ако је $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, онда важи $X = \sigma X^\star + m$. Користећи својства карактеристичне функције следи

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = Ee^{it(\sigma X^\star + m)} = e^{itm}Ee^{it\sigma X^\star} = e^{itm}\varphi_{X^\star}(t\sigma) = e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Линеарна комбинација n независних случајних величина са нормалном расподелом је $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$, где су a_k константе и $X_k \in \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$. Користећи својства карактеристичне функције следи

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= Ee^{it\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k} = E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{ita_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{ita_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(a_k t) \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{ita_k m_k - \frac{t^2 a_k^2\sigma_k^2}{2}} = e^{it\sum\limits_{k=1}^{n} a_k m_k - \frac{t^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\sigma_k^2}.
\end{aligned}$$

Пошто карактеристична функција јединствено одређује расподелу, можемо закључити да $Y \in \mathcal{N}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k m_k, \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\sigma_k^2\right)$. ✓

Задатак 3. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију $\varphi(t)$ важи:

а) $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$;

б) $\varphi(t) = (1-\beta)(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha e^{-it})(1-\beta e^{it})^{-1}, 0 < \alpha < \beta < 1$;

в) $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

Решење. а) Приметимо да

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{3}{4} + \frac{\cos t}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{8}e^{-it} + \frac{3}{4}e^{it\cdot 0} + \frac{1}{8}e^{it} \\
&\implies X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

б) За суму чланова геометријског реда важи да је $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, за $|q| < 1$. Због претходног имамо да је редом

$$\varphi(t) = \frac{1-\beta}{1+\alpha}\frac{1+\alpha e^{-it}}{1-\beta e^{it}} = \frac{1-\beta}{1+\alpha}(1+\alpha e^{-it})\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{it})^k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\beta}{1+\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{it})^k + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha\beta^k e^{it(k-1)}\right)\\
&= \frac{1-\beta}{1+\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{it})^k + \alpha e^{-it} + \alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{it})^k\right)\\
&= \frac{1-\beta}{1+\alpha}\alpha e^{-it} + \frac{1-\beta}{1+\alpha}(1+\alpha\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{it})^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow P\{X=-1\} &= \alpha\frac{1-\beta}{1+\alpha}\\
P\{X=k\} &= (1+\alpha\beta)\frac{1-\beta}{1+\alpha}\beta^k,\ k\in\mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

в) Слично претходном, важи да је

$$\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{it}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}e^{itk}$$

$$\Longrightarrow P\{X=k\} = \frac{1}{2^{k+1}},\ k\in\mathbb{N}_0$$

✓

Задатак 4. Ако су Y и Z независне случајне величине такве да је $X=Y+Z$, где X има $\mathcal{U}(0,n+1)$, а Y има $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу, одредити расподелу случајне величине Z.

Решење. Како $X\in\mathcal{U}(0,n+1)$, то следи да

$$\varphi_X(t) = \int_0^{n+1} e^{itx}\frac{1}{n+1}dx = \frac{1}{n+1}\frac{e^{it(n+1)}-1}{it}.$$

Слично, како $Y\in\mathcal{U}(0,1)$, то следи да

$$\varphi_Y(t) = \int_0^1 e^{itx}dx = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Из независности следи да је $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)\varphi_Z(t)$. Према томе

$$\varphi_Z(t) = \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_Y(t)} = \frac{\frac{1}{n+1}\frac{e^{it(n+1)}-1}{it}}{\frac{e^{it}-1}{it}} = \frac{1}{n+1}\frac{e^{it(n+1)}-1}{e^{it}-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(e^{it})^k$$

$$\Longrightarrow Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+1}\end{pmatrix}$$

✓

Задатак 5. За карактеристичну функцију случајне величине X важи да је $\varphi_X(t) = e^{2it}\left(\frac{2}{25}\cos t + \frac{23}{25}\right) - \frac{i}{2}\sin 2t$. Одредити карактеристичну функцију случајне величине X^2.

Решење. Приметимо да је

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= e^{2it}\left(\frac{2}{25}\cos t + \frac{23}{25}\right) - \frac{i}{2}\sin 2t \\
&= e^{2it}\left(\frac{2}{25}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{23}{25}\right) - \frac{i}{2}\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} \\
&= \frac{1}{25}e^{3it} + \frac{1}{25}e^{it} + \frac{23}{25}e^{2it} - \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{1}{4}e^{-2it} \\
&= \frac{1}{25}e^{3it} + \frac{1}{25}e^{it} + \frac{67}{100}e^{2it} + \frac{1}{4}e^{-2it}, \\
&\Longrightarrow X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{25} & \frac{67}{100} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Одавде добијамо да случајна величина X^2 има закон расподеле

$$
X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{25} & \frac{92}{100} & \frac{1}{25} \end{pmatrix},
$$

па за карактеристичну функцију случајне величине X^2 важи да је

$$
\varphi_{X^2}(t) = \frac{1}{25}e^{it} + \frac{92}{100}e^{4it} + \frac{1}{25}e^{9it}.
$$

✓

Задатак 6. Независне случајне величине X и Y имају исти закон расподеле: $\begin{pmatrix} -2024 & 0 & 2025 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Одредити карактеристичну функцију случајне величине $X - Y$.

Решење. Имамо да је карактеристична функција случајних величина X и Y дата са

$$
\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{-2024it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{2025it}.
$$

Како су случајне величине X и Y независне, то су и X и $-Y$ независне, па на основу теореме о производу следи да је

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X-Y}(t) &= \varphi_{X+(-Y)}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(-t) \\
&= \left(\frac{1}{3}e^{-2024it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{2025it}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}e^{2024it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-2025it}\right) \\
&= \frac{1}{18}e^{-4049it} + \frac{1}{12}e^{-2025it} + \frac{1}{6}e^{-2024it} + \frac{7}{18} + \frac{1}{6}e^{2024it} + \frac{1}{12}e^{2025it} + \frac{1}{18}e^{4049it}.
\end{aligned}
$$

Из претходног такође добијамо да случајна величина $X - Y$ има закон расподеле

$$
X - Y : \begin{pmatrix} -4049 & -2025 & -2024 & 0 & 2024 & 2025 & 4049 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.
$$

✓

Задатак 7. Независне случајне величине X_1, X_2 и X_3 имају редом закон расподеле:

$$
P\{X_1 = k\} = \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbb{N},
$$

$$
P\{X_2 = k\} = \frac{2}{3^k},\ k \in \mathbb{N},
$$

$$P\{X_3 = k\} = \frac{4}{5^k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Одредити карактеристичну функцију случајне величине $X_1 + X_2 + X_3$.

Решење. Карактеристичне функције случајних величина X_1, X_2 и X_3 су редом:

$$\varphi_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} e^{ikt} = \frac{e^{it}}{2} \frac{1}{1 - e^{it}/2},$$

$$\varphi_{X_2}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} e^{ikt} = \frac{2e^{it}}{3} \frac{1}{1 - e^{it}/3},$$

$$\varphi_{X_3}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{5^k} e^{ikt} = \frac{4e^{it}}{5} \frac{1}{1 - e^{it}/5}.$$

Како су X_1, X_2 и X_3 међусобно независне, то на основу теореме о производу важи

$$\varphi_{X_1+X_2+X_3}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\varphi_{X_3}(t),$$

па је

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{4}{15} e^{3it} \left(\frac{5}{1 - e^{it}/2} - \frac{5}{1 - e^{it}/3} + \frac{1}{1 - e^{it}/5} \right) \\
&= \frac{4}{15} e^{3it} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \left(5 \cdot \frac{1}{2^k} - 5 \cdot \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{it(k+3)} \frac{4}{15} \left(5 \cdot \frac{1}{2^k} - 5 \cdot \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} \right) \\
&= \sum_{k=3}^{+\infty} e^{itk} \frac{4}{15} \left(5 \cdot \frac{1}{2^{k-3}} - 5 \cdot \frac{1}{3^{k-3}} + \frac{1}{5^{k-3}} \right).
\end{aligned}$$

Дакле, случајна величина $X_1 + X_2 + X_3$ има закон расподеле

$$P\{X = k\} = \frac{4}{15} \left(5 \cdot \frac{1}{2^{k-3}} - 5 \cdot \frac{1}{3^{k-3}} + \frac{1}{5^{k-3}} \right),\ k = 3, 4, \ldots.$$

✓