Živa matematika – uvodjenje u naučni rad i pripreme za studentska takmičenja

1. grupa problema

RadeedaR, 27. maj 2010

1. Pokazati da je iracionalan broj η definisan kao broj u kome dostiže maksimum realna funkcija

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x}{x^3 - 4x^2 + 6x - 2},\ x \geq 1.$$

Motivacija: Ovo je tzv. "signature density function" (Freedman-Luo) za 4-mnogostrukosti.

2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ temena konveksnog poligona (m-ugla) P_m u ravni $\mathbb{R}^2$. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ pozitivni realni brojevi. Posmatrajmo funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definisana sa

$$F(x) = \frac{1}{f(x)} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^{\langle a_k, x\rangle} a_k$$

gde je $\langle x, y\rangle$ skalarni proizvod i $f(x) := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^{\langle a_k, x\rangle}$. Dokazati da je F neprekidna injekcija (1–1 funkcija). Pokazati da je slika Image(F) = F($\mathbb{R}^2$) funkcije F unutrašnjost poligona P_m.

Motivacija: Ovo je rezultat koji se pojavljuje u teoriji "torusnih varijeteta" (W.Fulton; Introduction to toric varieties).

3. Svaki član ekipe (ali i svako drugi ko je zainteresovan!) neka izabere jedan zadatak sa nekog medjunarodnog studentskog takmičenja ("Putnam", "Jarnik", IMC, itd.). Izaberite pažljivo (prema svom ukusu) a onda cemo na zajedničkom sastanku izabrati "tim-projekat" vezan za te zadatke!

4. " ... One of the basic theorems of convex domination is the result of Hardy et al. which says that if $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ are real numbers, then

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} f(y_j)$$

for all convex functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ if and only if there exists a doubly stochastic $n \times n$ matrix $M = (m_{ij})$ such that $\bar{y} = M(\bar{x})$ where $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ and $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ ..."

5. Kakva je veza zadatka 4 sa Birkhofovim politopom (Birkhoff) `http://en.wikipedia.org/wiki/Birkhoff_polytope`.

2. grupa problema

12. juni 2010

Opšti istraživački problem: Veza sopstvenih vrednosti Hermitskih matrica, njihovih minora, suma, itd.

Konačni cilj: Frances Kirwan teorema konveksnosti za moment preslikavanje, sa akcentom na konkretne primene (A.Klyachko, A. Knutson, T. Tao, W. Fulton) itd.

Zadatak 1: Neka su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n+1}$ sopstvene vrednosti Hermitske $(n+1) \times (n+1)$-matrice A i $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$ sopstvene vrednosti njenog glavnog $n \times n$ minora (dobijenog brisanjem poslednje vrste i poslednje kolone od A). Dokazati da onda važi relacija:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n \geq \mu_n \geq \lambda_{n+1}. \tag{1}$$

Dokazati da je ovaj uslov i dovoljan, tj. ako važi (1) onda postoji Hermitska matrica sa sopstvenim vrednostima λ takva da njen glavni minor ima sopstvene vrednosti μ.

Veza sa konfokalnim kvadrikama

Zadatak 2: Pretopstavimo da je zadovoljen uslov (1) i da su sve navedene nejednakosti striktne ($\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \ldots$). Potražimo matricu A čiji glavni minor ima sopstvene vrednosti $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ u obliku

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & & x_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \mu_n & x_n \\ x_1 & \ldots & x_n & 2x_2 \end{pmatrix}$$

pri čemu se pretpostavlja da su u glavnom minoru svi koeficienti matrice osim dijagonalnih jednaki nuli kao i da su svi brojevi $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni.

Dokazati da A ima sopstvene vrednosti $\lambda_1 > \ldots > \lambda_{n+1}$ ako i samo ako je $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tačka preseka $n+1$ konfokalnih kvadrika

$$Q_{\lambda_i} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\lambda_j - \lambda_j} = \lambda_i - 2x_0 \right\}.$$

Zadatak 3: Neka su zadani realni brojevi $a_1 > \ldots > a_n$ i neka je

$$Q_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{a_1 - \lambda} = 1 \right\}$$

associrana familija konfokalnih kvadrika u $\mathbb{R}^n$. Pokazati da se svaka tačka $x \in \mathbb{R}^n$ koja ne pripada koordinatnim hiperravnima ($x_1 x_2 \ldots x_n \neq 0$) nalazi u preseku

$$Q_{\lambda_1} \cap \ldots \cap Q_{\lambda_n}$$

tačno n ovih kvadrika kao i da su te kvadrike u toj tački preseka medjusobno ortogonalne.